

УДК 532.59

МАЛЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О СОУДАРЕНИИ СТРУЙ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Е. А. Карабут

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mail: eakarabut@gmail.com

Проведено уточнение и обобщение на случай нестационарного взаимодействия известной стационарной задачи о соударении двух плоских струй идеальной несжимаемой жидкости, движущихся с одинаковой скоростью. Получены уравнения, описывающие распространение возмущений по свободной поверхности соударяющихся струй. Осуществлена линейаризация этих уравнений на стационарном решении.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, свободная поверхность, нестационарные струйные течения, линейаризация.

Введение. Задача о соударении двух струй, движущихся под некоторым углом навстречу друг другу с одинаковой скоростью, которую без ограничения общности можно считать равной единице, является одной из наиболее простых задач, решаемых методом Кирхгофа [1]. Она возникает из задачи об истечении жидкости из двух шлангов (точнее, щелей) различной толщины (рис. 1, *а*) в пределе, когда эти шланги сдвигаются на бесконечность в направлениях, противоположных направлениям векторов скорости струй. В результате возникает стационарное струйное течение, схема которого показана на рис. 1, *б*.

Исследование нестационарного течения необходимо, например, при соударении струй, движущихся с различной скоростью. В этом случае построить непрерывное стационарное решение не удастся, поскольку различные константы Бернулли не могут обеспечить

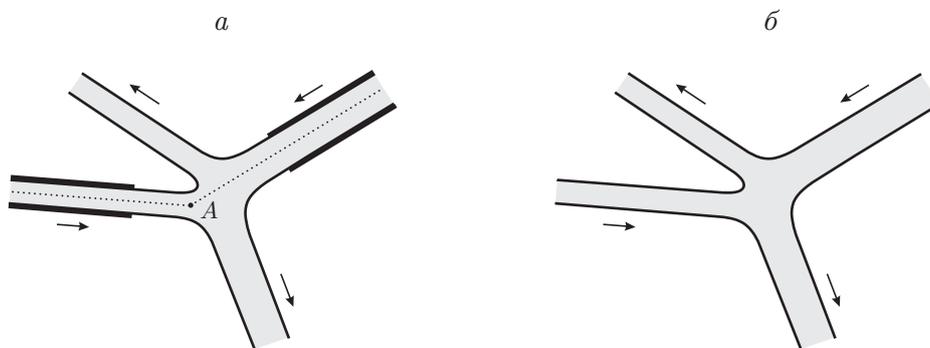


Рис. 1. Схема стационарного соударения струй:

а — истечение из двух щелей, *б* — истечение из бесконечности; стрелки — направления скорости струй

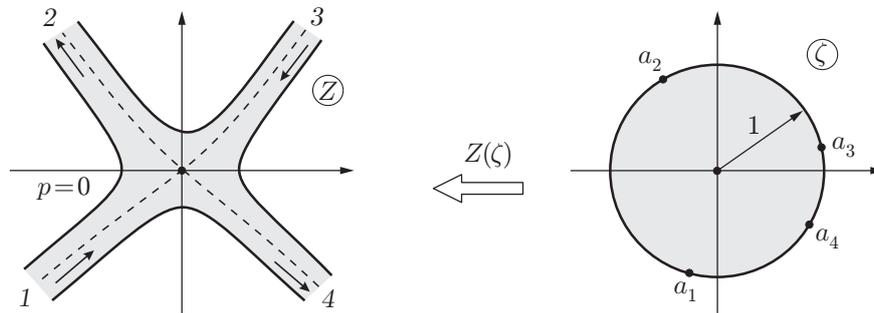


Рис. 2. Конформное отображение $Z(\zeta)$ круга единичного радиуса во вспомогательной плоскости ζ на область течения в плоскости Z в случае стационарного взаимодействия струй:

1, 3 — сходящиеся струи, 2, 4 — расходящиеся струи; стрелки — направления скорости струй

непрерывность давления в критической точке. Только в частном случае лобового столкновения, когда скорости струй различны и направлены навстречу друг другу, можно найти подвижную систему координат, в которой течение будет стационарным. В случае когда струи соударяются под некоторым углом, такой системы не существует. В отличие от случая лобового столкновения в этом случае имеется выделенная точка, например точка пересечения срединных линий набегающих струй (точка A на рис. 1, a). В системе координат, жестко связанной с этой точкой, течение, по-видимому, является периодическим по времени, что подтверждают экспериментальные исследования [2], в которых при взаимодействии двух потоков масла, движущихся с разной скоростью, обнаружены периодические волны на свободной поверхности. Подобное периодическое взаимодействие струй можно рассматривать в качестве простейшей модели волнообразования при сварке взрывом [3]. Более сложные модели, в которых учитываются акустические возмущения, вязкость, теплопроводность, поверхностное натяжение, неустойчивость вихревой дорожки Кармана и т. д., представлены в работе [4].

Уравнения, полученные ниже, можно использовать для описания взаимодействия струй, движущихся с различной скоростью. Однако в первую очередь необходимо вывести уравнения для исследования устойчивости стационарного соударения струй, движущихся с одинаковой скоростью. Возмущения в этом случае предполагаются убывающими на бесконечности, т. е. не влияющими на скорость стационарного течения в бесконечно удаленных точках.

Для исследования слабо возмущенных струйных течений, как правило, используются уравнения, приведенные в [5], при этом граничные условия переносятся на невозмущенную свободную поверхность. Вопрос о корректности данной процедуры в случае нестационарного взаимодействия струй, когда имеется четыре бесконечно удаленные точки, остается открытым. По сути, в этом случае выполняется конформное отображение возмущенной области течения на невозмущенную. Не ясно, можно ли достичь соответствия бесконечно удаленных точек, поскольку конформное отображение, как известно, является только трехпараметрическим. Чтобы избежать ошибки, сначала строго поставим нелинейную задачу, отдельно формулируя предположения, при которых она получена, и только затем выполним линеаризацию данной задачи.

Стационарное решение. В результате взаимодействия двух сходящихся струй образуются две расходящиеся струи (рис. 2). Обозначим через h_j ширину j -й струи ($j = \overline{1, 4}$). В случае если струи являются сходящимися, $h_1 > 0$, $h_3 > 0$, в случае если струи являются расходящимися, $h_2 < 0$, $h_4 < 0$. Пусть $a_j = e^{i\theta_j}$ — комплексные скорости

в бесконечно удаленных точках. Аргумент θ_j характеризует угол, под которым направлена j -я струя. Поместим начало декартовой системы координат X, Y ($Z = X + iY$) в критической точке, т. е. в точке, в которой скорость жидкости равна нулю. Конформное отображение единичного круга, расположенного в некоторой вспомогательной плоскости ζ , на область течения (см. рис. 2), а также комплексная скорость U , выраженная через ζ , задаются формулами [1]

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^4 \frac{h_j}{a_j} \ln \left(1 - \frac{\zeta}{a_j} \right), \quad U(\zeta) = \zeta. \quad (1)$$

Точки a_j , расположенные на единичной окружности $|\zeta| = 1$, являются прообразами бесконечно удаленных точек струй в плоскости Z . Второе уравнение в (1) означает, что плоскость ζ является плоскостью годографа.

Несмотря на то что параметры соударяющихся струй заданы, параметры расходящихся струй нельзя определить однозначно. Параметры сходящихся струй задаются величинами h_1, h_3, a_1, a_3 . Для нахождения четырех параметров расходящихся струй h_2, h_4, a_2, a_4 существует только три уравнения:

$$\sum_{j=1}^4 h_j = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^4 h_j a_j = 0; \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^4 \frac{h_j}{a_j} = 0. \quad (4)$$

Уравнение (2) — это закон сохранения массы, уравнения (3), (4) получены из закона сохранения импульса. Из закона сохранения энергии следует выражение, совпадающее с (2). Закон сохранения момента импульса допускает следующую геометрическую интерпретацию. Если ввести вспомогательные векторы \mathbf{I}_k , каждый из которых направлен вдоль срединной линии k -й струи к критической точке и имеет длину, равную толщине k -й струи (рис. 3), то сумма моментов четырех векторов \mathbf{I}_k относительно произвольной точки будет равна нулю. Нетрудно показать, что в такой формулировке закон сохранения момента импульса тождественно выполняется для любого течения (1).

