

УДК 517.944+533

ТЕЧЕНИЯ ГАЗА СО СПИРАЛЬНЫМИ И ВИНТОВЫМИ ЛИНИЯМИ УРОВНЯ

С. В. Хабиров

Институт механики Уфимского научного центра РАН, 450000 Уфа

Рассматривается инвариантная подмодель ранга 1, описывающая течения со спиральными и винтовыми линиями уровня. Показано, что в случае спиральных линий уровня существует гладкое течение газа в скрученном сопле Лавала. В случае винтовых линий уровня два течения сопрягаются через винтовую поверхность ударной волны.

Введение. Инвариантные решения уравнений газовой динамики рассматриваются в рамках программы ПОДМОДЕЛИ [1]. К настоящему времени проведена классификация подмоделей, выявлены общие свойства и изучены индивидуальные свойства некоторых подмоделей [2, 3]. Инвариантное решение ранга 1 определяется трехмерной подалгеброй, допускаемой уравнениями газовой динамики. Охарактеризуем множество таких решений в целом. Имеется 37 подалгебр для общего уравнения состояния, порождающих инвариантные подмодели ранга 1. Инвариантные подмодели есть системы обыкновенных дифференциальных уравнений, причем почти все они интегрируются. Неинтегрируемые подмодели, восемь из которых есть автономные системы, три — неавтономные, сводятся к системе двух уравнений первого порядка. Одна из изученных неавтономных систем (подалгебра 3.1 в [1, табл. 6]) описывает стационарные конические течения [4, с. 318], две другие слабо изучены (подалгебры 3.3, 3.4). Автономные системы сводятся к известным уравнениям: к уравнению Риккати (подалгебры 3.7, 3.25, 3.26) либо к уравнению Абеля (подалгебры 3.5, 3.21, 3.22). Подалгебра 3.20 задает волну Прандтля — Мейера. В данной работе рассматривается автономная система подалгебры 3.2.

1. Уравнения подмодели. Семейство подалгебр 3.2 задается базисом операторов в цилиндрической системе координат $\{\partial_x, \partial_t, (\beta t + \alpha x)\partial_x + \alpha r\partial_r + \partial_\theta + \beta\partial_U\}$, где α, β — параметры семейства подалгебр. С помощью инвариантов задается представление инвариантного решения

$$U = \beta\theta + U_1(s), \quad V = V(s), \quad W = W(s), \quad \rho = \rho(s), \quad S = S(s), \\ s = r e^{-\alpha\theta}, \quad p = f(\rho, S),$$

где U — скорость вдоль оси x ; V, W — радиальная и окружная компоненты скорости; ρ — плотность; S — энтропия; p — давление; функция f задает уравнение состояния. При $\alpha \neq 0$ вместо s удобнее взять инвариант $\theta_1 = \theta - \alpha^{-1} \ln r$.

Уравнения газовой динамики дают решения четырех типов.

1. $V = 0, \alpha \neq 0, W = 0, p = p_0$ ($\rho = \rho(\theta_1), U_1 = U_1(\theta_1)$ — произвольные функции). Это решение соответствует изобарическому течению. Линии тока параллельны оси x . Поверхности уровня представляют собой цилиндры с образующей, параллельной

оси x , и направляющей — логарифмической спиралью. Для непрерывности течения функция $\rho(\theta_1)$ должна быть периодической с периодом 2π , а функция $U_1(\theta_1)$ должна иметь скачок $U_1(\theta_1 + 2\pi) = U_1(\theta_1) - 2\pi\beta$.

