РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗРАБОТКИ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

2016 № 5

УДК 622.235.535.2

# О ПРИЛОЖЕНИЯХ НЕАРХИМЕДОВА АНАЛИЗА В МЕХАНИКЕ БЛОЧНО-ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ГЕОСРЕДЫ

**А. Ф. Ревуженко**

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,* E-mail: revuzhenko@yandex.ru,
*Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Рассмотрена возможность использования неархимедова анализа для построения моделей многомасштабной геосреды на основе понятия диссипативной функции. В качестве координат введены неархимедовые прямые, обладающие неограниченной иерархией. Дано обобщение на двумерный случай основных понятий одномерного математического анализа.

*Геосреда, иерархия, деформация, диссипативная функция, неархимедова величина*

“Математика — это язык, на котором написана книга природы”. Весь ход развития естествознания показывает истинность этого известного высказывания Галилео Галилея. И геомеханика не исключение. Математические объекты живут собственной идеальной жизнью. Главное, что эта жизнь, если ее правильно организовать, будет соответствовать жизни реальных объектов. В геомеханике это означает, что математические модели будут адекватно отражать реальные явления, а значит, и предсказывать новые, прогнозировать развитие ситуаций, для которых еще нет опытных данных.

Но что такое математическая модель? Из какого материала она создается? Такая постановка вопроса дает довольно неожиданный ответ: объем средств, который используется в большинстве моделей, весьма ограничен. Это, прежде всего, набор функций, зависящих от четырех вещественных координат, причем функций довольно гладких (разрывы допускаются только на изолированных поверхностях). Для таких функций имеет смысл понятия производных. На этой основе строятся замкнутые системы, как правило, дифференциальных уравнений, т. е. математические модели среды.

Любое оправданное расширение арсенала исходных средств открывает новые возможности для дальнейших построений. В качестве примера можно сослаться на такие новые понятия математического языка, как “фракталы” и “дробные производные” [1, 2]. Данная работа посвящена расширению набора средств, которые можно использовать для построения математических моделей геосреды.

Основанием для такого расширения служит факт, который в настоящее время становится общепризнанным: реальная геосреда имеет блочно-иерархическое строение [3 – 5]. Это обстоятельство определяет важнейшие свойства геосреды: формирование в ней поля напряжений [6, 7], генерацию и распространение волн [8], способность запасать и высвобождать упругую энергию [9, 10] и др.

Работа выполнена за счет средств Российского научного фонда (проект № 16-17-10121).

Для теоретического описания этих процессов используются методы механики сплошной среды и классического математического анализа, которые базируются на общепринятой концепции арифметического пространства и времени: точка пространства — это тройка вещественных чисел, а момент времени — одно вещественное число. Таким образом, в основе теоретических методов лежит концепция вещественной прямой.

Одно из свойств вещественной прямой состоит в следующем. Если выбрать любой шаг (масштаб) и двигаться с ним вдоль прямой, то можно достичь любой точки на данной прямой (аксиома Архимеда). В этом смысле (обычную) вещественную прямую можно считать прямой, имеющей только один масштабный уровень. Именно поэтому вещественная прямая представляется недостаточно адекватным объектом для описания процессов деформирования многомасштабных сред.

Наличие многих масштабных уровней так или иначе должно учитываться в математических моделях. Как правило, для этого используются модели, содержащие внутренние переменные. Внутренние переменные описывают дополнительные степени свободы, которые появляются на различных масштабах. Последовательное развитие таких моделей приводит к необходимости наделить многими масштабами сами координатные оси.

Каким образом это можно сделать? Вещественная прямая, как известно, является сплошной. Вопрос о том, как поместить на нее множество новых точек, относящихся к новым масштабным уровням, становится нетривиальным.