Таким образом, решение задачи о соударении струй не является единственным. Зададим один параметр расходящихся струй, например угол θ_2 (или a_2), тогда из уравнений (2)–(4) найдем остальные параметры:

$$a_4 = \frac{a_1 a_3 [h_1 (a_1 - a_2) + h_3 (a_3 - a_2)]}{h_1 a_3 (a_1 - a_2) + h_3 a_1 (a_3 - a_2)}, \quad h_2 = -\frac{h_1 h_3 a_2 (a_1 - a_3)^2}{h_1 a_3 (a_1 - a_2)^2 + h_3 a_1 (a_3 - a_2)^2},$$

$$h_4 = -h_1 - h_3 - h_2.$$

Подставляя $a_j = e^{i\theta_j}$, получаем

$$h_2 = \frac{h_1 h_3 [1 - \cos(\theta_1 - \theta_3)]}{h_1 [\cos(\theta_1 - \theta_2) - 1] + h_3 [\cos(\theta_3 - \theta_2) - 1]}.$$

Зафиксировав θ_2 , получим течение, которое будем называть струйной конфигурацией. Меняя значение θ_2 в некотором диапазоне, найдем однопараметрическое семейство струйных конфигураций, причем для каждой из них параметры набегающих струй (толщина и

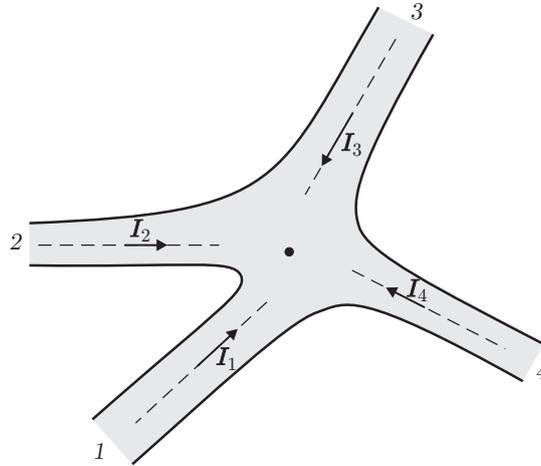


Рис. 3. Геометрическая интерпретация закона сохранения момента импульса (обозначения те же, что на рис. 2)

направление) фиксированны. Линии тока некоторых возможных струйных конфигураций показаны на рис. 4, 5.

Ранее предпринимались попытки найти единственное решение стационарной задачи о соударении струй путем получения четвертого замыкающего уравнения, делающего задачу определенной. Первый был А. Палатини [6], который вычислил кинетическую энергию жидкости в круге $|\zeta| < R$ ($0 < R < 1$) и показал, что для всех значений R минимум этой энергии достигается, если направления расходящихся струй противоположны. Это дает замыкающее уравнение $\theta_4 = \theta_2 + \pi$. В последующих работах [7–9] четвертое замыкающее уравнение находилось различными способами, в результате единственные течения, полученные в этих работах, различались.

По-видимому, более правильной является точка зрения Л. М. Милн-Томсона, который утверждал: “Неопределенность, несомненно, связана с тем, что мы рассматриваем уже сформировавшееся установившееся движение, не учитывая начальных условий, которые приводят к изучаемому установившемуся движению. В самом деле, мы можем предположить, например, что изучаемое движение формируется в результате пуска струй в различных точках в различные моменты времени с промежутком t . Несомненно, что различным значениям времени t будут соответствовать различные установившиеся движения, хотя и нет оснований предполагать, что все они будут устойчивыми” [1]. Иными словами, каждая струйная конфигурация определяется предысторией ее появления. Поэтому для выбора струйной конфигурации необходимо рассматривать нестационарное движение, а для определения равноправности струйных конфигураций целесообразно исследовать их на устойчивость.

Введем константы

$$M_n = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^4 \frac{h_j}{a_j^n} \tag{5}$$

(n — любое целое число), характеризующие данную струйную конфигурацию. Из (2)–(4) следует $M_0 = M_1 = M_{-1} = 0$.

Уравнения нестационарного движения жидкости. Рассмотрим случай плоского нестационарного потенциального течения, когда жидкость занимает ограниченную односвязную область и вся граница области является свободной. В начальный момент времени

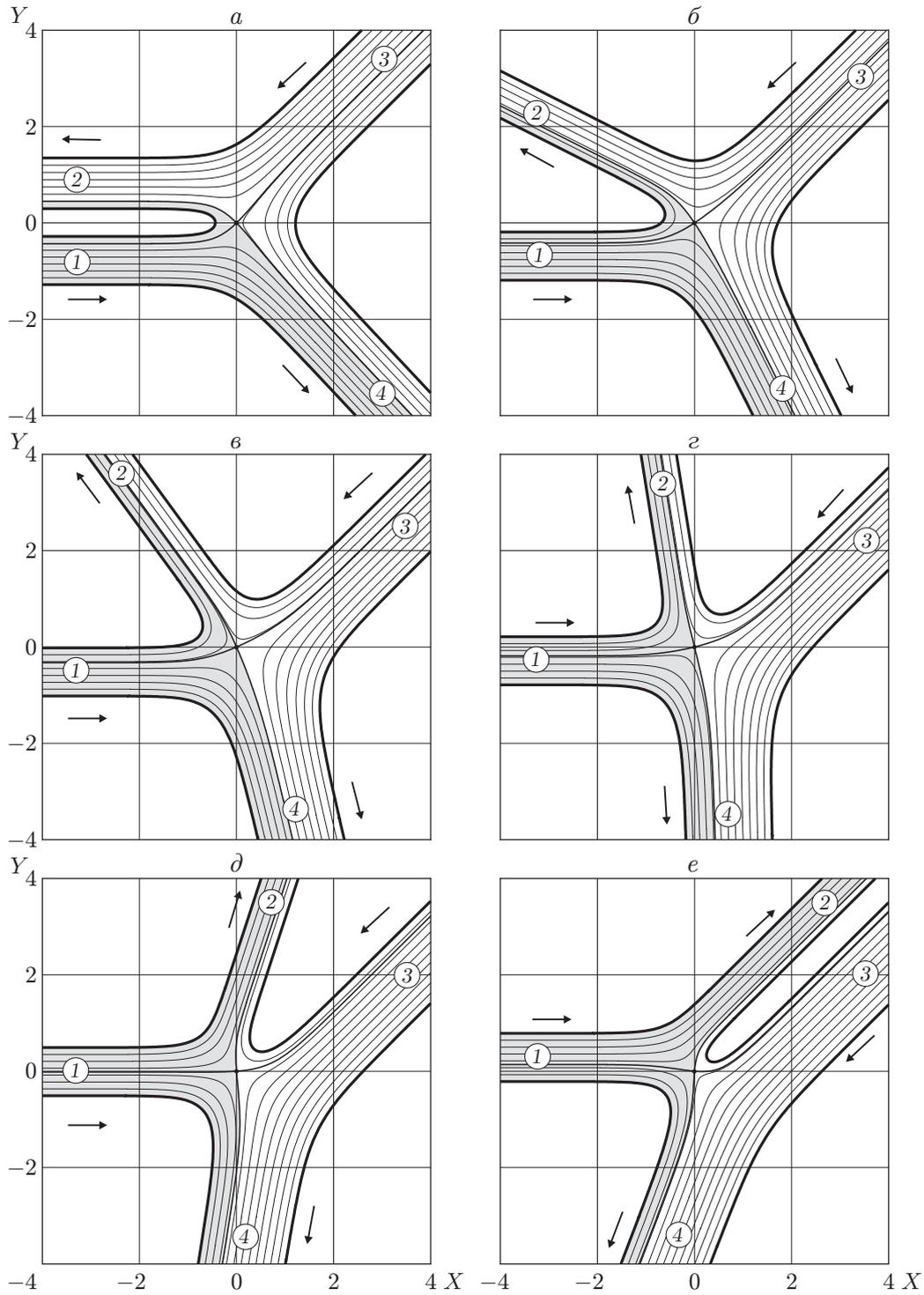


Рис. 4. Линии тока возможных струйных конфигураций при фиксированных параметрах сходящихся струй ($\theta_1 = 0$; $\theta_3 = 3\pi/4$; $h_1 = 1$; $h_3 = 1,5$) и различных параметрах расходящихся струй:

a — $\theta_2 = -\pi$, $\theta_4 = 0,2611\pi$, $h_2 = -1,0497$, $h_4 = -1,4502$; *б* — $\theta_2 = -0,85\pi$, $\theta_4 = 0,3541\pi$, $h_2 = -0,8746$, $h_4 = -1,6253$; *в* — $\theta_2 = -0,7\pi$, $\theta_4 = 0,4271\pi$, $h_2 = -0,7707$, $h_4 = -1,7292$; *г* — $\theta_2 = -0,55\pi$, $\theta_4 = 0,4905\pi$, $h_2 = -0,7237$, $h_4 = -1,7762$; *д* — $\theta_2 = -0,4\pi$, $\theta_4 = 0,5513\pi$, $h_2 = -0,7259$, $h_4 = -1,7740$; *е* — $\theta_2 = -0,25\pi$, $\theta_4 = 0,6153\pi$, $h_2 = -0,7776$, $h_4 = -1,7223$; стрелки — направления скорости струй

