

**ТРЕХМЕРНЫЕ ЦИРКУЛЯНТНЫЕ СЕТИ  
СВЯЗИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ****Э. А. Монахова***Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
Новосибирск  
E-mail: emilia@rav.sccc.ru*

Рассматриваются проблемы оптимизации структуры и организации обменов в циркулянтных сетях, используемых в качестве сетей связи параллельных вычислительных систем, и дан обзор результатов в этой области. Получены трехмерные аналитически задаваемые циркулянтные сети любого диаметра с максимальным числом вершин. Для них разработаны эффективный динамический алгоритм парной маршрутизации и алгоритм трансляционного обмена, обеспечивающий минимумы времени выполнения и нагрузки сообщений в сети.

**Введение.** Циркулянтные сети (графы) [1–7] широко исследуются при проектировании и анализе вычислительных систем, в теории графов и дискретной математике, в качестве топологии для мультипроцессорных систем и компьютерных сетей. Циркулянтные графы степеней 4 и 6 реализованы как коммуникационные сети в системах Intel Paragon, Cray T3D, MPP, SONET и др. Циркулянтные сети известны в зарубежной литературе как *circulant networks, distributed loop networks, cyclic graphs, multi-loop networks, chordal rings, star-polygon graphs, multiple fixed step graphs, point-symmetric graphs*, в отечественной литературе как  $D_n$ -графы [8, 9].

Пусть  $1 \leq s_1 < \dots < s_n \leq \lfloor N/2 \rfloor$  – множество целых чисел. Циркулянтный граф, обозначаемый  $(N; s_1, \dots, s_n)$ , имеет множество вершин  $V = \{0, 1, \dots, N-1\}$  и множество ребер  $A = \{(v, v \pm s_i \pmod{N}) \mid v \in V, i = 1, n\}$ . Числа  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  называются образующими,  $N$  – порядком графа,  $n$  – размерностью. В данной работе будем исследовать кольцевые циркулянтные сети вида  $(N; 1, s_2, \dots, s_n)$  с  $s_1 = 1$ , известные как самостоятельный класс графов.

Диаметр графа (оценивает максимальную структурную задержку в сети)  $d(N; S) = \max_{u, v \in V} D(u, v)$ , где  $D(u, v)$  – длина кратчайшего пути между вершинами  $u$  и  $v$  (функция кратчайших расстояний). Обозначим через  $ulb(N, n)$

точную нижнюю границу диаметра для любых  $N$  и  $n$ . В работе [7] доказано, что

$$d(N; S) \geq \text{ulb}(N, n) \geq \frac{1}{2}(n! N)^{1/n} - \frac{1}{2}(n+1) \approx \frac{1}{2}(n!)^{1/n} N^{1/n}.$$

Для  $n = 2$  в [10] получено (в [6, 11] переоткрыто) точное значение

$$\text{ulb}(N, 2) = \lceil (\sqrt{2N-1} - 1)/2 \rceil.$$

Пусть  $N(d, n)$  – максимальное число вершин циркулянтного графа с диаметром  $d$  и размерностью  $n$ . Формула для  $N(d, n)$  найдена в [12–14]:

$$N(0, n) = 1, \quad N(d, n) = \sum_{i=0}^n C_n^i C_d^{n-i} 2^{n-i}, \quad d \geq 1, n \geq 1.$$

Имеем  $N(d, 1) = 2d + 1$ ,  $N(d, 2) = 2d^2 + 2d + 1$ ,  $N(d, 3) = \frac{4}{3}d^3 + 2d^2 + \frac{8}{3}d + 1$ .

Пусть  $d$  – натуральное число, а  $S = \{1, s_2, \dots, s_n\}$  – множество образующих. Определим  $m(d, S)$  как наибольшее натуральное  $N$  такое, что диаметр кольцевого циркулянта  $(N; S)$  меньше или равен  $d$ , а именно  $m(d, S) = \max \{N \mid d(N; S) \leq d\}$ . Для любых натуральных  $d$  и  $n$  определим точную верхнюю границу

$$M(d, n) = \max \{m(d, S) \mid \exists \text{ множество } S \text{ с } |S| = n\},$$

где  $|S|$  – мощность  $S$ . Имеем  $M(d, n) = N(d, n)$  для  $n \leq 2$ ,  $M(d, n) \leq N(d, n)$  для  $n > 2$ . В работе [14] доказано, что  $M(d, n)$  является нечетным числом для любых натуральных  $d$  и  $n$ .

Эффективность алгоритмов основных схем обменов данными при параллельных вычислениях непосредственно зависит от топологии сети связи, в том числе определяется диаметром графа межпроцессорных связей (максимумом минимальных расстояний между каждой парой процессоров). Наиболее исследуемые проблемы оптимизации циркулянтных сетей – получение оптимальных графов с минимальным диаметром (возможно, равным  $\text{ulb}(N, n)$ ) для заданного числа вершин и нахождение семейств оптимальных графов с максимальным числом вершин для любого диаметра. Оптимальные сети имеют высокие показатели отказоустойчивости и скорости коммуникаций, максимальную надежность и минимальную задержку при передаче информации [2, 3, 6, 13]. Кольцевые циркулянтные графы степеней 4 и 6 являются наиболее изучаемыми благодаря практическому применению. В литературе описаны следующие аналитически задаваемые семейства циркулянтных сетей.