**НЕАРХИМЕДОВ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

Рассмотрим один из возможных вариантов решения данного вопроса. По Кантору, вещественное число — это определенная совокупность последовательностей рациональных чисел (рациональные числа $r_n = r(n)$ так же, как и натуральный ряд $n$ = 1, 2, 3…, считаются заданными). Например, вещественное число нуль состоит из последовательностей $\delta_n$ таких, что для любого натурального $N$ найдется натуральное $M$ такое, что $|\delta_n| < 1/N$ при $n > M$. Вещественное число $\sqrt{2}$ — это последовательность $a_n = 1.4, 1.41, 1.414, ...$ и другие последовательности вида $a_n + \delta_n$. Таким образом, вещественное число можно представить как шарообразную туманность, частицами которой являются указанные последовательности. Сама вещественная прямая подобна спице, на которую как бусины нанизаны указанные шарообразные туманности. Причем нанизаны так, что зазоров между ними нет. Ничто не мешает некоторые частицы туманностей объединить в более крупные частицы и дальше иметь дело уже только с ними. Будем считать, что крупная частица состоит из одной какой-то последовательности $b_n$ и любой другой последовательности, которая может отличаться от $b_n$ только конечным числом членов. Крупные частицы будем называть элементарными числами и обозначать как

$$B = \operatorname*{Lim}_{n \to \omega} b_n = \operatorname{Lim} b_n . \qquad (1)$$

Необходимо также ввести элементарные числа, которым соответствуют последовательности $b_n$, необязательно фундаментальные (т. е. последовательности Коши) или ограниченные. Арифметические операции и сравнение чисел типа $B$ введем через их компоненты $b_n$. Например, если $D = \operatorname{Lim} d_n$, то $B \cdot D = \operatorname{Lim} b_n \cdot d_n$, $B \ge D$, если $b_n \ge d_n$ начиная с некоторого номера $n$. Объект $B$ по отношению к последовательности $b_n$ будем считать пределом последовательности в смысле Lim, а компонент $b_n$ по отношению к $B$ — приближением $B$. Число $\omega = \mathrm{Lim}\, n$ больше любого натурального числа. Будем считать его эталоном актуально бесконечно больших чисел. Тогда $E = 1/\omega$ — эталон актуально бесконечно малых чисел. Рациональные числа $r$ отождествим с $\mathrm{Lim}\, r$.

Объект $\omega$ используем для продолжения натурального ряда в область актуальных бесконечно больших чисел:

$$1, 2, 3, \ldots \omega, \omega+1, \ldots 2\omega, \ldots \omega^2, \ldots \omega^\omega, \ldots v = \mathrm{Lim}\, v(n), \ \ldots \tag{2}$$

Продолженный натуральный ряд может служить инструментом для построения неархимедова анализа, подобно тому как (обычный) натуральный ряд используется для построения классического математического анализа.

Начнем с объекта нуль — $O_{\text{сущ}}$, который принципиально отличается от натурального числа нуль (в классическом анализе ситуация такая же: вещественное число нуль принципиально отличается от натурального числа 0). Числом $O_{\text{сущ}}$ назовем класс последовательностей элементарных чисел $c_v$ таких, что для любого числа $\mu$ из ряда (2) найдется номер $\Lambda$ из ряда (2) такой, что при $v > \Lambda$ будет выполняться условие $|c_v| < 1/\mu$.

Теперь вместо вещественных чисел $\alpha$ введем более подходящие объекты $\alpha^*$, которые назовем ядрами вещественных чисел $\alpha$. Пусть $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} r(n)$. Образуем следующую последовательность элементарных чисел:

$$A_1 = r_1, \ldots A_n = r(n), \ldots A_\omega = \mathrm{Lim} r(n), \ldots A_v = \mathrm{Lim} r(v(n)), \ldots . \tag{3}$$

Класс последовательностей, в который входит (3) и другие последовательности $A_v + c_v$, назовем пределом последовательности (3) и обозначим как

$$\alpha^* = \mathrm{limit}\, A_v\,. \tag{4}$$

Вместо вещественных чисел везде будем использовать только их ядра. Неформально такой переход означает следующее. В центре туманности $\alpha$ с помощью процедуры (3), (4) ставится точка $\alpha^*$. Затем вся туманность сбрасывается, а ее центр $\alpha^*$ как представитель всей туманности $\alpha$ — остается. Между ядрами вещественных чисел появляется сколько угодно места для новых чисел новых масштабных уровней. Для наших целей достаточно ограничиться только числами вида

$$X = x + x^{(1)}E + \ldots + x^{(m)}E^m\,; \qquad Y = y + y^{(1)}E + \ldots + y^{(m)}E^m\,, \tag{5}$$

где $x, y, \ldots x^{(m)}, y^m$ — ядра вещественных чисел. Между новыми числами $\alpha^*$ и обычными вещественными числами $\alpha$ есть полное соответствие. Например, сумме двух чисел $\alpha + \beta$ соответствует сумма $\alpha^* + \beta^*$, поэтому в техническом отношении с ядрами можно действовать так же, как с обычными вещественными числами.