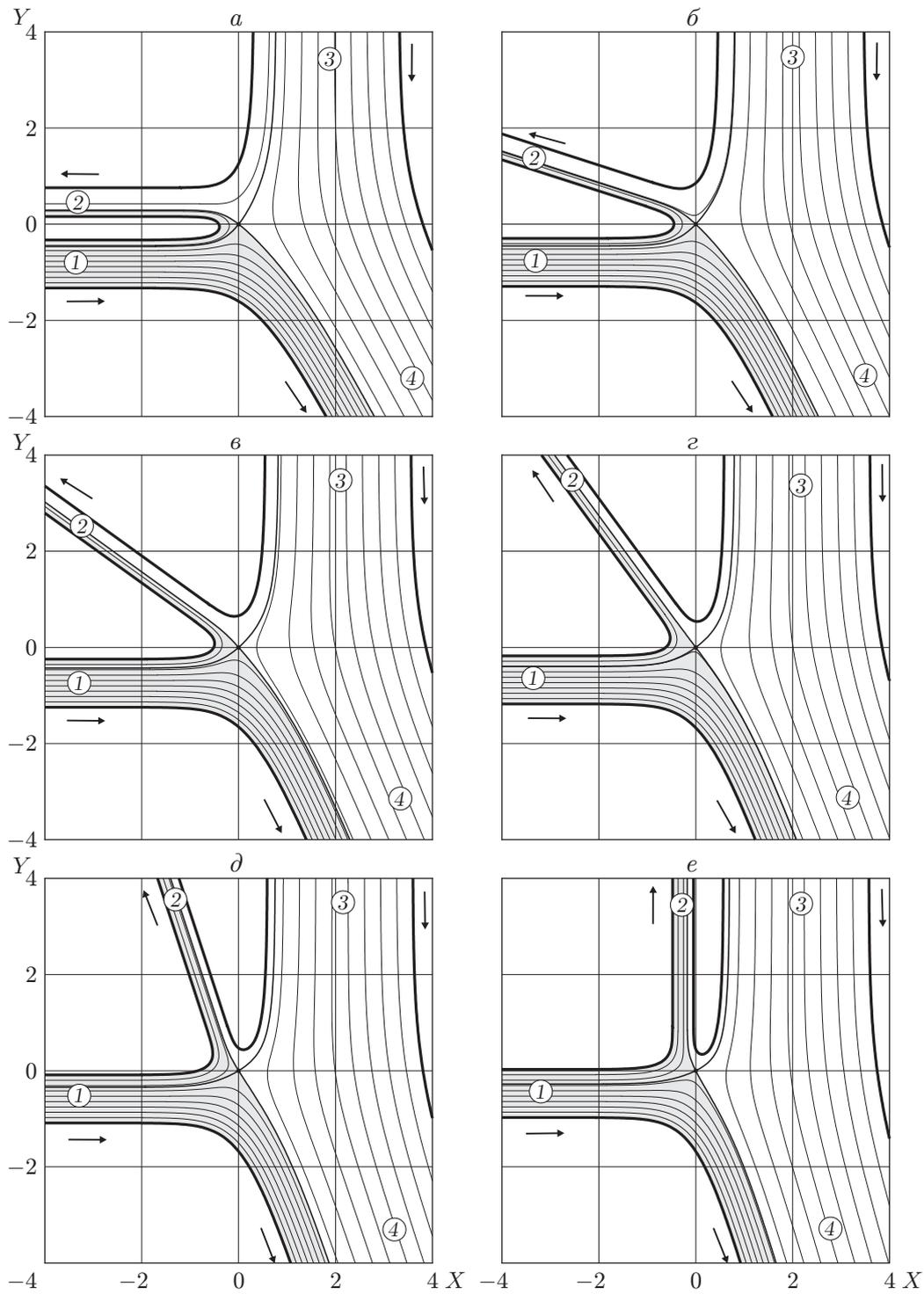


Рис. 5. Линии тока возможных струйных конфигураций при фиксированных параметрах сходящихся струй ($\theta_1 = 0; \theta_3 = \pi/2; h_1 = 1; h_3 = 3$) и различных параметрах расходящихся струй:

$a - \theta_2 = -\pi, \theta_4 = 0,3440\pi, h_2 = -0,6, h_4 = -3,4; b - \theta_2 = -0,9\pi, \theta_4 = 0,3600\pi, h_2 = -0,5103, h_4 = -3,4896; c - \theta_2 = -0,8\pi, \theta_4 = 0,3737\pi, h_2 = -0,4564, h_4 = -3,5435; d - \theta_2 = -0,7\pi, \theta_4 = 0,3860\pi, h_2 = -0,4276, h_4 = -3,5723; e - \theta_2 = -0,6\pi, \theta_4 = 0,3978\pi, h_2 = -0,4188, h_4 = -3,5811; e - \theta_2 = -\pi/2, \theta_4 = 0,4096\pi, h_2 = -0,4285, h_4 = -3,5714;$
 стрелки — направления скорости струй

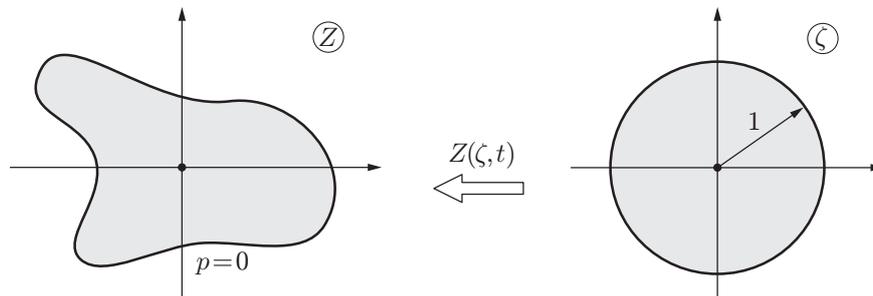


Рис. 6. Конформное отображение $Z(\zeta, t)$ круга единичного радиуса во вспомогательной плоскости ζ на переменную область в плоскости Z , занятую жидкостью, в задаче о плоском нестационарном течении

$t = 0$ область известна. Будем считать, что поле внешних сил отсутствует, поэтому последующее деформирование области имеет инерционную природу и обусловлено заданным начальным полем скоростей. Задача состоит в определении формы области и поля скоростей в последующие моменты времени $t > 0$, в случае если на границе области поддерживается постоянное давление, а поверхностное натяжение отсутствует.

Рассмотрим круг единичного радиуса $|\zeta| < 1$ во вспомогательной плоскости ζ , которая в данном случае не является плоскостью годографа. В отличие от стационарного случая (1) конформное отображение круга $|\zeta| < 1$ на область, занятую жидкостью (рис. 6), и комплексная скорость являются функциями времени:

$$Z(\zeta, t), \quad U(\zeta, t). \quad (6)$$

Следует отметить, что введение функций (6) дает ряд преимуществ по сравнению с традиционными постановками задачи, поскольку вместо краевой задачи в неизвестной области с подвижной границей в плоскости ζ получаем краевую задачу с фиксированной границей — единичной окружностью $|\zeta| = 1$. Впервые задача отыскания двух аналитических в круге $|\zeta| < 1$ функций — конформного отображения $Z(\zeta, t)$ и комплексного потенциала $\Phi(\zeta, t)$ — решалась в работах [10, 11], в которых получены два кубически нелинейных операторных уравнения. В [12] отмечено, что при использовании вместо комплексного потенциала комплексной скорости $U(\zeta, t) = \Phi_\zeta / Z_\zeta$ краевые условия и соответствующие операторные уравнения становятся квадратично-нелинейными. В работе [13] показано, что если вместо пары неизвестных функций (6) использовать другую пару $R(\zeta, t) = 1/Z_\zeta(\zeta, t)$, $U(\zeta, t)$, то соответствующие операторные уравнения, разрешенные относительно временных производных, не содержат деления и являются только кубически нелинейными. Это удобно при численном решении задачи, особенно когда оно ищется в виде рядов. В работах [14, 15] приведены примеры применения такой методики для решения задач о волнах на воде.

Первое кинематическое краевое условие означает, что проекция скорости \bar{U} частицы жидкости, расположенной на свободной границе, и проекция скорости Z_t самой границы на нормаль к свободной границе совпадают. Иными словами, вектор $Z_t - \bar{U}$ направлен по касательной к свободной поверхности. Поскольку на свободной поверхности $\zeta = e^{i\theta}$ вектор нормали равен iZ_θ , а скалярное произведение векторов Z_1, Z_2 задается формулой $\text{Re } Z_1 \bar{Z}_2$, в результате получаем кинематическое условие в виде

$$\text{Im} [Z_\theta (\bar{Z}_t - U)] = 0. \quad (7)$$

Второе динамическое краевое условие можно получить из условия ортогональности ускорения к свободной поверхности. Для удобства время в эйлеровых и лагранжевых ко-

ординатах обозначим соответственно τ , T . Тогда динамическое условие можно записать в виде

$$\operatorname{Re} Z_\theta U_T = 0. \quad (8)$$

Найдем ускорение U_T . Поскольку Z и τ являются независимыми переменными, имеем

$$Z_\tau = Z_t + Z_\zeta \zeta_\tau = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} + \zeta_\tau \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{Z_t}{Z_\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

Учитывая, кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial \tau} + Z_T \frac{\partial}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial Z}, \quad \frac{\partial}{\partial Z} = \frac{1}{Z_\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta},$$

в результате имеем формулу

$$U_T = U_t - \frac{Z_t}{Z_\zeta} U_\zeta + \frac{\bar{U}}{Z_\zeta} U_\zeta.$$

Подставляя эту формулу в (8), а затем заменяя в (7), (8) $\partial/\partial \theta$ на $i\zeta \partial/\partial \zeta$, для нахождения двух аналитических функций $Z(\zeta, t)$, $U(\zeta, t)$ получаем два граничных условия

$$\operatorname{Im} \zeta (Z_\zeta U_t - U_\zeta Z_t + U_\zeta \bar{U}) = 0, \quad \operatorname{Re} (\zeta Z_\zeta U - Z_t \bar{Z}_\zeta / \zeta) = 0, \quad |\zeta| = 1. \quad (9)$$

Обозначим через S оператор Шварца, восстанавливающий аналитическую в единичном круге функцию по значению ее действительной части на границе круга. Такая задача решается с точностью до аддитивной мнимой константы, которую выбираем таким образом, чтобы мнимая часть найденной функции в центре круга $\zeta = 0$ была равна нулю. Тогда из соотношения $f = S(g)$ следует, что, во-первых, при $|\zeta| < 1$ функция $f(\zeta)$ является аналитической, во-вторых, на границе круга $|\zeta| = 1$ выполняется условие $\operatorname{Re} f = \operatorname{Re} g$, в-третьих, в центре круга $\operatorname{Im} f(0) = 0$.