Для  $n = 2$  в работе [10] доказано, что для любого  $N > 4$  циркулянтные графы  $(N; s_1, s_2)$  достигают  $\text{ulb}(N, 2)$  и минимального среднего расстояния при  $s_1 = \lceil (\sqrt{2N-1} - 1)/2 \rceil$ ,  $s_2 = s_1 + 1$  ( $\lceil x \rceil$  – ближайшее целое к  $x$ ). В [6] показано, что  $\text{ulb}(N, 2)$  достигается для любых  $N$ , если взять  $s_1 = \text{ulb}(N, 2)$ ,  $s_2 = s_1 + 1$ . В [9, 11, 15] доказано, что  $M(d, 2)$  для циркулянтного графа вида  $(N; 1, s)$  достигается при  $s = 2d + 1$ . Найдены некоторые аналитически задаваемые се-

мейства оптимальных двумерных кольцевых циркулянтов [2, 3, 9, 16]. Для  $n=3$  в [15] получено семейство циркулянтных графов вида  $(3d^2+3d+1; 1, 3d+1, 3d+2)$  с диаметром  $d$ . В работе [7] показано, что для  $N=d^n$ , где  $d$  – нечетное число,  $d(N; 1, d, \dots, d^{n-1}) = n(d-1)/2 = (n/2)N^{1/n} - n/2$ . В частности, при  $n=3$  эти границы дают семейство трехмерных циркулянтов с диаметром, равным  $d$ , где  $N = \frac{8}{27}d^3 + O(d^2)$ . В [3] указано семейство трехмерных кольцевых циркулянтных сетей с  $N = \frac{8}{9}d^3 + O(d^2)$ . В [17] найдено следующее семейство: циркулянтные графы  $(N; S)$ , где  $N = 2k \sum_{i=0}^{n-1} (4k)^i$ ,  $S = \{1, 4k, \dots, (4k)^{n-1}\}$ ,  $k = \lfloor (d-n+3)/n \rfloor$ , имеют диаметр меньше или равный  $d$ ,  $d \geq n \geq 3$ . Для  $n=3$  в работе [3] указан тот же результат:  $N = 32 \lfloor d/3 \rfloor^3 + 8 \lfloor d/3 \rfloor^2 + 2 \lfloor d/3 \rfloor$ . Заметим, что функции  $M(d, n)$ ,  $n \leq 2$ , а также образующие и порядки графов найденных семейств являются полиномами относительно  $d$ .

При использовании циркулянтных графов в качестве коммуникационных сетей параллельных вычислительных систем требуется эффективное решение проблем организации парных и коллективных межпроцессорных обменов. При парной маршрутизации сообщение должно быть передано из вершины-источника в вершину-приемник. При трансляционном обмене процессор-источник посылает идентичные данные в сообщении всем другим процессорам системы. Рассматриваемые типы обменов изучаются для циркулянтных сетей при различных коммуникационных моделях. В данной работе рассматривается модель дуплексной ненаправленной передачи информации методом коммутации сообщений. В такой модели протокол состоит из последовательности шагов, и в течение каждого шага каждый процессор может посылать (и получать) сообщения от всех соседей. Для организации парных обменов требуется определение кратчайших путей в графе. Известны различные распределенные алгоритмы поиска кратчайших путей в двумерных циркулянтных сетях [18–22]. Для трехмерных циркулянтов проблема поиска кратчайших путей решена [5, 23] для семейства из [15] с порядком  $N = O(d^2)$  и эквивалентного графа вида  $(3d^2+3d+1; d, d+1, 2d+1)$ . В работе [4] установлено, что проблема поиска кратчайших путей в циркулянтных сетях в общем виде относится к классу NP-трудных задач. В [5, 20] получены алгоритмы трансляционного обмена при разных коммуникационных моделях для двумерных циркулянтов. В [5] даны оценки времени и алгоритм трансляционного обмена для трехмерных циркулянтов с  $N = O(d^2)$ . В [24] приведены оценки времени трансляционного обмена для циркулянтов вида  $(N; 1, 2, \dots, \Delta/2)$  при условии, что вершина может обмениваться сообщениями с  $k \leq \Delta$  соседями в течение каждого шага.

Целью предлагаемой работы является исследование свойств оптимальных структур и организации обменов в трехмерных циркулянтных сетях.

В разд. 1 представлено аналитически задаваемое семейство трехмерных оптимальных циркулянтных сетей [25], которые имеют максимальное число вершин для любого диаметра; дано новое описание образующих для него. В разд. 2 приведены аналитический метод определения кратчайших путей и

функции кратчайших расстояний в таких графах, а также эффективные алгоритмы парного и трансляционного обменов для них, полученные в дуплекс-ной модели коммутации сообщений.

**1. Оптимальные циркулянтные сети степени 6.** Рассмотрим множество циркулянтных сетей вида  $(N; 1, s_2, s_3)$  с  $s_1 = 1$  и  $1 < s_2 < s_3 \leq \lfloor N/2 \rfloor$ . Обозначим через  $D(v)$ ,  $0 \leq v < N$ , длину кратчайшего пути из вершины 0 в вершину  $v$ . Пронумеруем вершины графа от 0 до  $N$  ( $N$  есть вершина 0). Определим  $+s_3$ -связи (или  $-s_3$ -связи) из вершины  $v$ , если идти по ним в вершину  $v + s_3$  (или в  $v - s_3$ ). Аналогично определим  $+s_2$ - и  $-s_2$ -связи, а также  $+1$ - и  $-1$ -связи. Пусть  $\Delta = s_3 - s_2$ . Кроме шагов длины 1 будем также использовать  $\pm\Delta$ -связи длины 2.

В графе  $(N; 1, s_2, s_3)$  выделим любые две ближайшие по циклу, образованному образующей  $s_1$ , вершины  $0 \leq u < v \leq N$  такие, что при получении  $D(u)$  и  $D(v)$  не используются  $\pm 1$ -связи. Тогда расстояния из вершины 0 до всех вершин, лежащих между вершинами  $u$  и  $v$ , можно легко вычислить, так как разница между смежными вершинами не превышает единицу.