2. $V = 0$, $\alpha = 0$, $W^2 = rp'\rho^{-1}$ ($p = p(r)$ ($p' \geq 0$), $\rho = \rho(r)$, $U_1 = U_1(r)$ — произвольные функции). Мировые линии определяются равенствами

$$\begin{aligned} x &= \beta t^2 [p'(r_0)/(r_0\rho(r_0))]^{1/2}/2 + t(\beta\theta_0 + U_1(r_0)) + x_0, \\ r &= r_0, \quad \theta = t[p'(r_0)/(r_0\rho(r_0))]^{1/2} + \theta_0. \end{aligned}$$

При $\beta = 0$ траектория представляет собой винтовую линию на цилиндре $r = r_0$ с шагом $2\pi U(r_0)r_0\rho(r_0)^{1/2}(p'(r_0))^{-1/2}$.

3. $\alpha = 0$, $V \neq 0$, $S = S_0$, $r\rho V = E$, $rW = D$, $V^2 + 2i(\rho) = C^2 - D^2r^{-2}$, $U_1 = U_0 - \beta DC^{-1} \int \rho r^{-1} dr$ (S_0 , E , D , U_0 , C — постоянные; $i = \int \rho^{-1} dp$ — энтальпия). Это решение соответствует четырем безвихревым течениям из цилиндрического закрученного источника (при $E < 0$ из стока) [5, с. 163–170]. В таких течениях возникают предельные линии, на которых ускорение обращается в бесконечность. За эти линии течение не продолжается.

4. $\alpha \neq 0$, $V \neq \alpha W$, $S = S_0$, $U_1 = \beta\alpha^{-1} \ln |\rho(V - \alpha W)| - \beta\theta_1$, $V^2 + W^2 + 2i(\rho) = C^2$ (S_0 , C — постоянные). Подмодель ранга 1 сводится к автономному уравнению

$$\frac{dV}{dW} = \frac{f_\rho(V + \alpha W) + W^2(V - \alpha W)}{f_\rho(W - \alpha V) - VW(V - \alpha W)} \quad (1)$$

и квадратуре

$$\alpha^{-1} \ln |W| + \int W^{-1} dV = \theta_1 - \theta_*, \quad (2)$$

где θ_* — постоянная. При $\beta = 0$ течение безвихревое плоское и является не простой волной подмоделей ранга 2 или 3, а двойной волной уравнений газовой динамики.

2. Течение с винтовой ударной волной. Два решения типа 2 при $\beta = 0$ сопрягаются через скачок уплотнения. Пусть $h(x, r, \theta) = 0$ — уравнение поверхности скачка. Тогда определяются параметры скачка: скорость поверхности в направлении нормали $D_n = 0$, касательная составляющая скорости частицы $\mathbf{u}_\sigma = \mathbf{u} - u_n \mathbf{n}$, проекция скорости на нормаль $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, нормаль к поверхности $\mathbf{n} = \nabla h / |\nabla h|^{-1}$. Из условия на скачке $[\mathbf{u}_\sigma] = 0$ следует $h_r = 0$, $h_x h_\theta^{-1} = [U](r[W])^{-1} = k = \text{const}$ ($[F] = F_2 - F_1$ — разность значений параметра F на разных сторонах поверхности $h = 0$). Отсюда $h = \theta + kx - \theta_0$, т. е. след поверхности скачка на цилиндре $r = r_0$ является винтовой линией с шагом $-2\pi k^{-1}$.

Уравнения на скачке принимают вид [6, с. 39]

$$\begin{aligned} (krU_1 + W_1)^2 &= (k^2r^2 + 1)\rho_2[p](\rho_1[p])^{-1}, \quad (k^2r^2 + 1)[W]^2 = [p][\rho](\rho_1\rho_2)^{-1}, \\ [U] &= kr[W], \quad H(p_2, \rho_2; p_1, \rho_1) = 0. \end{aligned}$$