Оси $OX$, $OY$ являются уже многомасштабными. Случаи, когда число масштабных уровней неограниченно, не исключаются, например $(1-E)^{-1} = 1 + E + \ldots + E^\omega + \ldots$. В работах [11, 12] описан математический аппарат для анализа функций одной переменной $X$. Рассмотрим обобщение на случай двух переменных $F(X,Y)$. Функция двух неархимедовых переменных сводится к функции $2m$ вещественных переменных. Для них можно ввести понятие предела (4), частных производных и неопределенных интегралов. Все это делается по аналогии с классическим анализом и [12].

Принципиально новые моменты появляются в связи с многомасштабностью координатных осей. Выберем шаг длиной $qE$, где $q$ — ядро вещественного числа, например $q = 0.1$. Будем двигаться с этим шагом от нуля вдоль оси $OX$. За $n$ шагов мы доберемся до точки $X_n = 0.1nE$. Ясно, что ни за какое конечное число шагов первый микроуровень прямой преодолеть мы не сможем, т. е. не сможем добраться до точки $X = 0.1$.

Согласно (1), переход с уровня на уровень можно совершать только с помощью процедуры Lim. Отрезок $0.1nE < X < 0.1$ назовем областью интерфейса между первым микро- и вещественным уровнем прямой.

Если $\mathrm{Lim}F(X_n, Y) = F(\mathrm{Lim}X_n, Y)$, то функция $F$ считается непрерывной по первому аргументу в области указанного интерфейса, или непрерывной при переходе с масштабного уровня $X_n$ на уровень $\mathrm{Lim}X_n$. Для таких функций вводится понятие частной интерфейсной производной

$$\mathrm{Lim}\frac{F(\mathrm{Lim}X_n, Y) - F(X_n, Y)}{\mathrm{Lim}X_n - X_n}.$$

Операцию обратного перехода можно назвать неопределенным интерфейсным интегрированием. Все эти понятия пополняют арсенал средств для исследования механики многомасштабных сред.

Основные трудности возникают при введении понятия определенного интеграла.

Ограничимся функциями, заданными только на двух масштабных уровнях:

$$X = x + \xi, \quad Y = y + \eta, \quad \xi = x^{(1)}E, \quad \eta = y^{(1)}E;$$

$$\xi_n = \frac{x^{(1)}}{n}, \quad \eta_n = \frac{y^{(1)}}{n}; \quad F(X, Y) = f(x, y, \xi, \eta).$$

Если функция $f$ фактически зависит только от двух переменных $f = h(x + \xi; y + \eta)$, то она будет непрерывной при переходе с одного масштабного уровня на другой. Здесь интеграл совпадает с классическим. Если же непрерывности нет, то для конкретизации интеграла, кроме функции и области интегрирования, необходимо задать некоторые дополнительные условия.

Пусть область интегрирования представляет собой прямоугольник $s: 0 \le X \le L_1$, $0 \le Y \le L_2$, $L_1$, $L_2$ — ядра вещественных чисел. Разобьем $s$ на $n^2$ элементарных прямоугольников $s_{ij}(n)$ со сторонами $l_1 = L_1 / n$, $l_2 = L_1 / n$, $1 \le i$, $j \le n$.

В дальнейшем, согласно (1), перейдем к пределу Lim при $n \to \omega$. Имея в виду это обстоятельство, рассмотрим элемент со сторонами $l_{1n}$, $l_{2n}$ как приближение прямоугольника со сторонами $l_1 = L_1E$, $l_2 = L_2E$. Внутри последнего значения $x$, $y$ не меняются и, следовательно, функция $f(x, y, \xi, n)$ зависит только от переменных микроуровня $\xi$ и $\eta$. Будем считать, что это имеет место и для $n$-го приближения. Обозначим через $x_{ij}(n)$, $y_{ij}(n)$ координаты центра прямоугольника $s_{ij}(n)$. Примем, что центру соответствуют координаты $\xi_n = 0$, $\eta_n = 0$.