**Лемма.** Пусть в циркулянтном графе вида  $(N; 1, s_2, s_3)$   $0 \leq u < v \leq N$  – любые две ближайшие по циклу, образованному образующей  $s_1$ , вершины такие, что при получении  $D(u)$  и  $D(v)$  не используются  $\pm 1$ -связи. Тогда

$$\max_{u \leq x \leq v} D(x) = (v - u + D(u) + D(v))/2$$

и достигается в вершине  $x = (v + u + D(v) - D(u))/2$ .

Заметим, что в лемме применено целочисленное деление на два. Рассмотрим некоторые свойства трехмерных циркулянтов диаметра  $d$  с максимумом  $N$ .

Пусть  $p_3 = \lfloor N/s_3 \rfloor$ , а  $x_r$ ,  $(x_l)$  означает ближайшую к  $N/2$  справа (слева) вершину вида  $ks_3$  или  $N - ks_3$ ,  $x_r > x_l$ . Имеем

$$x_l = \begin{cases} (p_3/2)s_3, & \text{если } p_3 \text{ четное;} \\ N - \lceil p_3/2 \rceil s_3, & \text{если } p_3 \text{ нечетное,} \end{cases} \quad (1)$$

$$x_r = \begin{cases} N - (p_3/2)s_3, & \text{если } p_3 \text{ четное;} \\ \lceil p_3/2 \rceil s_3, & \text{если } p_3 \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (2)$$

Пусть  $r$  означает длину интервала  $[x_l, x_r]$ :

$$r = \begin{cases} N - p_3 s_3, & \text{если } p_3 \text{ четное;} \\ (p_3 + 1)s_3 - N, & \text{если } p_3 \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (3)$$

Имеем  $1 \leq r < s_3$ , так как рассматриваются графы с максимальным значением  $N$ , и  $N$  должно быть нечетным числом [14]. Далее в теореме 1 реализуется случай, когда  $s_2 < r$ , в теореме 2 – когда  $r < s_2$ .

Предполагаем, что неизвестные функции  $N$ ,  $s_2$  и  $s_3$  являются полиномами относительно  $\lfloor d/3 \rfloor$ . Следовательно, целочисленная функция  $p_3$  – также полином относительно  $\lfloor d/3 \rfloor$ . Поскольку нас интересуют графы с максимумом  $N$ , в дальнейшем не рассматриваем графы с  $2s_2 = s_3$ , потому что такие

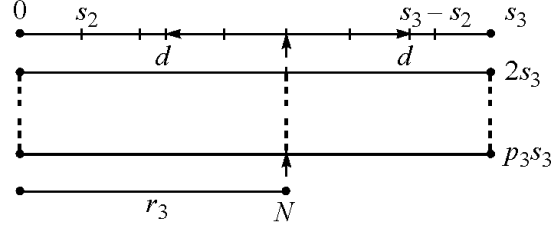


Рис. 1

образующие образуют цикл длины 3 в графе и могут дать максимум  $N$  только для  $d=1$ .

**Теорема 1.** Пусть  $d > 1$  – целое число. Максимальный порядок циркулянтной сети  $(N; 1, s_2, s_3)$  с диаметром  $d$  и  $s_2 < s_3 - s_2$  достигается для

$$N = \begin{cases} (32/27)d^3 + (16/9)d^2 + 2d + 1, & \text{если } d \equiv 0 \pmod{3}; \\ 32\lfloor d/3 \rfloor^3 + 48\lfloor d/3 \rfloor^2 + 26\lfloor d/3 \rfloor + 5, & \text{если } d \equiv 1 \pmod{3}; \\ 32\lfloor d/3 \rfloor^3 + 80\lfloor d/3 \rfloor^2 + 70\lfloor d/3 \rfloor + 21, & \text{если } d \equiv 2 \pmod{3}, \end{cases} \quad (4)$$

$$(s_2, s_3) = \begin{cases} ((4/3)d + 1, (16/9)d^2 + (4/3)d + 1), & \text{если } d \equiv 0 \pmod{3}; \\ (4\lfloor d/3 \rfloor + 2 \pm 1, \\ 16\lfloor d/3 \rfloor^2 + 16\lfloor d/3 \rfloor + 5 \pm (4\lfloor d/3 \rfloor + 2)), & \text{если } d \equiv 1 \pmod{3}; \\ (4\lfloor d/3 \rfloor + 3, 16\lfloor d/3 \rfloor^2 + 28\lfloor d/3 \rfloor + 13), & \text{если } d \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases} \quad (5)$$

**Доказательство** (сокращенный вариант).

1. Рассмотрим граф  $(N; 1, s_2, s_3)$  диаметра  $d > 1$  с  $s_2 < r$ . Разместим вершины циркулянтного графа на линии и пронумеруем их от 0 до  $N$  (рис. 1), где  $r_3 = N \pmod{s_3}$ . Из (3) следует  $r = r_3$ , если  $p_3$  четное, или  $r = s_3 - r_3$ , если  $p_3$  нечетное.