Здесь последнее равенство задает адиабату Гюгонио; $W_1^2 = p'_1(r\rho_1)^{-1}$; $W_2^2 = p'_2(r\rho_2)^{-1}$. Если задать k , ρ_1 , p_1 ($p'_1 > 0$), то из уравнения Гюгонио определится величина $\rho_2^{-1} = F(p_2, r) < \rho_1^{-1}$ при $p_2 > p_1$. Другие уравнения определяют U_1 , U_2 , и для нахождения $p_2(r)$ имеет место обыкновенное дифференциальное уравнение

$$r(k^2r^2 + 1)Fp'_2 = (((p_2 - p_1)(\rho_2^{-1} - F))^{1/2} \pm (p'_1\rho_1^{-1}(k^2r^2 + 1))^{1/2}r^{1/2})^2.$$

Отсюда следует $p'_2 > 0$. Начальное условие для этого уравнения можно задать произвольно: $p_2(r_0) = p_{20} > p_1(r_0)$.

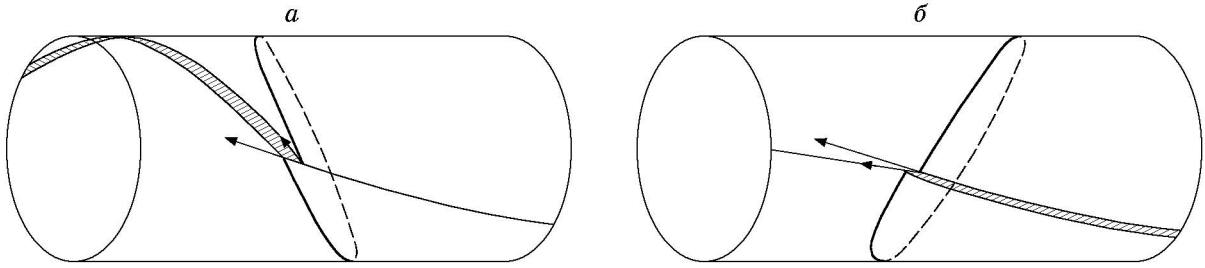


Рис. 1

Итак, для сопряжения двух решений через винтовой скачок уплотнения с заданным шагом (след скачка на цилиндре $r = r_0$ есть винтовая линия с шагом, не зависящим от r_0) можно взять решение перед скачком с произвольными функциями $\rho_1(r)$, $p_1(r)$ ($p'_1 > 0$). Тогда функции $\rho_2(r)$, $p_2(r)$, $U_2(r)$, $U_1(r)$ определяются из уравнений на скачке, при этом $p'_2 > 0$.

В зависимости от знака $[W]$ существует две конфигурации течений: со стенкой перед скачком (рис. 1, а) и со стенкой за скачком (рис. 1, б). Стенки образованы винтовыми линиями тока.

3. Интегральные кривые в плоскости годографа. В полярных координатах плоскости годографа $V = Q \cos \vartheta$, $W = Q \sin \vartheta$, $Q^2 + 2 \int_0^\rho \rho^{-1} f_\rho d\rho = C^2$ подмодель (1), (2) принимает вид

$$\frac{dQ}{d\theta_1} = -\frac{\alpha Q f_\rho}{Q^2 (\cos \vartheta - \alpha \sin \vartheta)^2 - (\alpha^2 + 1) f_\rho}, \quad \frac{d\vartheta}{d\theta_1} = \alpha \frac{\alpha f_\rho + Q^2 \sin \vartheta (\cos \vartheta - \alpha \sin \vartheta)}{Q^2 (\cos \vartheta - \alpha \sin \vartheta)^2 - (\alpha^2 + 1) f_\rho}. \quad (3)$$

Для автономного уравнения и квадратуры получаются представления

$$Q_\vartheta (\alpha f_\rho + Q^2 \sin \vartheta (\cos \vartheta - \alpha \sin \vartheta)) + f_\rho Q = 0; \quad (4)$$

$$\alpha^{-1} (\ln |\sin \vartheta| + \ln Q) + \int Q^{-1} \operatorname{ctg} \vartheta dQ = \theta_1 + \vartheta - \theta_*. \quad (5)$$

Физические интегральные кривые уравнения (1) или (4) лежат в круге $Q < C$. Окружность $Q = C$ есть интегральная кривая уравнения (1), на которой $\rho = 0$, $Cs |\sin \vartheta| = \exp(\alpha(\vartheta - \theta_*))$ (“вакуумное” решение).

