

и фигуры очевидно, что зависимость  $\varepsilon^*(\sigma_0)$  при  $k = 1$  имеет немонотонный, а при  $k = 2$  — монотонно убывающий характер.

Отметим, что немонотонность функции  $\varepsilon^*(\sigma_0)$  вытекает из соотношения показателей степеней при слагаемых, определяющих длительные характеристики материала. Немонотонность проявляется в том случае, когда скорость ползучести имеет более высокую степень зависимости от напряжения по сравнению с зависимостью накопления длительной поврежденности. В этом случае играет роль учет нелинейных мгновенных характеристик аналогично тому, как ранее отмечалась немонотонность при использовании различных функциональных зависимостей для скорости ползучести и скорости накопления поврежденности [4].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
2. Broberg H. A new criterion for brittle creep rupture.— Trans. ASME, 1974, vol. E41, N 3.
3. Boström P. O., Broberg H., Bräthe L., Chrzanowski M. On failure conditions in viscoelastic media and structures.— In: Int. Symposium on mechanics of viscoelastic media and bodies. Berlin: Springer-Verlag, 1975.
4. Локощенко А. М., Шестериков С. А. Модель длительной прочности с немонотонной зависимостью деформации при разрушении от напряжения.— ПМТФ, 1982, № 1.

Поступила 24/XII 1982 г.

УДК 539.376

#### ОБ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ОГНЕУПОРНЫХ КОМПОЗИТОВ

В. В. ДУДУКАЛЕНКО, С. П. ШАПОВАЛОВ

(Сумы)

Огнеупоры на основе корунда с высокой концентрацией включений  $ZrO_2$  в интервале температур 1000—1800°C проявляют аномальные изменения скорости ползучести.

Кручение цилиндрических образцов в условиях установившейся ползучести исследовалось [1] при различных температурах. Характерная зависимость (фиг. 1) скорости ползучести от нагрузки показывает, что аномальное изменение вязкости происходит в области температур фазового превращения  $ZrO_2$  [1].

1. С целью аппроксимации зависимости, показанной на фиг. 1, воспользуемся видоизменением модели Бингама. Диссипативные функции  $D$  выберем различными для малых и больших скоростей деформаций  $\varepsilon_{ij}$  и соответствующих напряжений  $\sigma_{ij}$  [2]:

$$D = k\sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}} + (1/2)v\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)\sigma_{11}\delta_{ij} = \partial D / \partial \varepsilon_{ij},$$

здесь  $k$  — предел пластичности;  $v$  — коэффициент вязкости; индексом  $a$  будем отмечать те же величины  $k_a$ ,  $v_a$  для больших скоростей деформаций.

Инварианты  $\gamma = \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}$ ,  $\tau = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$  одновременно служат обозначениями сдвиговых компонентов в задаче о кручении. В полярной системе координат  $(\rho, \varphi)$  максимальные напряжения достигаются на поверхности стержня  $\rho = R$ , а переход от зависимости  $\tau = k + v\gamma$  к  $\tau = k_a + v_a\gamma$  может иметь место при  $\rho = R_1$ . Зона интенсивной ползучести  $R_1 \leq R$  с ростом напряжений распространяется к центру стержня. Можно показать, что кусочно-линейная зависимость  $\tau(\gamma)$  переходит в гладкое сопряжение для зависимости крутящего момента  $M$  от скорости кручения  $\theta$ . Так как  $\gamma = \theta\rho$ , получим

$$(1.1) \quad M = 2\pi \left[ \int_0^{R_1} \tau \rho^2 d\rho + \int_{R_1}^R \tau \rho^2 d\rho \right], \quad M = 2\pi \left[ k \frac{R^3}{3} + v\theta \frac{R^4}{4} \right] \text{ при } R_1 > R;$$

$$(1.2) \quad M = 2\pi \left[ k_a \frac{R^3}{3} + v_a \theta \frac{R^4}{4} + \frac{(k_a - k)^4}{12\theta^3 (v_a - v)^3} \right], \quad R_1 = \frac{1}{\theta} \frac{k_a - k}{v - v_a} \leq R.$$

Зависимость (1.1), (1.2) связывает параметры аппроксимирующих зависимостей (см. фиг. 1) с параметрами обобщенной модели Бингама  $k$ ,  $k_a$ ,  $v$ ,  $v_a$ . Формула (1.1) определяет линейную зависимость от  $\theta$ , а формула (1.2) — асимптотически линейную ( $\theta \rightarrow \infty$ ), что позволяет вычислять параметры кусочно-линейной зависимости  $\tau(\dot{\gamma})$  по данным эксперимента (см. фиг. 1).