По условиям теоремы  $\lfloor s_3/s_2 \rfloor \geq 2$ . В интервале  $[0, s_3]$  рассмотрим вершины  $f_j$  и  $r_j$ , порождаемые  $+s_2$ -связями из 0 и  $-s_2$ -связями из  $s_3$  соответственно:

$$f_j = js_2, \quad r_j = s_3 - (\lfloor s_3/s_2 \rfloor - j)s_2, \quad j = 0, \dots, \lfloor s_3/s_2 \rfloor.$$

Имеем

$$D(f_j) = j; \quad D(r_j) = \lfloor s_3/s_2 \rfloor + 1 - j, \quad j = 0, \dots, \lfloor s_3/s_2 \rfloor. \quad (6)$$

Определим максимум  $D(x)$  для вершин  $f_j \leq x \leq f_{j+1}$  без использования значений  $D(r_j)$ . Из леммы, учитывая (6), имеем:

$$\max_{f_j \leq x \leq f_{j+1}} D(x) = j + (s_2 + 1)/2 \quad (7)$$

и достигается в вершине

$$x_{j1} = js_2 + (s_2 + 1)/2. \quad (8)$$

Обе эти величины целые, если  $s_2$  – нечетное число. Из (7) и (8) следует  $D(x) \leq d$  для всех  $0 \leq x < x_1$  и  $D(x_1) = d + 1$ , где

$$x_1 = -(s_2^2 - 1)/2 + (d + 1)s_2.$$

Аналогично при определении максимума  $D(x)$  для вершин  $r_j \leq x \leq r_{j+1}$  без использования значений  $D(f_j)$  следует  $D(x) \leq d$  для всех  $x_2 < x \leq s_3$  и  $D(x_2) = d + 1$ , где

$$x_2 = s_3 + s_2 - x_1 = s_3 - ds_2 + (s_2^2 - 1)/2. \quad (9)$$

Обобщая эту процедуру для интервалов  $[is_3, (i+1)s_3]$ ,  $i > 0$ , получим  $D(x) \leq d$  для  $x_{i-1,2} < x < x_{i,1}$ ,  $i \geq 1$ ,  $D(x_{i,1}) = D(x_{i,2}) = d + 1$ ,  $i \geq 0$ , где  $x_{i,1} = x_1 + i(s_3 - s_2)$ ,  $x_{i,2} = x_2 + i(s_3 + s_2)$ .

1.1. Пусть  $p_3 \leq d$ . В максимальном графе диаметра  $d$  должен существовать путь из  $N$  в  $x_1$  с числом шагов, равным  $d$ , использующий  $-s_3$ -связи и, возможно,  $-s_2$ -связи. Аналогично должен существовать путь из  $N$  в  $x_2$  с числом шагов, равным  $d$ , использующий  $-s_3$ -связи и, возможно,  $-s_2$ -связи. Это становится возможным, если  $p_3 \leq d$  и  $x_1 \leq x_2$ . В противном случае реализуются не все пути, порождаемые  $\pm s_2$ - и  $\pm 1$ -связями в интервалах  $[is_3, (i+1)s_3]$ . Отсюда, учитывая (9), получим  $N(\text{mod } s_3) = (x_1 + x_2)/2 = (s_3 + s_2)/2$  и

$$N = (p_3 + 1/2)s_3 + s_2/2. \quad (10)$$

Заметим, что если  $s_2$  – четное число, то  $D(x_1 + 1) = D(x_2 - 1) = d + 1$ , и тогда необходимо иметь два пути: из  $N$  в  $x_1$  и из  $N$  в  $x_2$  – с числом шагов, равным  $d - 1$ , и следовательно, значение  $N$  будет меньше (исключение только для  $d = 2$ ). Поэтому рассматриваем нечетные  $s_2$ .

Другие соотношения для определения  $N$  получим из следующих соображений. Из (1) и (2) имеем  $D(x_l) = D(x_r) = \lceil p_3/2 \rceil$ , и все вершины в интервале  $[x_l, x_r]$  можно достичь или  $+s_2$ -связями и  $\pm 1$ -связями из  $x_l$ , или  $-s_2$ -связями и  $\pm 1$ -связями из  $x_r$ . Следовательно, для графа с максимумом  $N$  должны выполняться равенства

$$r = M(d', 2); \quad s_2 = 2d' + 1, \quad (11)$$

где  $d' = d - \lceil p_3/2 \rceil$ . Имея (3), (10) и (11), получаем три равенства для четырех неизвестных величин ( $N$ ,  $p_3$ ,  $s_3$  и  $s_2$ ):

$$\begin{aligned} & M(d, 2) + 2\lceil p_3/2 \rceil^2 - 2(2d + 1)\lceil p_3/2 \rceil = \\ & = \begin{cases} N - p_3 s_3, & \text{если } p_3 \text{ четное;} \\ (p_3 + 1)s_3 - N, & \text{если } p_3 \text{ нечетное,} \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

$$s_2 = 2d + 1 - 2\lceil p_3/2 \rceil, \quad (13)$$

$$s_3 = (2N - s_2)/(2p_3 + 1). \quad (14)$$

Подставляя значения  $s_2$  из (13) в (14) и  $s_3$  в (12), получим

$$N = \begin{cases} p_3^3 - (4d + 1/2)p_3^2 + 4d^2 p_3 + 2d^2 + 2d + 1, & \text{если } p_3 \text{ четное;} \\ p_3^3 - (4d + 1/2)p_3^2 + 4d^2 p_3 + 2d^2 + 2d + 1/2, & \text{если } p_3 \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (15)$$

Из построения данных графов следует, что графы, определяемые посредством (13)–(15), имеют диаметр, равный  $d$ .