Среднее значение интеграла по элементарному прямоугольнику можно ввести обычным образом:

$$\rho_{ij}(n) = \frac{\gamma_{ij}(n)}{s_{ij}}, \quad \gamma_{ij}(n) = \iint_{s_{ij}} f(x_i, y_j, \xi_n, \eta_n)\, d\xi_n d\eta_n.$$

Сумму интегралов $J(n)$ по всем элементарным прямоугольникам будем считать *n*-приближением искомого интеграла *J*. Интеграл *J* определим как предел в смысле Lim от $J(n)$ при $n \to \omega$, т. е. положим

$$J = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} J(n) = (l_1, l_2)\iint_s F(X,Y)dXdY; \tag{6}$$

$$J(n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}(n).$$

Если бы здесь стоял обычный предел lim при $n \to \infty$, то мы получили бы следующий результат:

$$I = \iint_s f(x,y,0,0)dxdy. \tag{7}$$

В последней конструкции игнорируются детали поведения функции на микроуровне. Поэтому выражение (7) не зависит ни от способа разбиения *s* на части $s_{ij}$, ни от выбора точки внутри $s_{ij}$, которая соответствует значениям $\xi_n = 0$, $\eta_n = 0$. В интеграле (6) такая зависимость есть (этот факт подчеркнут в обозначении интеграла (6)). В техническом отношении процедура интегрирования (6) становится более громоздкой, чем классическая процедура (7).

Аналогичные процедуры рассматриваются в теории конечных разностей [13], или в квантовом анализе [14]. Однако ничто не мешает рассмотреть и промежуточные по сложности случаи, когда результат (6) округляется с точностью до $E^2$ или *E* и др. Формально в первом случае полагаем $E^2 = 0$, но $E \neq 0$. Округлению $E = 0$ соответствует обычный интеграл (7).

Рассмотрим задачу (6), не прибегая к округлениям. Основная проблема состоит в вычислении двойных сумм в (6). В одномерном случае задача суммирования сводится к разностному уравнению. Для его решения вводится функция, производящая числа Бернулли. Решение дается формулой Эйлера – Маклорена [13, 14] (в многомерном варианте [15, 16]).

Задача (6) отличается от классической тем, что в (6) от числа *n* зависит не только общее число слагаемых, стоящих в сумме, но и значение каждого из слагаемых. Необходимо отметить также еще одну особенность задачи. Она связана с тем, что природа чисел, относящихся к различным масштабным уровням прямой, различна. В результате арифметических операций они не смешиваются, не растворяются друг в друге и до известной степени сохраняют свою индивидуальность. Например, если $x = 8.3$ — число вещественного уровня, а $\rho = E$ — актуальная бесконечно малая, то 8.3 + 1 = 9.3, 2*E* + 1.5*E* = 3.5*E*. Здесь индивидуальность теряется. С другой стороны, в сумме 8.3 + *E* индивидуальность слагаемых сохраняется полностью. В техническом плане это означает, что с числами $\varphi(x,\rho)$ можно обращаться как с функциями. Указанные особенности позволили упростить вывод формулы суммирования в одномерном случае [12]. (В частности, здесь не возникло необходимости обращения к функции, производящей числа Бернулли.) Рассмотрим обобщение на двумерный случай.

Пусть

$$\Phi(K,m) = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{m}\gamma_{ij}(n)$$

— частичная сумма. Положим, по определению, что $\Phi(0,0) = 0$, $\Phi(K,0) = 0$, $\Phi(0,m) = 0$. Тогда задача суммирования сводится к решению следующего разностного уравнения:

$$\Phi(r,t) + \Phi(r-1,t-1) - \Phi(r-1,t) - \Phi(r,t-1) = \gamma(r,t;n). \tag{8}$$

$$1 \le r \le K, \quad 1 \le t \le m.$$

От индексов координат перейдем к самим координатам и затем к пределу Lim при $n \to \omega$. В результате размеры элементарных прямоугольников перейдут от $l_{1n} = L_1 / n$, $l_{2n} = L_2 / n$ к актуально бесконечно малым длинам $l_1 = L_1 E$, $l_2 = L_2 E$. Значение интегралов по элементарным прямоугольникам и значения частичных сумм зависят от $l_1$, $l_2$. Данные параметры включим в список аргументов функции Ф. Таким образом, от (8) переходим к

$$\Phi(x,y,l_1,l_2) + \Phi(x-l_1, y-l_2, l_1, l_2) - \Phi(x-l_1, y, l_1, l_2) - \\ - \Phi(x, y-l_2, l_1, l_2) = \rho(x - l_1/2, y - l_2/2, l_1, l_2) l_1, l_2 . \tag{9}$$