Покажем, что из условий (9) можно получить следующие операторные уравнения:

$$i\zeta (Z_\zeta U_t - U_\zeta Z_t) + G(\zeta, t) = 0, \quad G(\zeta, t) = S(i\zeta U_\zeta \bar{U}); \quad (10)$$

$$\frac{Z_t}{\zeta Z_\zeta} - \frac{A}{\zeta} + \bar{A}\zeta + iB = Q(\zeta, t), \quad Q(\zeta, t) = S\left(\frac{\bar{U}}{\zeta Z_\zeta}\right). \quad (11)$$

Первое уравнение (10) находим непосредственно из первого граничного условия (9), поскольку функция $\zeta (Z_\zeta U_t - U_\zeta Z_t)$ является аналитической. Для получения второго уравнения (11) предварительно разделим второе граничное условие (9) на $|Z_\zeta|^2$ (это можно сделать, поскольку согласно условию конформности $|Z_\zeta| \neq 0$). В результате получим краевое условие

$$\operatorname{Re} \left(\frac{Z_t}{\zeta Z_\zeta} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{U}}{\zeta Z_\zeta} \right), \quad |\zeta| = 1, \quad (12)$$

в котором функция $Z_t/(\zeta Z_\zeta)$ не является всюду аналитической, так как при $\zeta = 0$ она имеет полюс $A(t)/\zeta$, где

$$A(t) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{Z_t}{Z_\zeta}. \quad (13)$$

Если из какого-либо выражения, взятого на окружности $\zeta = e^{i\theta}$, вычесть величину $A(t)/\zeta$, а затем прибавить к нему ту же величину, но комплексно-сопряженную $\overline{A(t)}\zeta$, то реальная часть исходного выражения не изменится. Поэтому краевое условие (12) можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \left(\frac{Z_t}{\zeta Z_\zeta} - \frac{A(t)}{\zeta} + \overline{A(t)}\zeta \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{U}}{\zeta Z_\zeta} \right),$$

где левая часть является реальной частью аналитической функции. Следовательно, получаем уравнение (11), в котором функция $B(t)$ определяется из условия $\operatorname{Im} Q(0, t) = 0$.

Появление в уравнении (11) комплекснозначной функции времени $A(t)$ и вещественнозначной функции $B(t)$ — следствие того, что семейство конформных отображений заданной области на другую заданную область является трехпараметрическим. Эти функции определяются выбранной нормировкой конформного отображения. Покажем, например, что если задана нормировка

$$Z(0, t) = \operatorname{const}, \quad \arg Z_\zeta(0, t) = \operatorname{const}, \quad (14)$$

то $A = 0$, $B = 0$.

Действительно, поскольку функция $Z(\zeta, t)$ является аналитической в центре круга $\zeta = 0$, с учетом первого уравнения (14) ее можно разложить в степенной ряд

$$Z(\zeta, t) = \operatorname{const} + Z_1(t)\zeta + Z_2(t)\zeta^2 + \dots$$

Дифференцируя этот ряд по времени t и по ζ , при $\zeta \rightarrow 0$ имеем

$$Z_t/Z_\zeta = \zeta \dot{Z}_1/Z_1 + O(\zeta^2). \quad (15)$$

Подставляя выражение (15) в (13), получаем равенство $A = 0$, с учетом которого из (11) следует $B = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \operatorname{Im} Z_t/(\zeta Z_\zeta)$. Вновь подставляя в данное соотношение выражение (15),

находим $B = \operatorname{Im} \dot{Z}_1/Z_1$. Однако эта величина равна нулю, поскольку, продифференцировав по t второе условие нормировки (14), записанное в виде $\operatorname{Im} \ln Z_\zeta(0, t) = \operatorname{const}$, получаем $\operatorname{Im} Z_{\zeta t}/Z_\zeta|_{\zeta=0} = 0$, или $\operatorname{Im} \dot{Z}_1/Z_1 = 0$.

Таким образом, при нормировке (14) имеем задачу Коши

$$\begin{aligned} Z_t &= \zeta Z_\zeta S \left(\frac{\bar{U}}{\zeta Z_\zeta} \right), & Z(\zeta, 0) &= \tilde{Z}(\zeta), \\ U_t &= \zeta U_\zeta S \left(\frac{\bar{U}}{\zeta Z_\zeta} \right) + \frac{i S(i\zeta U_\zeta \bar{U})}{\zeta Z_\zeta}, & U(\zeta, 0) &= \tilde{U}(\zeta), \end{aligned} \quad (16)$$

описывающую деформацию области, занятой жидкостью и ограниченной только свободной поверхностью, в случае если в начальный момент времени известна форма области и задано начальное поле скоростей.

Следует отметить, что второе слагаемое во втором уравнении (16) не содержит особенности при $\zeta = 0$. Действительно, при $\zeta = 0$ мнимая часть $S(i\zeta U_\zeta \bar{U})$ равна нулю согласно определению оператора S , реальная часть равна нулю в силу теоремы о среднем:

$$\operatorname{Re} S(i\zeta U_\zeta \bar{U})|_{\zeta=0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} (i\zeta U_\zeta \bar{U}) d\theta = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial |U|^2}{\partial \theta} d\theta = 0.$$

Уравнения нестационарного взаимодействия струй. Рассмотрим случай нестационарного взаимодействия струй, когда на некоторую стационарную струйную конфигурацию, задаваемую формулами (1), накладывается некоторое нестационарное возмущение,

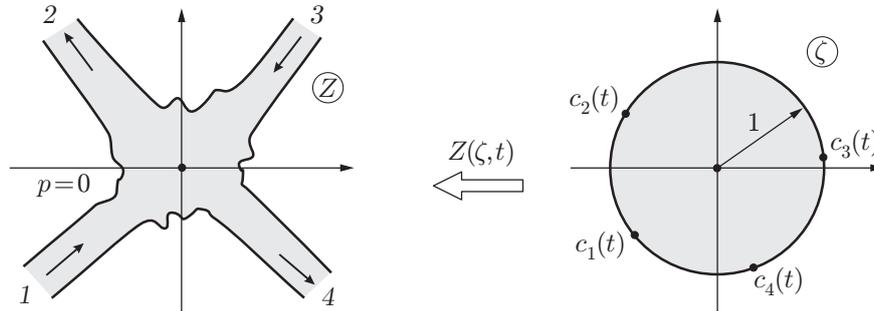


Рис. 7. Конформное отображение $Z(\zeta, t)$ круга единичного радиуса во вспомогательной плоскости ζ на область течения в плоскости Z в задаче о нестационарном соударении струй (обозначения те же, что на рис. 2)

не предполагаемое малым. Будем считать, что в начальный момент времени возмущение сосредоточено в конечной области плоскости Z (рис. 7) и не оказывает влияния на бесконечно удаленные точки.

В отличие от стационарного случая в рассматриваемом случае бесконечно удаленным точкам в плоскости Z нельзя поставить в соответствие фиксированные точки в плоскости ζ , так как конформное отображение является трехпараметрическим. Следовательно, по крайней мере, положение одной из четырех точек в плоскости ζ представляет собой функцию времени. В общем случае бесконечно удаленным точкам в плоскости Z соответствуют четыре подвижные точки $\zeta = c_j(t)$.

Ответ на вопрос о применимости уравнений (10), (11), описывающих течение, показанное на рис. 6, для описания нестационарного взаимодействия струй, представленного на рис. 7, неочевиден, поскольку на рис. 7 имеются бесконечно удаленные точки, а на рис. 6 они отсутствуют. Данное различие является существенным, так как уравнения (10), (11) получены в предположении непрерывности функций

$$Z_\zeta U_t - U_\zeta Z_t, \quad Z_t / (\zeta Z_\zeta), \quad \bar{U} / (\zeta Z_\zeta) \tag{17}$$

всюду на границе $|\zeta| = 1$. Необходимо выяснить, справедливо ли это предположение для случая нестационарного взаимодействия струй в точках $\zeta = c_j(t)$, где функция Z не ограничена. Покажем, что при некоторых допущениях о характере течения это предположение выполняется и уравнения (10), (11) пригодны для описания нестационарного взаимодействия струй.