Наша цель – найти максимум  $N = N(p_3)$  для заданного  $d$ . Функция  $N$  – кубический полином относительно  $p_3$  с  $a=1>0$ ,  $b=-4d-1/2$ ,  $c=4d^2$ . Найдем целочисленную функцию  $p_3(d)$  такую, при которой  $N$  из (15) будет достигать максимума для любого  $d>1$ . Дискриминант  $\Delta = 3ac - b^2 = -4d^2 - 4d - 1/4 < 0$ . Следовательно,  $N$  имеет один максимум, когда

$$p_3 = -\frac{b + \sqrt{-\Delta}}{3a} = \frac{4}{3}d - \frac{2}{3}\sqrt{d^2 + d + \frac{1}{16}} + \frac{1}{6}.$$

Так как  $d + 1/4 < \sqrt{d^2 + d + 1/16} < d + 1/2$ , тогда  $\frac{2}{3}d - \frac{1}{6} < p_3 < \frac{2}{3}d$ . Функция  $p_3(d)$  должна быть целочисленной. Остается взять ближайшее к экстремальному значению целое число, и получим

$$p_3 = \begin{cases} 2\lfloor d/3 \rfloor, & \text{если } d \equiv 0(\text{mod}3) \text{ или } d \equiv 1(\text{mod}3); \\ 2\lfloor d/3 \rfloor + 1, & \text{если } d \equiv 2(\text{mod}3) \text{ или } d \equiv 1(\text{mod}3). \end{cases} \quad (16)$$

Подставляя четные значения  $p_3$  из (16) в (13)–(15), получим формулы (4) и (5) для  $d \equiv 0(\text{mod}3)$  и  $d \equiv 1(\text{mod}3)$  (вариант со знаком плюс). Подставляя нечетные значения  $p_3$  из (16) в (13)–(15), получим формулы (4) и (5) для  $d \equiv 2(\text{mod}3)$  и  $d \equiv 1(\text{mod}3)$  (вариант со знаком минус).

1.2. Пусть  $p_3 > d$ . Тогда нет двух путей из  $N$  в  $x_1$  и из  $N$  в  $x_2$  с числом шагов, равным  $d$ , использующих  $-s_3$ -связи. Когда  $x_1 > x_2$ , часть возможных путей теряется, и значение  $N$  будет меньше, чем в случае 1.1.

2. Для альтернативного предположения  $r < s_2$  при  $s_2 < s_3 - s_2$  значение  $N$  будет также меньше, чем в случае 1.

Теорема доказана.

Отметим, что образующие  $s_2$  и  $s_3$ , полученные в теореме 1, есть полиномы первой и второй степени соответственно относительно  $\lfloor d/3 \rfloor$ . В теореме 2 получены образующие с  $s_2 > s_3 - s_2$ , которые являются полиномами второй степени. Схема доказательства приведена в [25].

**Теорема 2.** Максимальный порядок циркулянтной сети вида  $(N; 1, s_2, s_3)$  с любым диаметром  $d \geq 1$

$$M(d, 3) = \begin{cases} (32/27)d^3 + (16/9)d^2 + 2d + 1, & \text{если } d \equiv 0(\text{mod}3); \\ 32\lfloor d/3 \rfloor^3 + 48\lfloor d/3 \rfloor^2 + 30\lfloor d/3 \rfloor + 7, & \text{если } d \equiv 1(\text{mod}3); \\ 32\lfloor d/3 \rfloor^3 + 80\lfloor d/3 \rfloor^2 + 70\lfloor d/3 \rfloor + 21, & \text{если } d \equiv 2(\text{mod}3), \end{cases}$$



и достигается для образующих

$$(s_2, s_3) = \begin{cases} ((8/9)d^2 + (2/3)d, (8/9)d^2 + 2d + 2), & \text{если } d \equiv 0(\text{mod}3); \\ (8\lfloor d/3 \rfloor^2 + 6\lfloor d/3 \rfloor + 2, 8\lfloor d/3 \rfloor^2 + 10\lfloor d/3 \rfloor + 4), & \text{если } d \equiv 1(\text{mod}3); \\ (8\lfloor d/3 \rfloor^2 + 10\lfloor d/3 \rfloor + 4, 8\lfloor d/3 \rfloor^2 + 14\lfloor d/3 \rfloor + 6), & \text{если } d \equiv 2(\text{mod}3). \end{cases} \quad (17)$$

Максимальный порядок  $M(d, 3)$  циркулянтной сети  $(N; 1, s_2, s_3)$  с диаметром  $d$  достигается также для образующих

$$(s_2, s_3) = \begin{cases} ((16/27)d^3 + (4/9)d^2, & \text{если } d \equiv 0(\text{mod}3); \\ (16/27)d^3 + (4/9)d^2 + (4/3)d, & \text{если } d \equiv 0(\text{mod}3); \\ (16\lfloor d/3 \rfloor^3 + 36\lfloor d/3 \rfloor^2 + 26\lfloor d/3 \rfloor + 5, & \\ 16\lfloor d/3 \rfloor^3 + 36\lfloor d/3 \rfloor^2 + 30\lfloor d/3 \rfloor + 9), & \text{если } d \equiv 2(\text{mod}3). \end{cases} \quad (18)$$

Для этих образующих  $s_2 > s_3 - s_2$ , и они являются полиномами третьей степени относительно  $\lfloor d/3 \rfloor$ . Легко проверить, что образующие (18) получаются из образующих (17) с помощью эквивалентного преобразования [2].

Отметим, что полученное семейство сетей с числом вершин, равным  $M(d, 3)$ , значительно превосходит по соотношению  $N/d$  все ранее найденные семейства трехмерных циркулянтов [3, 7, 15, 17]. В таблице представлены описания трехмерных кольцевых циркулянтных сетей с максимальным порядком, равным  $M(d, 3)$ , и образующими, задаваемыми формулами (17), (5) и (18), для диаметров  $1 \leq d \leq 18$ .