Воспользуемся линейностью задачи. Представим правую часть, отнесенную к $l_1$, $l_2$, в виде суммы

$$\rho = \sum_i \lambda_i(l_1, l_2) G_i(x,y).$$

Тогда решение можно искать в следующем виде:

$$\Phi = \sum_i \lambda_i(l_1, l_2) \Psi_i(x,y,l_1,l_2), \tag{10}$$

где функции $\Psi_i$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1}{l_1 l_2}[\Psi_i(x,y,l_1,l_2) + \Psi_i(x-l_1, y-l_2, l_1, l_2) - \Psi_i(x-l_1, l_1, l_2) - \Psi_i(x, y-l_2, l_1, l_2)] = G_i(x,y) \tag{11}$$

и $G_i$, $\lambda_i$ — известные функции. Индекс *i* будем опускать.

Переход от уравнения (9) к уравнению (11) является принципиальным. В (11) правая часть не зависит от величин $l_1$, $l_2$. Следовательно, и левая часть от $l_1$, $l_2$ зависеть не должна. Этого требования достаточно, чтобы найти решение $\Psi$ практически элементарным путем. Будем искать его в виде разложения

$$\Psi(x,y,l_1,l_2) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}(x,y) l_1^i l_2^j . \tag{12}$$

Подставим (12) в (11), воспользуемся формулой Тейлора, приведем подобные члены и приравняем нулю соответствующие выражения так, чтобы левая часть от $l_1$ и $l_2$ не зависела. В результате получим формулу суммирования

$$\Psi(x,y,l_1,l_2) = \sum_{i,j=0}^{\infty} k_{ij} \frac{\partial^{i+j} a_{00}}{\partial x^i \partial y^j} l_1^i, l_2^j + C(x,y,l_1,l_2),$$

где *C* — произвольная периодическая функция $C(x \pm l_1, y \pm l_2; l_1, l_2) = C(x,y,l_1,l_2)$,

$$a_{00} = k_{00} \int_0^y dy \int_0^x G(x,y) dx, \quad k_{00} = 1,$$

и последующие значения $k_{ij}$ определяются следующими формулами:

для нулевой строки $k_{00}$, $k_{01}$, $k_{02}$, $k_{03}$, ...:

$$k_{00} = 1,$$

$$-\frac{k_{00}}{2!} + \frac{k_{01}}{1!} = 0,$$

$$\frac{k_{00}}{3!} - \frac{k_{01}}{2!} + \frac{k_{02}}{1!} = 0,$$

$$-\frac{k_{00}}{4!} + \frac{k_{01}}{3!} - \frac{k_{02}}{2!} + \frac{k_{03}}{1!} = 0,$$

$$\frac{k_{00}}{5!} - \frac{k_{01}}{4!} + \frac{k_{02}}{3!} - \frac{k_{03}}{2!} + \frac{k_{04}}{1!} = 0, ...$$

Для первой строки $k_{10}$, $k_{11}$, $k_{12}$, $k_{13}$, …:

$$-\frac{k_{00}}{2!}+\frac{k_{10}}{1!}=0,$$

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{k_{00}}{2!}-\frac{k_{01}}{1!}\right)-\frac{1}{1!}\left(\frac{k_{10}}{2!}-\frac{k_{11}}{1!}\right)=0,$$

$$\frac{1}{2!}\left(-\frac{k_{00}}{3!}+\frac{k_{01}}{2!}-\frac{k_{02}}{1!}\right)-\frac{1}{1!}\left(-\frac{k_{10}}{3!}+\frac{k_{11}}{2!}-\frac{k_{12}}{1!}\right)=0,$$