При остывании электроплавящего огнеупора в стеклообразной матрице, содержащей кристаллы  $ZrO_2$ , увеличивается вязкость за счет образования жестких кристаллов корунда. В этих условиях материал способен воспринимать высокие напряжения, которые могут вызвать пластические деформации кристаллов  $ZrO_2$ , двойниковая структура последних объясняет существование предела пластичности и малую вязкость включений.

Используя эти утверждения как гипотезу, покажем, что двухфазная структура, компоненты которой удовлетворяют соотношениям Бингама, описывается реологическими соотношениями, характеризующими аномальный переход к большим скоростям ползучести. Этому переходу соответствует начало пластического деформирования включений.

2. Двухфазная структура материала состоит из вязкопластических компонент, подчиняющихся реологическим уравнениям Бингама, задающим связь между напряжениями  $\sigma_{ij}$  и скоростями деформаций  $\dot{\epsilon}_{ij}$  в виде

$$s_{ij} = k \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\sqrt{\dot{\epsilon}_{kl}\dot{\epsilon}_{kl}}} + v\dot{\epsilon}_{ij}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{ll} \delta_{ij},$$

где  $k$  — предел пластичности;  $v$  — вязкость матрицы. Параметры включений с объемной концентрацией будем отмечать индексом  $k_1$ ,  $v_1$ .

В макрообъеме  $V$ , состоящем из области включений  $V_1$  и матрицы  $V_2$ , диссипативная функция  $D$  равна [3]

$$(2.1) \quad D = \frac{1}{V} \int_{V_2} \left( k \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}} + \frac{1}{2} v\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} \right) dV + \frac{1}{V} \int_{V_1} \left( k_1 \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}} + \frac{1}{2} v_1\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} \right) dV.$$

В [3] предложен метод решения аналогичной задачи в случае идеально пластических составляющих гетерогенной структуры. Минимизация функционала (2.1) по флуктуациям при фиксированных средних значениях  $\langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle$  приводит к вычислению  $D(\langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle)$  и, следовательно, определяет уравнения для средних напряжений  $\langle \sigma_{ij} \rangle = \partial D / \partial \langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle$ . Для сферических включений используются формулы осреднения по областям  $V_1$  и  $V_2$  соответственно:  $\langle \dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} \rangle_1 = \langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle_1 \langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle_1$ ,  $\langle \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}} \rangle_2 = \sqrt{\langle \dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} \rangle_2}$ , что соответствует гипотезе оценок функционала (2.1) для оптимально связанных матриц.

Пусть геометрическая структура материала задана изотропной функцией  $\chi$ , принимающей значение 1 на включениях и 0 в матрице. Очевидно,  $\langle \chi \rangle = c = V_1/V$  и имеют место соотношения

$$(2.2) \quad (1 - c) \langle \dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} \rangle_2 = \langle \dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} \rangle - c \langle \dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} \rangle_1, \\ \langle \chi' \dot{\epsilon}'_{ij} \rangle = c (\langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle_1 - \langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle),$$

где штрихом отмечаются флуктуации.

Введем обозначения:

$$I_0^2 = \langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle \langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle, \quad I_1^2 = \langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle_1 \langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle_1, \\ I^2 = I_0^2 + \langle \dot{\epsilon}'_{ij}\dot{\epsilon}'_{ij} \rangle - c I_1^2.$$

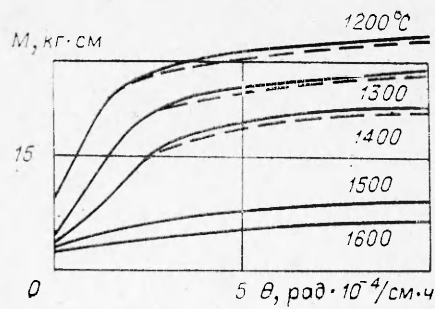
Таким образом, функционал (2.1) представится в виде

$$(2.3) \quad D = k \sqrt{1 - c} I + k_1 c I_1 + (1/2) v I^2 + (1/2) v_1 c I_1^2.$$

Условие экстремальности функционала (2.3) приводит к уравнениям

$$(2.4) \quad k \sqrt{1 - c} (\dot{\epsilon}'_{i,j} - \langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle_1 \chi'_{i,j}) / I + k_1 \langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle \chi'_{i,j} / I_1 + v \dot{\epsilon}'_{i,j} + \\ + (v_1 - v) \langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle_1 \chi'_{i,j} = p'_{i,j}, \quad v'_{i,i} = 0,$$

где  $p'$  — флуктуации гидростатического давления.