**2. Маршрутизация в циркулянтных сетях степени 6.** 2.1. *Алгоритм парной маршрутизации.* При организации парных обменов в параллельных вычислительных системах требуется решение проблемы поиска кратчайшего пути между взаимодействующими процессорами. Рассмотрим решение

$d$	$M(d, 3)$	$s_2, s_3$	$s_2, s_3$	$s_2, s_3$	$d$	$M(d, 3)$	$s_2, s_3$	$s_2, s_3$	$s_2, s_3$
1	7	2, 4	–	–	10	1393	92, 106	–	–
2	21	4, 6	3, 8	5, 9	11	1815	106, 120	15, 241	839, 855
3	55	10, 16	5, 21	20, 24	12	2329	136, 154	17, 273	1088, 1104
4	117	16, 22	–	–	13	2943	154, 172	–	–
5	203	22, 28	7, 57	83, 91	14	3629	172, 190	19, 381	1709, 1729
6	333	36, 46	9, 73	144, 152	15	4431	210, 232	21, 421	2100, 2120
7	515	46, 56	–	–	16	5357	232, 254	–	–
8	737	56, 66	11, 133	329, 341	17	6371	254, 276	23, 553	3035, 3059
9	1027	78, 92	13, 157	468, 480	18	7525	300, 326	25, 601	3600, 3624



этой проблемы для полученных трехмерных циркулянтных сетей. Нужно определить кратчайший путь между любыми вершинами  $u$  и  $v$  графа. Поскольку циркулянт – вершинно-транзитивный граф, то для любых  $u$  и  $v$  функция кратчайших расстояний  $D(u, v) = D(0, v - u \pmod{N})$ , т. е. достаточно найти для любой вершины  $v$  кратчайший путь между  $0$  и  $v$ . Определим также для вершины  $v$  вектор кратчайшего пути  $P(0, v) = (P_1, P_2, P_3)$  как вектор, имеющий три координаты, где  $|P_i|$ ,  $i = 1, 2, 3$ , задает число шагов вдоль образующей  $s_i$  ( $-s_i$ ) в кратчайшем пути из  $0$  в  $v$ , а знак «+» («-») – движение вдоль  $s_i$  ( $-s_i$ ). Имеем  $D(0, v) = |P_1| + |P_2| + |P_3|$ .

Рассмотрим случай, когда число вершин графа равно  $M(d, 3)$ , а образующие  $s_2$  и  $s_3$  определяются формулами (5). Пусть  $p = 2\lfloor d/3 \rfloor$ . Для  $d \equiv 0 \pmod{3}$  имеем семейство оптимальных графов

$$\Gamma = \{(N(p); 1, s_2(p), s_3(p)), \quad p \text{ четное}\}, \quad (19)$$

$$N = 4p^3 + 4p^2 + 3p + 1, \quad s_2 = 2p + 1, \quad s_3 = 4p^2 + 2p + 1.$$

Вычислим аналитическим методом функцию кратчайших расстояний  $D(0, v)$  для всех графов семейства  $\Gamma$ .

**Теорема 3.** Пусть  $G \in \Gamma$  (здесь  $\Gamma$  определяется посредством (19)) есть циркулянтный граф и  $r = 2p^2 + 2p + 1$ . Для любой вершины  $0 \leq v < N$  графа  $G$  пусть

$$i = \lfloor v/s_3 \rfloor, \quad j = \lfloor \Delta_v/s_2 \rfloor, \quad k = \Delta_v \pmod{s_2} - p - 1,$$

где

$$\Delta_v = \begin{cases} v \pmod{s_3}, & \text{если } v \pmod{s_3} \leq r; \\ 2r - v \pmod{s_3} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда

$$D(0, v) = \begin{cases} 2p - i - j + |k|, & \text{если } i + j > 3p/2 \text{ или } p/2 \leq i + j \leq 3p/2 \\ & \text{и } |k| \leq -p/2 + i + j; \\ p + 1 + i + j - |k| & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для любой вершины  $0 \leq v < N$  графа семейства  $\Gamma$  получен следующий *Алгоритм вычисления вектора кратчайшего пути*  $P(0, v)$ :

**begin**

$a = 0$ ;  $\Delta = v \pmod{s_3}$ ;  $r = 2p^2 + 2p + 1$ ;

**if**  $\Delta > r$  **then**  $\{\Delta = 2r - \Delta$ ;  $a = 1\}$ ;

$i = v \operatorname{div} s_3$ ;  $j = \Delta \operatorname{div} s_2$ ;  $k = \Delta \pmod{s_2} - p - 1$ ;

**if**  $(p/2 \leq i + j \leq 3p/2$  **and**  $|k| \leq -p/2 + i + j)$  **or**  $i + j > 3p/2$  **then**

$\{P_3 = i - p$ ;  $P_2 = j - p$ ;  $P_1 = k$ ;

**if**  $a = 1$  **then**  $\{P_2 = -P_2$ ;  $P_1 = -P_1\}$ ;

**stop**

}

$P_3 = i$ ;

**if**  $(0 \leq i + j < p/2$  **and**  $k \leq 0)$  **or**  $(p/2 \leq i + j \leq 3p/2$  **and**  $k < p/2 - i - j)$  **then**

$\{P_2 = j$ ;  $P_1 = k + p + 1\}$

```

else { $P_2 = j + 1$ ;  $P_1 = k - p$ };
if  $a = 1$  then
  { $P_3 = P_3 + 1$ ;  $P_2 = -P_2 + 1$ ;  $P_1 = -P_1$ };
end

```

Как видим, полученный алгоритм вычисления вектора кратчайшего пути не зависит от числа вершин в графе и имеет сложность  $O(1)$ . В работе [26] дано аналогичное решение проблемы поиска кратчайших путей для семейства сетей с максимальным порядком и образующими, определяемыми соотношениями (17). Найденный алгоритм позволяет быстро вычислять в каждой вершине пути между любыми источниками и приемниками сообщений без использования табличного представления сети, помещенного в каждой вершине. Схема алгоритма парной маршрутизации (АПМ) для графов рассмотренного семейства имеет следующий вид:

1. АПМ вычисляет вектор кратчайших путей  $P$  в вершине-источнике сообщения, используя номер вершины-приемника.