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{k_{00}}{4!}-\frac{k_{01}}{3!}+\frac{k_{02}}{2!}-\frac{k_{03}}{1!}\right)-\frac{1}{1!}\left(\frac{k_{10}}{4!}-\frac{k_{11}}{3!}+\frac{k_{12}}{2!}-\frac{k_{13}}{1!}\right)=0,$$

$$\frac{1}{2!}\left(-\frac{k_{00}}{5!}+\frac{k_{01}}{4!}-\frac{k_{02}}{3!}+\frac{k_{03}}{2!}-\frac{k_{04}}{1!}\right)-\frac{1}{1!}\left(-\frac{k_{10}}{5!}+\frac{k_{11}}{4!}-\frac{k_{12}}{3!}+\frac{k_{13}}{2!}-\frac{k_{14}}{1!}\right)=0.$$

Для второй строки $k_{20}$, $k_{21}$, $k_{22}$, $k_{23}$, $k_{24}$ …:

$$-\frac{1}{3!}\left(-\frac{k_{00}}{1!}\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{k_{10}}{1!}\right)-\frac{1}{1!}\left(-\frac{k_{20}}{1!}\right)=0,$$

$$-\frac{1}{3!}\left(\frac{k_{00}}{2!}-\frac{k_{01}}{1!}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{k_{10}}{2!}-\frac{k_{11}}{1!}\right)-\frac{1}{1!}\left(\frac{k_{20}}{2!}-\frac{k_{21}}{1!}\right)=0,$$

$$-\frac{1}{3!}\left(-\frac{k_{00}}{3!}+\frac{k_{01}}{2!}-\frac{k_{02}}{1!}\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{k_{10}}{3!}+\frac{k_{11}}{2!}-\frac{k_{12}}{1!}\right)-\frac{1}{1!}\left(-\frac{k_{20}}{3!}+\frac{k_{21}}{2!}-\frac{k_{22}}{1!}\right)=0,$$

$$-\frac{1}{3!}\left(\frac{k_{00}}{4!}-\frac{k_{01}}{3!}+\frac{k_{02}}{2!}-\frac{k_{03}}{1!}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{k_{10}}{4!}-\frac{k_{11}}{3!}+\frac{k_{12}}{2!}-\frac{k_{13}}{1!}\right)-\frac{1}{1!}\left(\frac{k_{20}}{4!}-\frac{k_{21}}{3!}+\frac{k_{22}}{2!}-\frac{k_{23}}{1!}\right)=0$$

$$-\frac{1}{3!}\left(-\frac{k_{00}}{5!}+\frac{k_{01}}{4!}-\frac{k_{02}}{3!}+\frac{k_{03}}{2!}-\frac{k_{04}}{1!}\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{k_{10}}{5!}+\frac{k_{11}}{4!}-\frac{k_{12}}{3!}+\frac{k_{13}}{2!}-\frac{k_{14}}{1!}\right)-$$

$$-\frac{1}{1!}\left(-\frac{k_{20}}{5!}+\frac{k_{21}}{4!}-\frac{k_{22}}{3!}+\frac{k_{23}}{2!}-\frac{k_{24}}{1!}\right)=0$$

Для третьей строки $k_{30}$, $k_{31}$, $k_{32}$, $k_{33}$, $k_{34}$,…:

$$\frac{1}{4!}\left(-\frac{k_{00}}{1!}\right)-\frac{1}{3!}\left(-\frac{k_{10}}{1!}\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{k_{20}}{1!}\right)-\frac{1}{1!}\left(-\frac{k_{30}}{1!}\right)=0,$$

$$\frac{1}{4!}\left(\frac{k_{00}}{2!}-\frac{k_{01}}{1!}\right)-\frac{1}{3!}\left(\frac{k_{10}}{2!}-\frac{k_{11}}{1!}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{k_{20}}{2!}-\frac{k_{21}}{1!}\right)-\frac{1}{1!}\left(\frac{k_{30}}{2!}-\frac{k_{31}}{1!}\right)=0,$$

$$\frac{1}{4!}\left[-\frac{k_{00}}{3!}+\frac{k_{01}}{2!}-\frac{k_{02}}{1!}\right]-\frac{1}{3!}\left[-\frac{k_{10}}{3!}+\frac{k_{11}}{2!}-\frac{k_{12}}{1!}\right]+\frac{1}{2!}\left[-\frac{k_{20}}{3!}+\frac{k_{21}}{2!}-\frac{k_{22}}{1!}\right]-\frac{1}{1!}\left[-\frac{k_{30}}{3!}+\frac{k_{31}}{2!}-\frac{k_{32}}{1!}\right]=0,$$