Линии тока определяются из уравнения

$$\frac{dr}{V} = \frac{rd\theta}{W} = \frac{\alpha dx}{\beta \ln |r\rho(V - \alpha W)|}.$$

Проекция линий тока на плоскость (r, θ) удовлетворяют равенству

$$dr/r = \operatorname{ctg} \vartheta d\vartheta \quad \text{или} \quad d\theta_1 = (1 - V/(\alpha W)) d\theta. \quad (6)$$

По проекции течения на плоскость (r, θ) с непересекающимися проекциями линий тока восстанавливается течение в пространстве. Если проекции пересекаются, то течение в пространстве возможно также при $\beta \neq 0$. Далее рассматриваются проекции линий тока на плоскость (r, θ) , которые условно называются линиями тока.

Для “вакуумного” решения уравнение для линий тока принимает вид

$$(\alpha - \operatorname{ctg} \vartheta) d(\theta + \vartheta) = 0.$$

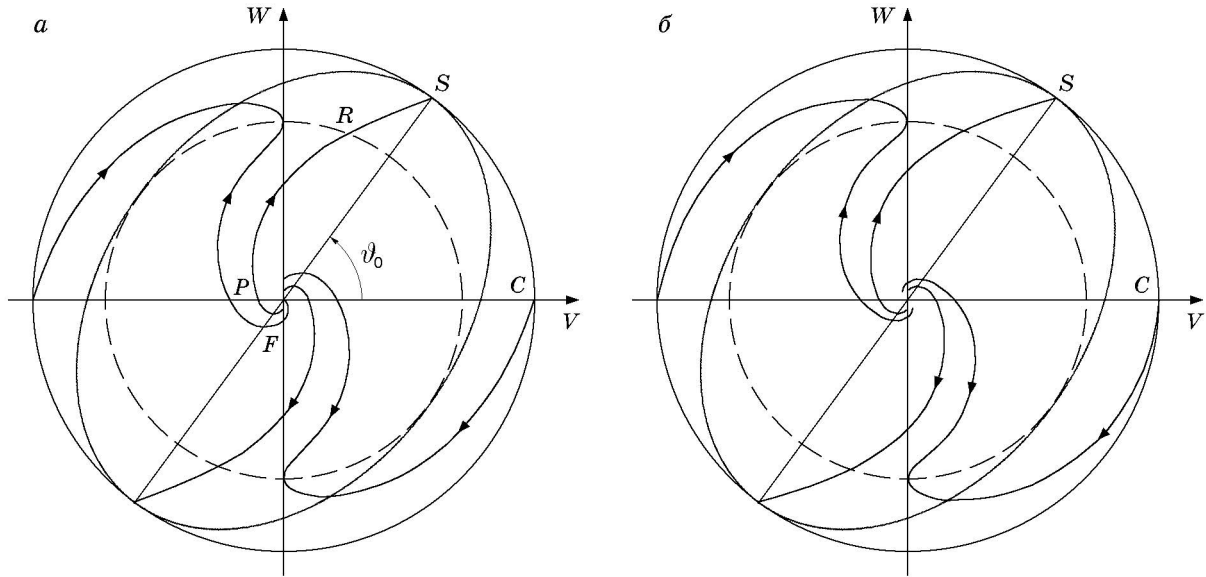


Рис. 2

При $\vartheta + \theta = \text{const}$ “вакуумные” траектории представляют собой прямые $C|y \sin \theta_0 - z \cos \theta_0| = \exp(\alpha(\theta_0 - \theta_*))$ ($y = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$). Положение прямых зависит от параметра θ_0 . При $\vartheta = \text{arctg} \alpha^{-1}$ “вакуумная” траектория есть логарифмическая спираль $r = r_0 e^{\alpha\theta}$ ($r_0 = C^{-1}\sqrt{1 + \alpha^2} \exp(\alpha(\text{arctg} \alpha^{-1} - \theta_*))$), являющаяся огибающей семейства прямых и линией уровня. В пространстве линии уровня соответствует цилиндрическая поверхность уровня, проекция которой на плоскость $x = 0$ есть линия уровня.