2. В каждой промежуточной вершине (и вершине-источнике) АПМ выбирает номер выходного направления, принадлежащего кратчайшему пути до вершины-приемника, и вектор  $P$  модифицируется так, чтобы модифицированный вектор  $P'$  задавал остаток кратчайшего пути до вершины-приемника. При этом выбор номера выходного направления может учитывать не только нулевые координаты вектора  $P'$ , но также текущие состояния смежных вершин и линий связи (отказы, нагрузку).

3. АПМ завершается, когда все координаты  $P'$  равны 0.

Приведенный алгоритм допускает простую модификацию, учитывающую возможные отказы процессоров и линий связи в системе. Отказоустойчивый вариант алгоритма может быть получен аналогично алгоритму маршрутизации при наличии отказов, найденному для двумерных циркулянтных сетей [2].

2.2. Алгоритм трансляционного обмена. Рассмотрим трансляционный обмен при дуплексной модели коммутации сообщений для трехмерных оптимальных циркулянтных сетей семейства  $\Gamma$ : требуется организовать передачу сообщений из любого процессора во все другие за минимальное время и без дублирования сообщений. Последнее требование вызвано необходимостью минимизировать нагрузку в сети при коллективных обменах. Одно из решений проблемы заключается в построении минимального покрывающего дерева с корнем в источнике и передаче копий сообщения только по направленным ребрам этого дерева. Данный метод использовался для двумерных циркулянтных сетей и трансляционного обмена в гиперкубах. Вследствие регулярности связей вид этих деревьев одинаков из любой вершины-источника.

На рис. 2 показана нумерация выходных (входных) полюсов процессоров и соответствие их образующим трехмерного циркулянтного графа. На рис. 3 приведен фрагмент минимального покрывающего дерева (не показаны ребра, соответствующие образующим  $\pm s_1$ ) для циркулянта с числом вершин  $N = 333$  и диаметром 6. Вершина-источник расположена в центре, стрелки на ребрах указывают на-

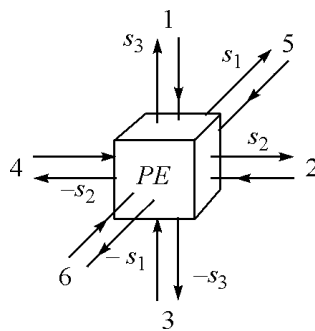


Рис. 2

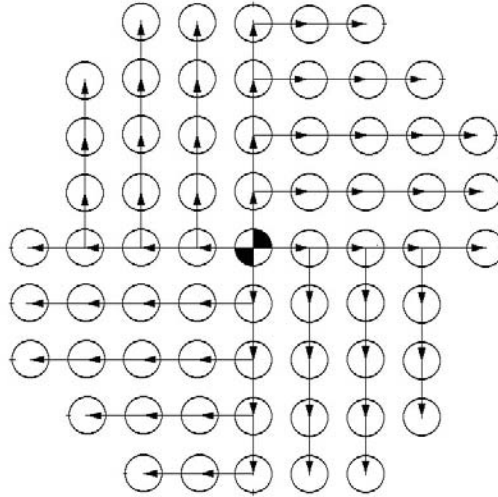


Рис. 3

правления передач копий сообщения между смежными процессорами по линиям связи, соответствующим образующим  $s_2$  (по горизонтали) и  $s_3$  (по вертикали). Рассматриваемый далее алгоритм трансляционного обмена использует обобщение представленного покрывающего дерева для всех графов семейства  $\Gamma$ .

Структура сообщения для трансляционного обмена имеет вид

$$msg := \{T, U, V, W, B(n, j)\},$$

где  $T$  – текст сообщения;  $U, V, W$  – счетчики числа шагов между процессором, выполняющим алгоритм, и процессором-источником по линиям связи, соответствующим трем образующим;  $B(n, j)$  – признак трансляционного обмена ( $n$  – номер процессора,  $j$  – номер обмена). Если сообщение с  $B(n, j)$  прибывает в процессор первый раз, оно должно быть принято, в противном случае процессор заканчивает алгоритм обмена. Это позволяет избежать передач лишних копий сообщения по линиям связи, соответствующим образующим  $\pm s_1$ , и ограничить требуемое число шагов алгоритма диаметром графа. Если необходимо передать копии полученного сообщения соседям, алгоритм трансляционного обмена определяет номера выходных полюсов, а затем устанавливает сообщение в выходную очередь. Алгоритм начинает работу в транзитном процессоре (или источнике) после получения сообщения с признаком  $B(n, j)$  с входа 1–6 (или 0). В транзитном процессоре параметры  $U_m, V_m, W_m$  поступившего с входа  $i$  сообщения преобразуются в параметры  $U, V, W$  для сообщения в выходной очереди.

*Алгоритм трансляционного обмена в процессоре-источнике:*

```

begin
   $U := 0; V := 0; W := 0;$ 
  for  $i = 1$  to 6 do send  $msg$  from input 0 to output  $i$ 
end

```

*Алгоритм трансляционного обмена в транзитном процессоре:*

```

begin
  if msg is received for the first time then send msg from input i to output 0
  else {delete msg from input i; stop};
  if  $i > 4$  then
    { $U := U_m + 1$ ;  $V := V_m$ ;  $W := W_m$ ;
    if  $U + V + W = d$  then stop
    else {send msg from input i to output  $(11 - i)$ ; stop}
    }
  else
    if  $i \bmod 2 = 1$  then
      { $U := U_m$ ;  $V := V_m$ ;  $W := W_m + 1$ }
    else { $U := U_m$ ;  $V := V_m + 1$ ;  $W := W_m$ };
    if  $V + W = d$  then stop
    else for  $k = 5$  to 6 do send msg from input i to output  $k$ ;
    if  $V = 0$  or ( $W = 0$  and  $V < p$ ) then send msg from input i to output  $(i + 2) \bmod 4 + 1$ ;
    if ( $i \bmod 2 = 1$  and  $W = p$ ) or ( $i \bmod 2 = 0$  and  $V = p$ ) then stop
    else send msg from input i to output  $(i + 1) \bmod 4 + 1$ ;
  end

```

Алгоритм допускает простую модификацию, учитывающую возможные отказы процессоров и линий связи. При этом используются обходные пути по дополнительным ребрам, не входящим в покрывающее дерево.