$$\frac{1}{4!}\left[\frac{k_{00}}{4!}-\frac{k_{01}}{3!}+\frac{k_{02}}{2!}-\frac{k_{03}}{1!}\right]-\frac{1}{3!}\left[\frac{k_{10}}{4!}-\frac{k_{11}}{3!}+\frac{k_{12}}{2!}-\frac{k_{13}}{1!}\right]+\frac{1}{2!}\left[\frac{k_{20}}{4!}-\frac{k_{21}}{3!}+\frac{k_{22}}{2!}-\frac{k_{23}}{1!}\right]-$$

$$-\frac{1}{1!}\left[\frac{k_{30}}{4!}-\frac{k_{31}}{3!}+\frac{k_{32}}{2!}-\frac{k_{33}}{1!}\right]=0,$$

$$\frac{1}{4!}\left[-\frac{k_{00}}{5!}+\frac{k_{01}}{4!}-\frac{k_{02}}{3!}+\frac{k_{03}}{2!}-\frac{k_{04}}{1!}\right]-\frac{1}{3!}\left[-\frac{k_{10}}{5!}+\frac{k_{11}}{4!}-\frac{k_{12}}{3!}+\frac{k_{13}}{2!}-\frac{k_{14}}{1!}\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[-\frac{k_{20}}{5!}+\frac{k_{21}}{4!}-\frac{k_{22}}{3!}+\frac{k_{23}}{2!}-\frac{k_{24}}{1!}\right]-\frac{1}{1!}\left[-\frac{k_{30}}{5!}+\frac{k_{31}}{4!}-\frac{k_{32}}{3!}+\frac{k_{33}}{2!}-\frac{k_{34}}{1!}\right]=0,...$$

Полученные формулы дают решение задачи для каждой из функций $\Psi$ из представления (10). Окончательный результат дается суммой (10), где все функции $\lambda_i(l_1,l_2)$ известны.

**О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ГЕОСРЕДЫ**

Введение объектов $(1)-(4)$ расширяет возможности математического аппарата для поиска моделей различных процессов. Однако здесь возникает новая проблема, которая связана с тем, что здесь открывается слишком много возможностей и сразу неясно, как ими следует распорядиться. Основная трудность связана с тем, что вещественное число с точки зрения $(1)-(4)$ представляет собой объект (шарообразную туманность, о которой говорилось выше) с бесконечно большим числом измерений. Это относится как к координатам по пространству, так и к координате по времени. Самый простой путь решения проблемы состоит в том, чтобы отбросить все возможности, в которых нет необходимости. Ограничимся только одним измерением (5), сохранив вдоль него иерархию масштабов. В качестве второго шага ограничимся плоской деформацией.

Пусть $u=u(X,Y)$, $v=v(X,Y)$ — поле перемещений. Каждая из указанных функций сводится к функции $2m$ вещественных переменных. Различные комбинации производных данных функций по $x,y,x^{(1)}E,...y^{(m)}E$ можно использовать при выводе определяющих уравнений. При этом должен выполняться ряд ограничений. Первое связано с инвариантностью уравнений: можно использовать только такие комбинации производных, которые не зависят от жесткого смещения и поворота тела. Следующее ограничение можно получить, если использовать понятие диссипативной функции. Здесь проблема может быть сведена к выбору аргументов у этой функции и определению ее вида. Для дальнейших построений можно использовать технику, развитую в [17, 18].

Далее во всех случаях должен выполняться принцип соответствия: если фактически многомасштабность среды не проявляется, то модели переходят в классические, т. е. неархимедовы переменные переходят в обычные вещественные переменные. Достаточным условием для этого является равенство следующих производных:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial(x^{(1)}E)}=...=\frac{\partial}{\partial(x^{(m)}E)},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial(y^{(1)}E)}=...=\frac{\partial}{\partial(y^{(m)}E)}. \tag{13}$$

Отсюда можно заключить, что основную роль в уравнениях играют производные некоторого базового микроуровня и разности производных на различных уровнях (в случае (13) указанные разности тождественно равны нулю). Условия предельного состояния и дилатансионные соотношения можно ввести по аналогии с одномасштабными условиями. Например, дилатансия на первом микроуровне приводит к уравнению

$$\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)^2}=\sin\nu\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial v}{\partial\xi}\right),$$

где $\nu$ — угол дилатансии.