Предположим, что в начальный момент времени на данное стационарное течение, задаваемое параметрами h_j, a_j ($j = \overline{1, 4}$), налагается возмущение, которое при $|Z| \rightarrow \infty$ стремится к нулю, и рассмотрим эволюцию этого возмущения во времени. В работе [16], в которой исследовалась устойчивость струи, вытекающей из щели, отмечается, что распространение возмущений имеет сносовой характер: возмущения в струях распространяются со скоростью самих струй и достигают бесконечности только за бесконечное время. Поэтому имеет место следующее физическое предположение.

Предположение 1. Любые возмущения в струях, первоначально сосредоточенные в конечной области плоскости Z , не могут за конечное время вызвать возмущения бесконечно удаленных точек $|Z| \rightarrow \infty$.

Таким образом, будем рассматривать нестационарные струйные течения, толщина, направление и скорость струй которых на бесконечности не меняются.

Неизменность толщины и направления струй обеспечивается представлением конформного отображения в виде

$$Z(\zeta, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^4 \frac{h_j}{a_j} \ln \left(1 - \frac{\zeta}{c_j(t)} \right) + F(\zeta, t). \quad (18)$$

Действительно, если при $\zeta = c_j(t)$ функция $F(\zeta, t)$ является аналитической, то из представления (18) следует, что на окружности $|\zeta| = 1$ при переходе через точку $\zeta = c_j(t)$ мнимая часть выражения $Z(\zeta, t)a_j$ претерпевает скачок величины h_j (это означает, что толщина j -й струи является неизменной), а действительная часть выражения (18) при $\zeta = c_j(t)$ обращается в бесконечность (это означает, что направление j -й струи является неизменным).

Если при $\zeta = c_j(t)$ функция $U(\zeta, t)$ является аналитической, то условие неизменности направления и величины скорости записывается в виде

$$U(c_j(t), t) = a_j. \quad (19)$$

В отличие от функции $U(\zeta, t)$ предельное значение функции $F(\zeta, t)$ не является фиксированным:

$$F(c_j(t), t) = f_j(t). \quad (20)$$

Неизвестные функции $f_j(t)$ находятся из решения задачи.

Таким образом, имеет место следующее математическое предположение.

Предположение 2. *Функции $U(\zeta, t)$, $F(\zeta, t)$ являются аналитическими при $\zeta = c_j(t)$.*

Поскольку при $Z \rightarrow \infty$ асимптоты свободной поверхности не меняются со временем, дополнительно должны выполняться четыре тождества

$$\lim_{\zeta \rightarrow c_n} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\pi} a_n \sum_{j \neq n} \frac{h_j}{a_j} \ln \left(1 - \frac{\zeta}{c_j(t)} \right) + a_n F(\zeta, t) \right\} = \operatorname{const} \quad (n = \overline{1, 4}). \quad (21)$$

Эти тождества являются следствием того, что расстояние от начала координат до асимптот не меняется. Ниже показано, что тождества (21) вытекают из предположения об аналитичности функций $U(\zeta, t)$, $F(\zeta, t)$.

Покажем, что в случае выполнения предположения 2 функции (17) являются ограниченными при $\zeta = c_j(t)$. Действительно, дифференцируя представление (18), получаем производные

$$\begin{aligned} Z_\zeta &= -\frac{1}{\pi} \sum \frac{h_j}{a_j c_j} \frac{1}{1 - \zeta/c_j} + F_\zeta, \\ Z_t &= -\frac{1}{\pi} \sum \frac{h_j}{a_j} \frac{\dot{c}_j}{c_j} + \frac{1}{\pi} \sum \frac{h_j}{a_j} \frac{\dot{c}_j}{c_j} \frac{1}{1 - \zeta/c_j} + F_t, \end{aligned} \quad (22)$$

имеющие полюс в точке $\zeta = c_j$. Однако функция $Z_\zeta U_t - U_\zeta Z_t$ в этой точке остается ограниченной. Действительно, используя формулы (22), получаем, что для данной функции коэффициент при $1/(1 - \zeta/c_j)$ равен $-\frac{1}{\pi} \frac{h_j}{a_j c_j} \lim_{\zeta \rightarrow c_j} (U_\zeta \dot{c}_j + U_t)$. Покажем, что этот коэффициент равен нулю. Действительно, из аналитичности функции $U(\zeta, t)$ при $\zeta = c_j$ и из формулы (19) следует, что эта функция раскладывается в ряд

$$U = a_j + u_1(\zeta - c_j) + u_2(\zeta - c_j)^2 + \dots$$

Комбинируя производные этого ряда по t и ζ

$$\begin{aligned} U_t &= \dot{u}_1(\zeta - c_j) + u_1(-\dot{c}_j) + 2u_2(\zeta - c_j)(-\dot{c}_j) + \dots, \\ U_\zeta &= u_1 + 2u_2(\zeta - c_j) + \dots, \end{aligned}$$

находим, что в точке $\zeta = c_j$ величина $U_t + U_\zeta \dot{c}_j$ имеет нуль первого порядка:

$$U_t + U_\zeta \dot{c}_j = \dot{u}_1(\zeta - c_j) + \dots$$

Вторая и третья в (17) функции $Z_t/(\zeta Z_\zeta)$ и $\bar{U}/(\zeta Z_\zeta)$ также являются ограниченными в точке $\zeta = c_j$, поскольку непосредственно из формул (22) следует

$$\lim_{\zeta \rightarrow c_j} \frac{Z_t}{\zeta Z_\zeta} = -\frac{\dot{c}_j}{c_j}, \quad \lim_{\zeta \rightarrow c_j} \frac{\bar{U}}{\zeta Z_\zeta} = 0.$$

Таким образом, если при $\zeta = c_j(t)$ функции $F(\zeta, t)$, $U(\zeta, t)$ являются аналитическими, то для такого класса течений справедлива система уравнений (10), (11).

Уравнения без особенностей. Система (10), (11) неудобна для анализа и численного решения задачи, поскольку функция $Z(\zeta, t)$ и ее производные имеют особенности. Выделив эти особенности, получим новые уравнения для шести неизвестных функций $c_j(t)$, $F(\zeta, t)$, $U(\zeta, t)$. Подставляя производные (22) во второе уравнение (11), имеем

$$\begin{aligned} \left(F_t - \frac{1}{\pi} \sum \frac{h_j}{a_j} \frac{\dot{c}_j}{c_j} + \frac{1}{\pi} \sum \frac{h_j}{a_j} \frac{\dot{c}_j}{c_j} \frac{1}{1 - \zeta/c_j} \right) / \left(\zeta F_\zeta - \frac{1}{\pi} \sum \frac{h_j}{a_j} \frac{1}{1 - \zeta/c_j} \right) = \\ = Q(\zeta, t) + \frac{A}{\zeta} - \bar{A}\zeta - iB. \end{aligned} \quad (23)$$

Переходя в (23) к пределу $\zeta \rightarrow c_j$, находим первые четыре уравнения для функций $c_j(t)$:

$$\dot{c}_j/c_j + A/c_j - \bar{A}c_j - iB = -Q_j. \quad (24)$$

Здесь $Q_j = Q(c_j(t), t)$. Подставляя в (23) \dot{c}_j из (24), получаем пятое уравнение

$$F_t = -\frac{A}{\pi} \sum \frac{h_j}{a_j c_j} - \frac{1}{\pi} \sum \frac{h_j}{a_j} Q_j + \zeta F_\zeta \left(\frac{A}{\zeta} - \bar{A}\zeta - iB \right) + \zeta F_\zeta Q + \frac{1}{\pi} \sum \frac{h_j}{a_j} \frac{Q_j - Q}{1 - \zeta/c_j}. \quad (25)$$

Шестое уравнение получаем из соотношений (10):

$$U_t = \left\{ iS(\text{Re } i\zeta U_\zeta \bar{U}) + \zeta U_\zeta \left[F_t + \frac{\zeta}{\pi} \sum \frac{h_j}{a_j c_j^2} \frac{\dot{c}_j}{1 - \zeta/c_j} \right] \right\} / \left(\zeta F_\zeta - \frac{1}{\pi} \sum \frac{h_j}{a_j} \frac{1}{1 - \zeta/c_j} \right). \quad (26)$$

В (26) необходимо подставить производные по времени \dot{c}_j , F_t из выражений (24), (25).

Таким образом, если заданы начальные условия

$$U(\zeta, 0) = \tilde{U}(\zeta), \quad F(\zeta, 0) = \tilde{F}(\zeta), \quad c_j(0) = \tilde{c}_j, \quad (27)$$

то эволюцию возмущений, распространяющихся по струям, описывает задача Коши (24)–(27) для системы шести уравнений, разрешенных относительно производных по времени \dot{c}_j , F_t , U_t . При этом начальные условия $\tilde{U}(\zeta)$, $\tilde{F}(\zeta)$ должны быть аналитическими при $\zeta = \tilde{c}_j$. Кроме того, из (19) следует, что на функцию $\tilde{U}(\zeta)$ дополнительно должно налагаться условие $\tilde{U}(\tilde{c}_j) = a_j$. На функцию $\tilde{F}(\zeta)$ дополнительных условий налагать не требуется.