**Заключение.** Таким образом, получены оптимальные трехмерные циркулянтные сети с максимальным числом вершин, которые в своем классе обладают наилучшими структурными показателями, включая низкую задержку при передаче информации и высокую живучесть (за счет минимизации диаметра), а также имеют простые и эффективные алгоритмы маршрутизации, не использующие таблиц маршрутизации. Построенные алгоритмы обменов инвариантны к числу процессоров в системе и допускают простые модификации, учитывающие отказы процессоров и линий связи. Полученное семейство оптимальных сетей представляет интерес с практической точки зрения, так как циркулянтные графы степеней 4 и 6 используются в качестве коммуникационных сетей связи для реальных и проектируемых параллельных систем.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hwang F. K. A survey on multi-loop networks // Theor. Comput. Sci. 2003. **299**. P. 107.
2. Монахов О. Г., Монахова Э. А. Параллельные системы с распределенной памятью: структуры и организация взаимодействий. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
3. Bermond J.-C., Comellas F., Hsu D. F. Distributed loop computer networks: a survey // Journ. Parallel Distributed Comput. 1995. **24**. P. 2.
4. Cai J.-Y., Havas G., Mans B. et al. On routing in circulant graphs // Proc. of the Intern. Conf. (COCOON'99). Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1999. Vol. 1627. P. 360.
5. Liestman A. L., Opatrny J., Zaragoza M. Network properties of double and triple fixed-step graphs // Intern. Journ. Found. Comput. Sci. 1998. **9**. P. 57.
6. Boesch F. T., Wang J.-F. Reliable circulant networks with minimum transmission delay // IEEE Trans. Circuits Syst. 1985. **CAS-32**. P. 1286.
7. Wong C. K., Coppersmith D. A combinatorial problem related to multimodule memory organizations // Journ. Assoc. Comput. Mach. 1974. **21**. P. 392.

8. **Воробьев В. А.** Простейшие структуры однородных вычислительных систем // Вычисл. системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1974. Вып. 60. С. 35.
9. **Монахова Э. А.** Синтез оптимальных диофантовых структур // Вычисл. системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1979. Вып. 80. С. 18.
10. **Монахова Э. А.** Об аналитическом описании оптимальных двумерных диофантовых структур однородных вычислительных систем // Вычисл. системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1981. Вып. 90. С. 81.
11. **Bermond J.-C., Illiades G., Peyrat C.** An optimization problem in distributed loop computer networks // Proc. of Third Intern. Conf. on Combinatorial Math.; Ann. New York Academ. Sci., 1989. **555**. P. 45.
12. **Wong C. K., Maddocks T. W.** A generalized Pascal's triangle // Fibonacci Quart. 1975. **13**. P. 134.
13. **Корнеев В. В.** О макроструктуре однородных вычислительных систем // Вычисл. системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1974. Вып. 60. С. 17.
14. **Muga F. P.** Undirected circulant graphs // Proc. Intern. Symp. on Parallel Architectures, Algorithms and Networks. IEEE. 1994. P. 113.
15. **Yebra J. L. A., Fiol M. A., Morillo P., Alegre I.** The diameter of undirected graphs associated to plane tessellations // Ars Combinatoria. 1985. **20B**. P. 159.
16. **Du D.-Z., Hsu D. F., Li Q., Xu J.** A combinatorial problem related to distributed loop networks // Networks. 1990. **20**. P. 173.
17. **Chen S., Jia X.-D.** Undirected loop networks // Networks. 1993. **23**. P. 257.
18. **Narayanan L., Opatrny J., Sotteau D.** All-to-all optical routing in chordal rings of degree four // Algorithmica. 2001. **31**, N 2. P. 155.
19. **Mukhopadhyaya K., Sinha B. P.** Fault-tolerant routing in distributed loop networks // IEEE Trans. Comput. 1995. **44**, N 12. P. 1452.
20. **Монахова Э. А.** Алгоритмы межмашинных взаимодействий и реконфигурации графов связей в вычислительных системах с программируемой структурой // Вычисл. системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1982. Вып. 94. С. 81.
21. **Narayanan L., Opatrny J.** Compact Routing on Chordal Rings of Degree Four /Eds. D. Krizanc, P. Widmayer. Toronto: Carleton Sci., 1997. P. 125.
22. **Robic B., Zerovnik J.** Minimum 2-terminal routing in 2-jump circulant graphs // Comput. and Artificial Intelligence. 2000. **19**, N 1. P. 37.
23. **Barriere L., Fabrega J., Simo E., Zaragoza M.** Fault-tolerant routings in chordal ring networks // Networks. 2000. **36**, N 3. P. 180.
24. **Comellas F., Mitjana M., Peters J. G.** Broadcasting in small-world communication networks // Proc. 9th Intern. Coll. on Structural Information and Communication Complexity. 2002. P. 73.
25. **Monakhova E.** Optimal triple loop networks with given transmission delay: topological design and routing // Proc. of the Intern. Network Optimization Conf. (INOC'2003). Evry, Paris: INT, 2003. P. 410.
26. **Monakhova E.** Two-terminal routing in dense families of triple loop computer networks // Proc. of the 8th Intern. Conf. "Problems of Operation of Information Networks". Novosibirsk: AIC Price Courier, 2004. P. 253.

*Поступила в редакцию 3 ноября 2005 г.*