Фиг. 1

Решение уравнения (2.4) получим в виде спектральных разложений по волновым числам  $\xi_i$ . [3]:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \epsilon'_{ij} &= (\langle \epsilon_{il} \rangle_1 \xi_l \xi_j \xi^{-2} + \langle \epsilon_{jl} \rangle_1 \xi_j \xi_i \xi^{-2} - 2 \langle \epsilon_{kl} \rangle_1 \xi_k \xi_j \xi_i \xi_j) A \kappa', \\ \xi &= \sqrt{\xi_i \xi_j}, \quad A = (v_1 + k_1/I_1)/(v + k\sqrt{1-c/I}), \end{aligned}$$

откуда в силу изотропности  $\kappa'$  следует

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \langle \kappa' \epsilon'_{ij} \rangle &= c (\langle \epsilon_{ij} \rangle_1 - \langle \epsilon_{ij} \rangle) = \frac{2}{5} c (1-c) A \langle \epsilon_{ij} \rangle_1, \\ \langle \epsilon'_{ij} \epsilon'_{ij} \rangle &= \frac{2}{5} c (1-c) A^2 \langle \epsilon_{ij} \rangle_1 \langle \epsilon_{ij} \rangle_1. \end{aligned}$$

Формулы (2.5) дают систему уравнений для вычисления инвариантов  $I, I_1$

$$(2.7) \quad I_1 \left( 1 - \frac{2}{5} (1-c) A \right) = I_0, \quad I^2 = I_0^2 - c I_1^2 + \frac{2}{5} c (1-c) A^2 I_1^2.$$

В зависимости от напряжений  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  возможен процесс деформирования, в котором включения ведут себя как жесткие частицы. Последние начинают деформироваться при достижении критических напряжений. Для недеформируемых включений  $I_1 = 0$ , тогда из формул (2.4)–(2.7) следует

$$(2.8) \quad \begin{aligned} D &= k \sqrt{1-c} I + \frac{1}{2} v I^2, \quad I_0 = \frac{2}{5} (1-c) \frac{k_1}{v + k \sqrt{1-c/I}}, \\ I^2 &= I_0^2 + \frac{2}{5} c (1-c) k_1^2 / (v + k \sqrt{1-c/I})^2. \end{aligned}$$

Последние два уравнения раскрывают неопределенность относительно  $k$ , следовательно, диссипативная функция в случае жестких включений примет вид

$$(2.9) \quad D = k \sqrt{1 + \frac{3}{2} c} I_0 + \frac{1}{2} v \frac{1 + \frac{3}{2} c}{1-c} I_0^2.$$

Нетрудно указать в зависимости (2.9) значения пределов пластичности и вязкости материала, содержащего жесткие включения.

Критическое значение интенсивности  $I_0^*$  деформирования, при которой напряжения включений достигают предела пластичности  $k_1$ , следует из (2.8)

$$(2.10) \quad k_1 = \frac{5}{2} \left( \frac{k}{\sqrt{1 + \frac{3}{2} c}} + \frac{v}{1-c} I_0^* \right).$$

Перейдем к определению реологической модели в случае, когда обе фазы находятся в пластическом состоянии. Из формулы (2.10) следует, что при  $k_1 \ll (\frac{5}{2})k$  включения находятся в пластическом состоянии с начального момента деформирования. В ином случае процесс происходит с жесткими включениями по формулам (2.9), а затем при достижении критической скорости деформирования  $I_0^*$  имеют место общие соотношения (2.5)–(2.7), учитывающие пластичность включений.

Зависимости между интенсивностями  $\tau = \sqrt{\langle s_{ij} \rangle \langle s_{ij} \rangle} / k$  и  $\gamma = I_0 v / k$  для различных  $c$  и при параметрах, составляющих композит, можно представить в плоскости  $(\tau, \gamma)$  в виде семейства кривых, разделенных границей  $\gamma = \gamma^*(c)$ ,  $\tau = \tau^*(c)$  (фиг. 2):

$$\gamma^*(c) = (1-c) \left( \frac{2}{5} \frac{k_1}{k} - 1 \sqrt{1 + \frac{3}{2} c} \right), \quad \tau^*(c) = \frac{2}{5} \frac{k_1}{k} \left( 1 + \frac{3}{2} c \right),$$

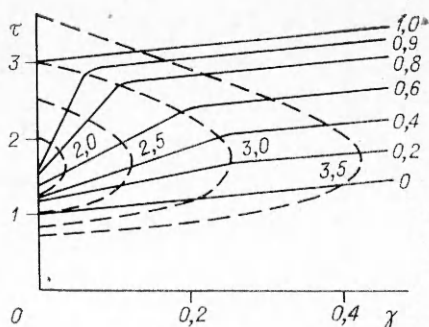
соответствующей точкам перехода включений в пластическое состояние. На фиг. 2 эти границы показаны штриховыми линиями с указанием значений  $k_1/k$ . Слева от границы материал характеризуется соотношениями Бингама

$$\tau = \sqrt{1 + \frac{3}{2} c} + \frac{1 + \frac{3}{2} c}{1-c} \gamma,$$

а справа — нелинейной зависимостью, которая при  $\gamma \rightarrow \infty$  приближается к линейной с асимптотическим пределом пластичности  $k_a$  и вязкостью  $v_a$ :

$$\begin{aligned} v_a/v &= 1 - c (1 - v_1/v) \left[ 1 - \frac{2}{5} (1-c) \left( 1 - \frac{v_1}{v} \right) \right], \\ \left( 1 - \frac{2}{5} (1-c) \left( 1 - \frac{v_1}{v} \right) \right) (k_a/k) &= \left[ (1-c) \sqrt{\left( 1 - \frac{2}{5} \left( 1 - \frac{v_1}{v} \right) \right)^2 + \frac{6}{25} \left( 1 - \frac{v_1}{v} \right)^2 \frac{k_1}{k} c} \right]. \end{aligned}$$