Уравнение (1) допускает инверсию $V \rightarrow -V$, $W \rightarrow -W$, следовательно, интегральные кривые симметричны относительно начала координат.

Имеется пять особых точек:

— $V = W = 0$, $\rho = \rho_0$, $2i(\rho_0) = C^2$ — фокус и точка торможения;

— $W = 0$, $V = \pm C$, $\rho = 0$ — узел при $\gamma \neq 2$ и вырожденный узел при $\gamma = 2$ ($f(\rho) \sim \rho^\gamma$ при $\rho \rightarrow 0$);

— $V = \pm \alpha C(1 + \alpha^2)^{-1/2}$, $\rho = 0$ — седло S .

При $\gamma \neq 2$ интегральные кривые входят в узел $(C, 0)$, касаясь прямой $W = \alpha(V - C)(\gamma - 1)/(2 - \gamma)$; единственная интегральная линия, входящая в седло $(\alpha C(1 + \alpha^2)^{-1/2}, C(1 + \alpha^2)^{-1/2})$ внутри круга $Q < C$, касается прямой (рис. 2, а)

$$((\gamma - 1)\alpha^2 - \gamma)V + (2\gamma - 1)\alpha W = C(\gamma - 1)\alpha\sqrt{1 + \alpha^2}. \quad (7)$$

При $\gamma = 2$ интегральные линии входят в вырожденный узел $(C, 0)$, касаясь окружности $Q = C$ (рис. 2, б). Штриховые линии на рис. 2 — окружности критических скоростей $Q = a_*$, $a_*^2 + I(a_*^2) = C^2$, $I(a^2) = 2i(\rho)$, $f_\rho = a^2$.

Из уравнений (3) следует, что знак $d\theta_1$ определяется знаком выражения $\Delta = Q^2(\cos \vartheta - \alpha \sin \vartheta)^2 - f_\rho(\alpha^2 + 1)$, $dQ < 0$ при движении по интегральной кривой к центру круга $Q < C$. На кривой $\Delta = 0$ меняется направление возрастания θ_1 , и ускорение обращается в бесконечность. Эта кривая есть предельная линия, за которую нельзя непрерывно продолжить течение. На предельной линии выполняется соотношение $|\vartheta - \vartheta_0| = \varphi$, где $\text{ctg} \vartheta_0 = \alpha$; φ — угол Маха; $\sin^2 \varphi = a^2 Q^{-2}$. Дифференцируя по ϑ последнее равенство, получим $\sin 2\varphi = -(m + 2a^2 Q^{-2})Q^{-1}Q_\vartheta$, где $m = \rho f_{\rho\rho} f_\rho^{-1}$; $a^2 = f_\rho$. Следовательно, предельная линия касается окружностей при $\varphi = 0, \pi, \pm\pi/2$. При $\varphi = 0$ имеем $f_\rho = 0$, $\rho = 0$, $\vartheta = \vartheta_0$,

$Q = C$ (седло). При $\varphi = \pi/2$ имеем $f_\rho = Q^2$, $Q = a_*$, $\vartheta = \vartheta_0 + \pi/2$ (точка касания окружности критических скоростей). В силу симметрии интегральных кривых относительно начала координат предельная линия есть овал, касающийся окружности предельных скоростей $Q = C$ и окружности критических скоростей. Для политропного газа предельная линия есть эллипс $Q^2 = C^2(\gamma - 1)(\gamma - \cos^2(\vartheta - \vartheta_0))^{-1}$ ($\gamma > 1$ — показатель адиабаты).