Выведенная конструкция двойного интеграла позволяет формулировать также различные вариационные принципы, аналогичные рассмотренным в [12].

Таким образом, если ограничиться только координатными осями типа (5), то задачу в неархимедовом многомасштабном пространстве можно свести к задаче поиска функций обычных вещественных переменных. При этом описание многомасштабности реальной среды достигается за счет соответствующего увеличения размерности задачи.

**ВЫВОДЫ**

Для построения математических моделей блочно-иерархической среды можно использовать основные понятия неархимедова математического анализа.

Основное отличие рассматриваемого подхода от классического состоит в замене обычных (архимедовых, одномасштабных) координатных осей на неархимедовы, т. е. многомасштабные оси.

При построении моделей можно использовать известные методы теории пластичности, связанные с введением понятия диссипативной функции и соответствующих определяющих уравнений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Булат А. Ф., Дырда В. И.** Фракталы в геомеханике. — Киев: Наук. думка, 2005. — 356 с.
2. **Журавков М. А., Романова Н. С.** Определение физико-механических свойств геоматериалов на основе данных наноидентирования и моделей дробного порядка // ФТПРПИ. — 2016. — № 2. — С. 3 – 15.
3. **Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И.** О механизме деформирования сыпучего материала при больших сдвигах // ФТПРПИ. — 1974. — № 3. — С. 130 – 133.
4. **Садовский М. А.** Об естественной кусковатости горных пород // ДАН. — 1979. — Т. 247. — № 4. — С. 829 – 832.
5. **Кочарян Г. Г., Спивак А. А.** Динамика деформирования блочных массивов горных пород. — М.: ИЦК Академкнига, 2003. — 422 с.
6. **Осокина Д. Н.** Об иерархических свойствах тектонического поля напряжений // Поля напряжений и деформаций в земной коре / под ред. Ю. Д. Буланже. — М.: Наука, 1987. — С. 136 – 151.
7. **Ребецкий Ю. Л.** Напряжения и прочность природных массивов. — М.: ИКЦ Академкнига, 2007. — 406 с.
8. **Адушкин В. В., Спивак А. А.** Физические поля в приповерхностной геофизике. — М.: Геос. — 2014. — 360 с.
9. **Курленя М. В., Опарин В. Н., Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И.** О некоторых особенностях реакции горных пород на взрывные воздействия в ближней зоне // ДАН. — 1987. — Т. 293. — № 1. — С. 67 – 70.
10. **Адушкин В. В., Гарнов В. В., Курленя М. В., Опарин В. Н., Ревуженко А. Ф.** Знакопеременная реакция горной породы на динамическое воздействие // ДАН. — 1992. — Т. 323. — № 2. — С. 263 – 269.
11. **Ревуженко А. Ф.** О математическом аппарате для описания структурных уровней геосреды // ФТПРПИ. — 1997. — № 3. — С. 22 – 36.
12. **Ревуженко А. Ф.** Математический анализ функций неархимедовой переменной. — Новосибирск: Наука, 2012. — 327 с.
13. **Гельфонд А. О.** Исчисление конечных разностей. — М.: КомКнига, 2006. — 376 с.
14. **Кац В. Г., Чен П.** Квантовый анализ. — М.: МЦНМО, 2005. — 128 с.
15. **Шишкина О. А.** Формула Эйлера-Маклорена для рационального параллелотопа. // Изв. ИГУ. Сер. Математика. — 2015. — Т. 13. — С. 56 – 71.
16. **Орлов А. И.** Статическое оценивание для сгруппированных данных // Науч. журн. КубГАУ. — 2014. — № 98 (04).
17. **Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д.** Теория пластичности. — Владивосток: Дальнаука, 1998. — 528 с.
18. **Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д.** Математическая теория пластичности. — М.: Физматлит, 2001. — 704 с.


*Поступила в редакцию 15/VIII 2016*