Заметим, что последнее слагаемое в уравнении (25) не имеет полюсов. Если в этом слагаемом перейти к пределу $\zeta \rightarrow c_j$, то множитель $(Q_j - Q)/(c_j - \zeta)$ перейдет в производную Q_ζ . Осуществим этот предельный переход другим способом. Сначала вычислим производную по ζ от соотношения (23):

$$\left\{ \left(F_{\zeta t} + \frac{1}{\pi} \sum \frac{h_j \dot{c}_j}{a_j c_j^2} \frac{1}{(1 - \zeta/c_j)^2} \right) \left(\zeta F_{\zeta} - \frac{1}{\pi} \sum \frac{h_j}{a_j} \frac{1}{1 - \zeta/c_j} \right) - \right. \\ \left. - \left[F_t - \frac{1}{\pi} \sum \frac{h_j \dot{c}_j}{a_j c_j} \left(1 - \frac{1}{1 - \zeta/c_j} \right) \right] \left((\zeta F_{\zeta})_{\zeta} - \frac{1}{\pi} \sum \frac{h_j}{a_j c_j} \frac{1}{(1 - \zeta/c_j)^2} \right) \right\} / \\ / \left(\zeta F_{\zeta} - \frac{1}{\pi} \sum \frac{h_j}{a_j} \frac{1}{1 - \zeta/c_j} \right)^2 + \frac{A}{\zeta^2} + \bar{A} = Q_{\zeta}, \quad (28)$$

а затем рассмотрим предел $\zeta \rightarrow c_n$. Члены, содержащиеся в числителе дроби (28) множитель $1/(1 - \zeta/c_n)^3$, сокращаются, поэтому старшими являются слагаемые с множителем $1/(1 - \zeta/c_n)^2$. Собирая эти слагаемые в числителе и знаменателе, получаем

$$\lim_{\zeta \rightarrow c_n} \left[\frac{h_n \dot{c}_n}{\pi a_n c_n^2} \left(\zeta F_{\zeta} - \frac{1}{\pi} \sum_{j \neq n} \frac{h_j}{a_j} \frac{1}{1 - \zeta/c_j} \right) + \right. \\ \left. + \frac{h_n}{\pi a_n c_n} \left(F_t - \frac{1}{\pi} \sum \frac{h_j \dot{c}_j}{a_j c_j} + \frac{1}{\pi} \sum_{j \neq n} \frac{h_j \dot{c}_j}{a_j c_j} \frac{1}{1 - \zeta/c_j} \right) \right] / \left(\frac{h_n^2}{\pi^2 a_n^2} \right) + \\ + \frac{A}{c_n^2} + \bar{A} = \lim_{\zeta \rightarrow c_n} Q_{\zeta}. \quad (29)$$

Используя формулу

$$\dot{f}_n = \lim_{\zeta \rightarrow c_n} (F_t + F_{\zeta} \dot{c}_n),$$

полученную в результате дифференцирования по t выражения (20), преобразовывая суммы в (29) по правилу

$$\frac{1}{\pi} \sum_{j \neq n} \frac{h_j}{a_j} \frac{\dot{c}_j/c_j - \dot{c}_n/c_n}{1 - c_n/c_j} = \frac{1}{\pi} \sum_{j \neq n} \frac{h_j}{a_j} \frac{\dot{c}_j - \dot{c}_n}{c_j - c_n} - \frac{1}{\pi} \frac{\dot{c}_n}{c_n} \sum_{j \neq n} \frac{h_j}{a_j} \quad (30)$$

и учитывая, что согласно (4) последняя сумма в выражении (30) равна $-h_n/a_n$, находим

$$\frac{d}{dt} \lim_{\zeta \rightarrow c_n(t)} \left[\frac{1}{\pi} a_n \sum_{j \neq n} \frac{h_j}{a_j} \ln \left(1 - \frac{\zeta}{c_j(t)} \right) + a_n F(\zeta, t) \right] = \\ = -\frac{h_n}{\pi} \left(\frac{A}{c_n} + \bar{A} c_n \right) + \frac{h_n}{\pi} c_n Q_{\zeta}(c_n, t). \quad (31)$$

Взяв в (31) мнимую часть, получим тождество (21), так как мнимая часть первого слагаемого в правой части (31) равна нулю, а равенство нулю мнимой части второго слагаемого следует из определения функции Q и равенств

$$\operatorname{Im} c_n Q_{\zeta}(c_n, t) = \lim_{\zeta \rightarrow c_n} \operatorname{Im} \zeta Q_{\zeta} = - \lim_{\zeta \rightarrow c_n} \operatorname{Re} Q_{\theta} = \\ = - \lim_{\zeta \rightarrow c_n} \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{U}}{\zeta Z_{\zeta}} \right)_{\theta} = \lim_{\zeta \rightarrow c_n} \operatorname{Im} i \zeta \left(\frac{\bar{U}}{\zeta Z_{\zeta}} \right)_{\zeta} = 0.$$

Равенство нулю последнего предела следует из ограниченности функции U и из представления (18).

Из вида операторной системы (24)–(26) следует, что в случае если функции $F(\zeta, t)$, $U(\zeta, t)$ являются аналитическими в точках $\zeta = c_j$, производные по времени $F_t(\zeta, t)$, $U_t(\zeta, t)$ также являются аналитическими в этих точках. Это позволяет предположить, что рассматриваемый класс течений существует. Иными словами, если начальные условия (27)

аналитичны при $\zeta = c_j$, то функции $F(\zeta, t)$, $U(\zeta, t)$ обладают этим свойством и в последующие моменты времени.

Следует отметить, что при рассмотрении аналитических функций при $\zeta = c_j$ задача упрощалась и класс решений сужался. Однако можно ослабить предположение 2 и заменить аналитичность на ограниченность. Иначе говоря, в предположении, что при $\zeta = c_j$ функции $F(\zeta, t)$, $U(\zeta, t)$ и их первые производные являются ограниченными, уравнения (10), (11) по-прежнему применимы для этого класса решений. Более того, из (21) следует, что ограниченной должна быть только мнимая часть выражения $a_j F(\zeta, t)$, реальная часть может неограниченно возрастать. В случае если это возрастание происходит не слишком быстро, возмущения на бесконечности по-прежнему убывают, но с меньшей, чем в случае аналитичности или ограниченности, скоростью, и уравнения (10), (11) здесь также применимы.

Линеаризация. Найдем решение системы (24)–(26), незначительно отличающееся от стационарного решения (1):

$$\begin{aligned} U(\zeta, t; \varepsilon) &= U^{(0)}(\zeta) + \varepsilon U^{(1)}(\zeta, t) + \dots, & F(\zeta, t; \varepsilon) &= F^{(0)}(\zeta) + \varepsilon F^{(1)}(\zeta, t) + \dots, \\ c_j(t; \varepsilon) &= c_j^{(0)} + \varepsilon c_j^{(1)}(t) + \dots \quad (j = \overline{1, 4}) \end{aligned} \quad (32)$$

(ε — формальный малый параметр). Нулевое приближение соответствует стационарному струйному течению, поэтому согласно выражениям (1) имеем

$$U^{(0)}(\zeta) = \zeta, \quad F^{(0)}(\zeta) = 0, \quad c_j^{(0)} = a_j.$$

Первое приближение соответствует некоторым малым возмущениям, распространяющимся по стационарным струям.

Подставляя разложения (32) в уравнения (24)–(26) и приравнивая члены при первой степени малого параметра ε , получаем уравнения для первой поправки к стационарному решению $c_j^{(1)}$, $F^{(1)}$, $U^{(1)}$, которые будут менее громоздкими, если вместо двух последних рядов (32) использовать один ряд

$$Z(\zeta, t; \varepsilon) = Z^{(0)}(\zeta) + \varepsilon Z^{(1)}(\zeta, t) + \dots, \quad (33)$$

а вместо формул (24)–(26) — уравнения (10), (11).

Из соотношений (1) находим нулевое приближение и его производную

$$Z^{(0)} = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^4 \frac{h_j}{a_j} \ln \left(1 - \frac{\zeta}{a_j} \right), \quad Z_{\zeta}^{(0)} = -\frac{1}{\pi} \sum \frac{h_j}{a_j^2} \frac{1}{1 - \zeta/a_j}. \quad (34)$$

Функция $Z_{\zeta}^{(0)}$ и функция $R^{(0)}(\zeta) = 1/Z_{\zeta}^{(0)}$ обладают рядом важных свойств, с использованием которых решаются краевые задачи, рассматриваемые ниже.