Для точек, близких к окружности $Q = C$, выполняется условие $\Delta > 0$. Значит, вне овала (предельной линии) при движении по интегральной кривой к центру величина θ_1 возрастает, а внутри овала убывает. На рис. 2 стрелками на интегральных кривых показано направление возрастания или убывания модуля скорости Q при возрастании величины θ_1 .

4. Взаимное расположение линий тока и линий уровня. Уравнения линий уровня $\theta_1 = \theta - \alpha^{-1} \ln r = \theta_0$ или $r = r_0 \exp(\alpha\theta)$ задают логарифмические спирали. При $\beta = 0$ линии уровня находятся в диапазоне $0 \leq \theta_0 < 2\pi$ или $1 \leq r_0 < \exp(2\pi\alpha)$.

Предложение. *Линия тока не может быть продолжена за точку касания с линией уровня.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линии уровня удовлетворяют уравнению $d\theta_1 = 0$. Используя (6), получим условие касания линии тока и линии уровня

$$V = \alpha W, \quad \text{или} \quad \text{ctg } \vartheta = \alpha, \quad \text{или} \quad \vartheta = \vartheta_0.$$

Из (3) при $\vartheta = \vartheta_0$ следуют неравенства $\vartheta_{\theta_1} = -\alpha^2(1+\alpha^2)^{-1} < 0$, $Q_{\theta_1} = \alpha Q(1+\alpha^2)^{-1} > 0$. Значит, при движении вдоль линии тока в сторону $d\theta_1 > 0$ через точку касания линии тока с линией уровня угол наклона вектора скорости к вектору точки положения монотонно уменьшается ($d\vartheta < 0$), а модуль скорости монотонно увеличивается ($dQ > 0$).

Если линия тока лежит по одну сторону от линии уровня и касается ее, то соседняя линия уровня пересекает ее в двух точках, в которых значения ϑ одинаковы, что не соответствует монотонному изменению угла наклона вектора скорости к вектору точки положения при прохождении линии тока через точку касания.

Пусть линия тока пересекает линию уровня и касается ее в точке пересечения. Угол между вектором точки на линии тока и линией тока имеет экстремум в точке касания, так как угол между вектором любой точки положения на линии уровня и линией уровня постоянен и равен ϑ_0 , что не соответствует монотонному изменению ϑ при пересечении точки касания.

Из предложения следует, что интегральные кривые уравнения (1) нужно рассматривать лишь по одну сторону от прямой $V = \alpha W$ или $\vartheta = \vartheta_0$, $\vartheta = \pi + \vartheta_0$ (рис. 2, а). Каждый участок интегральной кривой описывает непрерывное течение в области, ограниченной двумя линиями уровня.

5. Скрученное сопло Лавала. Рассмотрим пример построения линии тока для участка интегральной кривой SPF , идущей из седла в фокус до точки F пересечения с прямой $V = \alpha W$. Кривая задается уравнением $Q = Q(\vartheta)$, $\vartheta \in (\vartheta_0, \vartheta_0 + \pi)$. При движении от точки S к точке F значения θ_1 уменьшаются. В качестве начальной точки линии тока возьмем точку P , для которой $\vartheta = \pi$, $Q = Q_P$ и вектор скорости направлен к центру полярной системы координат в плоскости течения. Пусть для этой точки $\theta_0 = 0$, таким образом задается начальный луч полярной системы координат в плоскости течения. Из (5), (6) следует, что линия тока определяется равенствами

$$\theta = \pi - \vartheta + \int_{\pi}^{\vartheta} \text{ctg}(\vartheta - \vartheta_0) Q^{-1} dQ, \quad \theta_1 = \theta_* - \vartheta + \alpha^{-1} \ln Q + \int_{\pi}^{\vartheta} \text{ctg } \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{\alpha} + \frac{dQ}{Q} \right), \quad (8)$$

где ϑ — константа; параметр θ_* задает начальную линию уровня $\theta_1 = \theta_P = \theta_* - \pi + \alpha^{-1} \ln Q_P$ (рис. 3).