Необходимость использования полученных соотношений связана с тем, что в поле высоких температур исследование микроструктуры технически трудно осуществимо. Полученные соотношения позволяют связать параметры, измеренные в макроэксперименте, с концентрацией и параметрами составляющих, таких как корунд и бадделент, получивших широкое применение в огнеупорных композициях [4]. Эти составляющие достаточно хорошо изучены при различных температурах. Однако зависимость от тепловой истории процесса образования структуры требует использования расчетных методов. Полученные формулы могут быть применены для вычисления параметров матрицы с включениями  $ZrO_2$ . Затем, основываясь на гипотезе самосогласования, можно вычислить свойства матрицы как композиции из кристаллов корунда и стеклообразного связующего, т. е. снова применить полученные здесь формулы, но уже для жестких включений. Свойства  $ZrO_2$  и кристаллов корунда стабильны, но концентрация стеклообразной фазы сильно зависит от тепловой истории, что является целью вычислений. Макропараметры материала при различных температурах могут быть вычислены по экспериментальным данным, например, для кручения (см. фиг. 1). Эти данные хорошо аппроксимируются формулами (1.1), (1.2), которые представлены на фиг. 1 расчетными кривыми (штриховые линии) при  $t^0 = 1200^\circ C$  ( $kR^3 = 4,78$ ,  $\nu R^4 = 5,73 \cdot 10^4$ ,  $k_a R^3 = 13,14$ ,  $\nu_a R^4 = 0,38 \cdot 10^4$ );  $t^0 = 1300^\circ C$  ( $kR^3 = 2,39$ ,  $\nu R^4 = 4,08 \cdot 10^4$ ,  $k_a R^3 = 10,37$ ,  $\nu_a R^4 = 0,25 \cdot 10^4$ );  $t^0 = 1400^\circ C$  ( $kR^3 = 1,91$ ,  $\nu R^4 = 0,25 \times 10^4$ ,  $k_a R^3 = 8,84$ ,  $\nu_a R^4 = 0,16 \cdot 10^4$ ).



Ф и г. 2

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Auerbach A. Tests kp. t 1600°C for establishing the mechanical qualities of certain electrically melted refractory materials.— In: Proc. 7 th conf. silikate I ud 1963. Budapest : Hung. Acad. Sci., 1965.
2. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.
3. Дудукаленко В. В., Лысач Н. Н. О пластических свойствах материала, содержащего пластинчатые включения.— МТТ, 1980, № 1.
4. Керамика из высокоогнеупорных окислов/Под ред. Д. Н. Полубояринова, Г. Я. Понильского. М.: Металлургия, 1977.

Поступила 24/VI 1983 г.

УДК 537.37

#### К ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЭФФЕКТОВ, СОПРОВОЖДАЮЩИХ ДИНАМИЧЕСКУЮ ДЕФОРМАЦИЮ МЕТАЛЛОВ

О. Г. АЛЕКСЕЕВ, С. Г. ЛАЗАРЕВ, Д. Г. ПРИЕМСКИЙ

(Москва)

В ряде работ [1—6] приведены экспериментальные данные по наблюдению электромагнитных эффектов, сопровождающих динамическое нагружение металлов. Возникновение электрических сигналов в [1—5] связывалось с электронно-инерционным эффектом (см., например, [7]).

В данной работе получено уравнение, связывающее напряженность электрического поля с плотностью тока в металле при его динамической деформации. На его основе проведены анализ электромагнитных эффектов и их численная оценка для случая ударного нагружения металлических стержней.

Для описания динамики электронного газа металла в волне деформации применяются линеаризованные гидродинамические уравнения. Это приближение корректно в условиях с преобладающими столкновениями, когда существует локальное равновесие [8], что выражается неравенствами

$$(1) \quad \omega \tau \ll s/v_F;$$

$$(2) \quad \omega \tau_e \ll 1,$$

где  $\omega$  — частота гармоник волны деформации;  $\tau$  — время релаксации электронов по импульсу;  $s$  — скорость волны деформации;  $v_F$  — скорость фермиевских электронов;  $\tau_e$  — время релаксации электронов по энергии.