Кроме рядов (32), (33) удобно также использовать вспомогательные ряды для функций, входящих в уравнения (10), (11):

$$\begin{aligned} G(\zeta, t; \varepsilon) &= G^{(0)}(\zeta) + \varepsilon G^{(1)}(\zeta, t) + \dots, & Q(\zeta, t; \varepsilon) &= Q^{(0)}(\zeta) + \varepsilon Q^{(1)}(\zeta, t) + \dots, \\ A(t; \varepsilon) &= A^{(0)} + \varepsilon A^{(1)}(t) + \dots, & B(t; \varepsilon) &= B^{(0)} + \varepsilon B^{(1)}(t) + \dots \end{aligned}$$

Покажем, что стационарное решение (нулевое приближение) действительно является решением уравнений (10), (11). Переходя в (10), (11) к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$G^{(0)} = 0, \quad -A^{(0)}/\zeta + \overline{A^{(0)}}\zeta + iB^{(0)} = Q^{(0)}, \quad (35)$$

где

$$G^{(0)}(\zeta, t) = S(i\zeta\bar{\zeta}), \quad Q^{(0)}(\zeta, t) = S\left(\frac{\bar{\zeta}}{\zeta Z_\zeta^{(0)}}\right). \quad (36)$$

Уравнения (35) справедливы, поскольку, во-первых, для стационарных течений всегда выполняется условие (14) и, следовательно $A^{(0)} = 0$, $B^{(0)} = 0$; во-вторых, обе функции (36) тождественно равны нулю. Для первой функции это очевидно, так как на единичной окружности $\bar{\zeta} = 1/\zeta$. Равенство нулю второй функции вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. При $|\zeta| = 1$ имеет место тождество

$$\overline{\zeta^2 Z_\zeta^{(0)}} = -\zeta^2 Z_\zeta^{(0)}. \quad (37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим производную $Z_\zeta^{(0)}$ в (34) на ζ^2 . Затем выполним комплексное сопряжение, т. е. заменим величины $\bar{\zeta}$, \bar{a}_j на $1/\zeta$, $1/a_j$ соответственно. В результате на единичной окружности выполняются равенства

$$-\zeta^2 Z_\zeta^{(0)} = \frac{1}{\pi} \sum \frac{h_j}{a_j^2} \frac{\zeta^2}{1 - \zeta/a_j}, \quad \overline{\zeta^2 Z_\zeta^{(0)}} = \frac{1}{\pi} \sum \frac{h_j a_j}{\zeta} \frac{1}{1 - \zeta/a_j}. \quad (38)$$

Используя тождества (2)–(4), докажем, что выражения (38) равны. Последовательно понижая степень ζ в первом выражении (38), получаем соотношение

$$\begin{aligned} -\zeta^2 Z_\zeta^{(0)} &= \frac{\zeta}{\pi} \sum \frac{h_j}{a_j} \frac{\zeta/a_j - 1 + 1}{1 - \zeta/a_j} = \frac{\zeta}{\pi} \sum \frac{h_j}{a_j} \frac{1}{1 - \zeta/a_j} = \frac{1}{\pi} \sum h_j \frac{\zeta/a_j - 1 + 1}{1 - \zeta/a_j} = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum h_j \frac{1}{1 - \zeta/a_j} = \frac{1}{\pi} \sum \frac{h_j a_j}{\zeta} \frac{\zeta/a_j - 1 + 1}{1 - \zeta/a_j} = \frac{1}{\pi} \sum \frac{h_j a_j}{\zeta} \frac{1}{1 - \zeta/a_j}, \end{aligned}$$

которое совпадает со вторым выражением в (38). Лемма 1 доказана.

Еще одно неочевидное свойство функции $Z_\zeta^{(0)}$ сформулировано в следующей лемме.

Лемма 2. Функция $R^{(0)}(\zeta) = 1/Z_\zeta^{(0)}$ является многочленом четвертой степени от ζ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем сумму во второй формуле (34) к общему знаменателю. В результате в числителе получаем выражение

$$\sum_{j=1}^4 h_j \prod_{k \neq j} a_k^2 \left(1 - \frac{\zeta}{a_k}\right). \quad (39)$$

Докажем, что многочлен третьей степени (39) является константой, т. е. коэффициенты многочлена при всех степенях ζ , кроме нулевой, равны нулю.

В качестве примера рассмотрим коэффициент при ζ^1 :

$$\begin{aligned} -a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 \left[\frac{1}{a_1 a_4} \left(\frac{h_1}{a_1} + \frac{h_4}{a_4}\right) + \frac{1}{a_1 a_3} \left(\frac{h_1}{a_1} + \frac{h_3}{a_3}\right) + \frac{1}{a_1 a_2} \left(\frac{h_1}{a_1} + \frac{h_2}{a_2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{a_2 a_4} \left(\frac{h_2}{a_2} + \frac{h_4}{a_4}\right) + \frac{1}{a_2 a_3} \left(\frac{h_2}{a_2} + \frac{h_3}{a_3}\right) + \frac{1}{a_3 a_4} \left(\frac{h_3}{a_3} + \frac{h_4}{a_4}\right) \right]. \end{aligned}$$

Используя (4), каждые два слагаемых, стоящие в круглых скобках, заменим на два других. В результате имеем

$$a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 \left[\frac{1}{a_1 a_4} \left(\frac{h_2}{a_2} + \frac{h_3}{a_3} \right) + \frac{1}{a_1 a_3} \left(\frac{h_2}{a_2} + \frac{h_4}{a_4} \right) + \frac{1}{a_1 a_2} \left(\frac{h_3}{a_3} + \frac{h_4}{a_4} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{a_2 a_4} \left(\frac{h_1}{a_1} + \frac{h_3}{a_3} \right) + \frac{1}{a_2 a_3} \left(\frac{h_1}{a_1} + \frac{h_4}{a_4} \right) + \frac{1}{a_3 a_4} \left(\frac{h_1}{a_1} + \frac{h_2}{a_2} \right) \right].$$

После некоторой перегруппировки получаем

$$a_1 a_2 a_3 a_4 [a_1(h_2 + h_3 + h_4) + a_2(h_1 + h_3 + h_4) + a_3(h_1 + h_2 + h_4) + a_4(h_1 + h_2 + h_3)].$$

Упрощая с использованием формулы (2) каждую сумму в круглых скобках, находим

$$-a_1 a_2 a_3 a_4 (a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 + a_4 h_4). \quad (40)$$

Согласно (3) уравнение (40) равно нулю. Аналогично доказывается, что коэффициенты при остальных степенях ζ также равны нулю. Таким образом,

$$R^{(0)} = \frac{1}{Z_\zeta^{(0)}} = -\frac{1}{M_2} \left(1 - \frac{\zeta}{a_1}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{a_2}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{a_3}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{a_4}\right),$$

где M_2 — константа, определенная с помощью формулы (5). Лемма 2 доказана.

Первое приближение. Найдем уравнения для первого приближения. Заметим, что в отличие от $F^{(1)}$ первое приближение $Z^{(1)}$ не является аналитической функцией в точках $\zeta = a_j$. Действительно, дифференцирование (18) по ε показывает, что в этих точках функция $Z^{(1)}$ имеет полюсы

$$Z^{(1)} = \frac{1}{\pi} \sum \frac{h_j}{a_j^3} \frac{\zeta c_j^{(1)}}{1 - \zeta/a_j} + F^{(1)}.$$

Дифференцируя первое и второе уравнения в (10) по ε и переходя затем к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$, находим

$$i\zeta(Z_\zeta^{(0)} U_t^{(1)} - Z_t^{(1)}) + G^{(1)} = 0,$$

где

$$G^{(1)} = S(i\zeta U_\zeta^{(1)} \overline{U^{(0)}}) + S(i\zeta U_\zeta^{(0)} \overline{U^{(1)}}) = S(iU_\zeta^{(1)}) + S(i\zeta \overline{U^{(1)}}). \quad (41)$$

Для того чтобы найти операторы Шварца в (41), используем разложение в ряд Тейлора для комплексной скорости

$$U^{(1)}(\zeta, t) = u_0 + u_1 \zeta + u_2 \zeta^2 + \dots$$

Функция $iU_\zeta^{(1)}$ является аналитической, однако при $\zeta = 0$ ее мнимая часть не равна нулю.

Поэтому первый оператор Шварца в (41) равен $iU_\zeta^{(1)} - i \operatorname{Re} u_1$. Второй оператор Шварца в (41) находим из формул

$$S(i\zeta \overline{U^{(1)}}) = -S\left(\frac{iU^{(1)}}{\zeta}\right) = -S\left(i \frac{U^{(1)} - u_0}{\zeta} + \frac{i\overline{u_0}}{\zeta}\right) = \\ = -S\left(\frac{iU^{(1)}}{\zeta} - \frac{i u_0}{\zeta} - i\overline{u_0} \zeta\right) = -\frac{iU^{(1)}}{\zeta} + \frac{i u_0}{\zeta} + i\overline{u_0} \zeta + iC.$$

Здесь вещественная константа C определяется из условия равенства нулю при $\zeta = 0$ мнимой части оператора S :

$$C = -\lim_{\zeta \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left(-\frac{U^{(1)}}{\zeta} + \frac{u_0}{\zeta} + \overline{u_0} \zeta \right) = \operatorname{Re} u_1.$$

Таким образом, имеем

$$G^{(1)} = iU_{\zeta}^{(1)} - i(U^{(1)} - u_0)/\zeta + i\overline{u_0} \zeta.$$

Аналогично, дифференцируя уравнение (11) по ε и переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\frac{Z_t^{(1)}}{\zeta Z_{\zeta}^{(0)}} - \frac{A^{(1)}}{\zeta} + \overline{A^{(1)}} \zeta + iB^{(1)} = Q^{(1)}, \quad Q^{(1)} = S\left(\frac{\overline{U^{(1)}}}{\zeta Z_{\zeta}^{(0)}}\right) - S\left(\frac{Z_{\zeta}^{(1)}}{\zeta^2 (Z_{\zeta}^{(0)})^2}\right). \quad (42)$$

В (42) используется произвольная нормировка конформного отображения. Если использовать нормировку (14), то $A^{(1)} = 0$, $B^{(1)} = 0$.