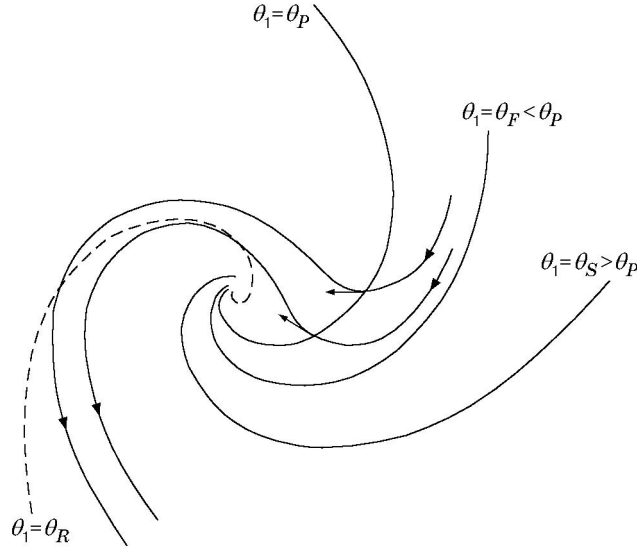


Рис. 3

Из уравнения (4) для $\vartheta \in (\pi, \pi + \vartheta_0)$ следует неравенство

$$-\alpha Q^{-1} Q_\vartheta = \{1 + Q^2(\tau - \alpha)/[\alpha f_\rho(1 + \tau^2)]\}^{-1} < 1,$$

где $\tau = \text{ctg } \vartheta \in (\alpha, \infty)$. Отсюда в силу (8) следует

$$\begin{aligned} \theta_1(\pi + \theta_0) = \theta_F = \theta_* - \pi - \vartheta_0 + \alpha^{-1} \ln Q_F + \\ + \int_{\pi}^{\pi + \vartheta_0} \text{ctg } \vartheta (\alpha^{-1} + Q^{-1} Q_\vartheta) d\vartheta > \theta_* - \pi - \vartheta_0 + \alpha^{-1} \ln Q_F, \end{aligned}$$

$$\theta(\pi + \theta_0) = -\vartheta_0 + \int_{\pi}^{\pi + \vartheta_0} \text{ctg}(\vartheta - \vartheta_0) Q^{-1} Q_\vartheta d\vartheta > -\vartheta_0 - \alpha^{-1} \ln |\sin(\vartheta - \vartheta_0)| \Big|_{\pi}^{\pi + \vartheta_0} \rightarrow \infty.$$

Значит, линия тока наворачивается из бесконечности (на бесконечности линия тока приближается к линии уровня $\theta_1 = \theta_F$).

Для анализа поведения линии тока в случае, когда параметр ϑ изменяется в интервале (ϑ_0, π) , используем картину интегральных кривых (см. рис. 2) и равенства (4), (7), из которых следует

$$Q_\vartheta |_{\vartheta = \vartheta_0} = \gamma C / (\alpha(1 - \gamma)), \quad Q_\vartheta |_{\vartheta = \pi} = -\alpha^{-1} Q_P,$$

где $C = Q(\vartheta_0)$; $Q_P = Q(\pi)$.

Для интегральной кривой, идущей из седла, справедливы неравенства $1 < -\alpha Q^{-1} \times Q_\vartheta < \varkappa = \gamma(\gamma - 1)^{-1}$. Тогда в силу (8) справедливы оценки

$$\theta(\theta_0) = \pi - \vartheta_0 + \int_{\pi}^{\vartheta_0} \text{ctg}(\vartheta - \vartheta_0) Q^{-1} Q_\vartheta d\vartheta > \pi - \vartheta_0 - \alpha^{-1} \varkappa \ln |\sin(\vartheta - \vartheta_0)| \Big|_{\pi}^{\vartheta_0} \rightarrow \infty,$$

$$\theta_1(\vartheta_0) = \theta_* - \vartheta_0 + \alpha^{-1} \ln C + \int_{\pi}^{\vartheta_0} \text{ctg } \vartheta (\alpha^{-1} + Q^{-1} Q_\vartheta) d\vartheta = \theta_S,$$