Найдем первый оператор Шварца в выражении для $Q^{(1)}$. Согласно условию конформности $Z_{\zeta}^{(0)} \neq 0$, поэтому существует следующий степенной ряд:

$$U^{(1)}/Z_{\zeta}^{(0)} = b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + b_3\zeta^3 + \dots \quad (43)$$

Используя ряд (43), а также равенство (37), записанное в виде $\overline{\zeta Z_{\zeta}^{(0)}} = -\zeta^3 Z_{\zeta}^{(0)}$, получаем

$$\begin{aligned} S\left(\frac{\overline{U^{(1)}}}{\zeta Z_{\zeta}^{(0)}}\right) &= S\left(\frac{U^{(1)}}{\zeta Z_{\zeta}^{(0)}}\right) = -S\left(\frac{U^{(1)}}{\zeta^3 Z_{\zeta}^{(0)}}\right) = \\ &= -S\left(\frac{U^{(1)}/Z_{\zeta}^{(0)} - b_0 - b_1\zeta - b_2\zeta^2}{\zeta^3} + \overline{b_0} \zeta^3 + \overline{b_1} \zeta^2 + \overline{b_2} \zeta\right) = \\ &= -\frac{U^{(1)}}{\zeta^3 Z_{\zeta}^{(0)}} + \frac{b_0}{\zeta^3} + \frac{b_1}{\zeta^2} + \frac{b_2}{\zeta} - \overline{b_0} \zeta^3 - \overline{b_1} \zeta^2 - \overline{b_2} \zeta + iC_1. \end{aligned} \quad (44)$$

Переходя в выражении (44) к пределу $\zeta \rightarrow 0$, находим

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} S\left(\frac{\overline{U^{(1)}}}{\zeta Z_{\zeta}^{(0)}}\right) = -b_3 + iC_1.$$

Согласно определению оператора S мнимая часть этой величины должна быть равна нулю, поэтому $C_1 = \operatorname{Im} b_3$. Таким образом, первый оператор Шварца в (42) найден.

Найдем второй оператор Шварца в (42). Рассматривая ряд

$$Z_{\zeta}^{(1)}/(Z_{\zeta}^{(0)})^2 = d_0 + d_1\zeta + d_2\zeta^2 + \dots, \quad (45)$$

аналогично находим

$$\begin{aligned} S\left(\frac{Z_{\zeta}^{(1)}}{\zeta^2 (Z_{\zeta}^{(0)})^2}\right) &= S\left(\frac{Z_{\zeta}^{(1)}/(Z_{\zeta}^{(0)})^2 - d_0 - d_1\zeta}{\zeta^2} + \overline{d_0} \zeta^2 + \overline{d_1} \zeta\right) = \\ &= \frac{Z_{\zeta}^{(1)}}{\zeta^2 (Z_{\zeta}^{(0)})^2} - \frac{d_0}{\zeta^2} - \frac{d_1}{\zeta} + \overline{d_0} \zeta^2 + \overline{d_1} \zeta + iC_2. \end{aligned} \quad (46)$$

Величина (46) при $\zeta \rightarrow 0$ равна $d_2 + iC_2$, поэтому $C_2 = -\text{Im } d_2$. Отсюда следует

$$Q^{(1)} = -\frac{U^{(1)}}{\zeta^3 Z_\zeta^{(0)}} - \frac{Z_\zeta^{(1)}}{\zeta^2 (Z_\zeta^{(0)})^2} + \frac{b_0}{\zeta^3} + \frac{b_1}{\zeta^2} + \frac{b_2}{\zeta} - \bar{b}_0 \zeta^3 - \bar{b}_1 \zeta^2 - \bar{b}_2 \zeta + \frac{d_0}{\zeta^2} + \frac{d_1}{\zeta} - \bar{d}_0 \zeta^2 - \bar{d}_1 \zeta + i \text{Im} (b_3 + d_2).$$

Обозначив коэффициенты при степени ζ^{j-3} через $q_j(t)$, получаем систему уравнений, описывающую эволюцию малых возмущений, распространяющихся на стационарном решении:

$$-\zeta Z_t^{(1)} + U_\zeta^{(1)} - \frac{U^{(1)}}{\zeta} + U_t^{(1)} \zeta Z_\zeta^{(0)} = -\frac{u_0}{\zeta} - \bar{u}_0 \zeta, \tag{47}$$

$$Z_t^{(1)} \zeta Z_\zeta^{(0)} + Z_\zeta^{(1)} + U^{(1)} \frac{Z_\zeta^{(0)}}{\zeta} = \zeta^2 (Z_\zeta^{(0)})^2 \left(\frac{q_0}{\zeta^3} + \frac{q_1}{\zeta^2} + \frac{q_2}{\zeta} + q_3 - \bar{q}_0 \zeta^3 - \bar{q}_1 \zeta^2 - \bar{q}_2 \zeta - \bar{q}_3 \right).$$

Правые части системы (47), имеющей нестандартный вид, содержат функции времени $u_0(t)$, $q_j(t)$, которые выражаются через значения неизвестных функций $Z^{(1)}(\zeta, t)$, $U^{(1)}(\zeta, t)$ и их производных при $\zeta = 0$:

$$u_0 = U^{(1)}(0, t), \quad q_0 = b_0, \quad q_1 = b_1 + d_0,$$

$$q_2 = b_2 + d_1 + A^{(1)}, \quad q_3 = (b_3 + d_2 - iB^{(1)})/2.$$

Более детальные выражения для $q_j(t)$ можно найти из анализа рядов (43), (45).

Заключение. Выведены и проанализированы уравнения, описывающие эволюцию возмущений, распространяющихся по соударяющимся струям. Получены нелинейные уравнения, которые описывают эволюцию струй, в случае когда возмущения не предполагаются малыми, и которые можно использовать для численного решения задачи. Линеаризация этих уравнений приводит к нестандартным уравнениям, которые в работе [17] названы нагруженными, поскольку их правые части содержат решение и его производные, взятые в начале координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Милн-Томсон Л. М.** Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964.
2. **Cowan G. R., Bergman O. R., Holtzman A. H.** Mechanism of bond zone wave formation in explosion-clad metals // Metallurg. Mater. Transact. 1971. V. 2, N 11. P. 3145–3155.
3. **Дерибас А. А.** Физика упрочнения и сварки взрывом. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.
4. **Волнообразование** при косых соударениях: Сб. ст. Новосибирск: Ин-т дискретной математики и информатики, 2000.
5. **Fox J. L., Morgan G. W.** On the stability of some flows of an ideal fluid with free surfaces // Quart. Appl. Math. 1954. V. 11, N 4. P. 439–456.
6. **Palatini A.** Sulla confluenza di due vene // Atti del R. Inst. Veneto di Sc. L. ed Arti. 1916. T. 75.
7. **Кинеловский С. А.** Концепция упругих-неупругих взаимодействий струйных потоков и соударение струй идеальной несжимаемой жидкости // Физика горения и взрыва. 1994. Т. 30, № 3. С. 75–86.

8. **Тришин Ю. А.** Несимметричное соударение струй идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1986. № 5. С. 40–44.
9. **Hureau J., Weber R.** Impinging free jets of ideal fluid // J. Fluid Mech. 1998. V. 372. P. 357–374.
10. **Овсянников Л. В.** Плоская задача о неустановившемся движении жидкости со свободными границами // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1971. Вып. 8. С. 22–26.
11. **Дородницын А. А.** Плоская задача неустановившихся движений тяжелой жидкости // Тр. междунар. симп. “Приложения теории функций в механике сплошных сред”. М.: Наука, 1965. Т. 2. С. 171–172.
12. **Карабут Е. А.** Применение степенных рядов по времени в задаче о движении цилиндрической полости в жидкости. 1. Нахождение коэффициентов степенных рядов // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1986. Вып. 78. С. 56–73.
13. **Дьяченко А. И.** О динамике идеальной жидкости со свободной поверхностью // Докл. АН. 2001. Т. 376, № 1. С. 27–29.
14. **Zakharov V. E., Dyachenko A. I., Vasilyev O. A.** New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // Europ. J. Mech. B. 2002. V. 21. P. 283–291.
15. **Шамин Р. В.** Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. М.: Наука, 2008.
16. **Козин Н. С.** Малые возмущения струи, вытекающей из щели // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, вып. 4. С. 641–646.
17. **Бондарев Э. А., Воеводин А. Ф.** Разностный метод решения начально-краевых задач для нагруженных дифференциальных и интегродифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 11. С. 1560–1562.

*Поступила в редакцию 11/VI 2008 г.,
в окончательном варианте — 22/I 2009 г.*