где интеграл сходится, так как в особой точке $\vartheta = \pi - 0$ или $\tau = \text{ctg } \vartheta \rightarrow -\infty$ подынтегральное выражение $\text{ctg}(\alpha^{-1} + Q^{-1} Q_\vartheta) \sim \alpha^{-2} a_P^{-2} Q_P^2$ имеет конечный предел.

Итак, линия тока разворачивается в бесконечность при $\vartheta \rightarrow \vartheta_0$, приближаясь к линии уровня $\theta_1 = \theta_S$.

Другие линии тока получаются переносом векторов скоростей вдоль линий уровня. Такой перенос можно выполнить неограниченно далеко в бесконечности и неограниченно близко к нулю, если все линии уровня в рассматриваемом течении различны. Для этого необходимо выполнение условия

$$\theta_1(\vartheta_0) - \theta_1(\vartheta_0 + \pi) < 2\pi \quad \Rightarrow \quad \alpha^{-1} \ln \frac{C}{Q_F} + \int_{\pi+\vartheta_0}^{\vartheta_0} \operatorname{ctg} \vartheta (\alpha^{-1} + Q^{-1} Q_\vartheta) d\vartheta < \pi,$$

которому можно удовлетворить, выбирая α . В этом случае получается закрученное течение между спиральными линиями уровня с переходом через скорость звука ($\theta_1 = \theta_R$ — звуковая линия уровня) из бесконечности в бесконечность с разворотом потока (рис. 3).

Любая линия тока наворачивается из бесконечности, где она асимптотически приближается к линии уровня $\theta_1 = \theta_F$. Эту линию тока можно считать стенкой. На некотором витке линия тока разворачивается, пересекает звуковую линию и затем вновь разворачивается и уходит в бесконечность, асимптотически приближаясь к линии уровня $\theta_1 = \theta_S$, определяющей область вакуума. При $\theta_S - \theta_F < 2\pi$ получается однолистное течение. При $\theta_S - \theta_F > 2\pi$ непрерывный участок течения возможен только на одном витке, где поток разворачивается. Можно представить и многолистное течение, когда $\beta \neq 0$ и имеется движение частиц в направлении, перпендикулярном плоскости переменных (r, θ) .

Две различные линии тока задают бесконечное скрученное сопло, которое можно обрезать на любом витке (рис. 3).

Заключение. Инвариантные решения ранга 1 для подалгебры 3.2 представляются интегралами или интегральными кривыми и квадратурой. Эта инвариантная подмодель интегрируема. Физическая интерпретация полученных формул есть нетривиальная задача. Для любого решения необходимо выявлять область непрерывного движения газа, возможные особенности, асимптотическое поведение на бесконечности. Выяснение возможности сопряжения различных инвариантных решений через слабые и сильные разрывы позволяет дополнить физические картины движения газа. Пример сопряжения через винтовую поверхность скачка уплотнения и пример непрерывного течения в скрученном сопле Лавалля показывают возможность физической интерпретации инвариантных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
2. **Овсянников Л. В.** Некоторые итоги выполнения программы ПОДМОДЕЛИ для уравнений газовой динамики // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, вып. 3. С. 362–372.
3. **Хабиров С. В.** Инвариантные решения уравнений газовой динамики // Вестн. Уфим. гос. авиац. техн. ун-та. 2001. № 1. С. 47–52.
4. **Черный Г. Г.** Газовая динамика. М.: Наука, 1988.
5. **Современное состояние аэродинамики больших скоростей.** М.: Изд-во иностр. лит., 1955. Т. 1.
6. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию 7/V 2002 г.