УДК 629.124.791.2.039

ВЛИЯНИЕ СНЕЖНОГО ПОКРОВА НА ПАРАМЕТРЫ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ЛЕДЯНОМ ПОКРОВЕ

В. М. Козин, В. Л. Земляк*, В. Ю. Верещагин**

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, 681005 Комсомольск-на-Амуре
* Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, 681013 Комсомольск-на-Амуре
** Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет, 681000 Комсомольск-на-Амуре
E-mail: klirickv@gmail.com

Представлена математическая модель для анализа напряженно-деформированного состояния ледяного покрова при наличии слоя снега, которое возникает под действием динамических нагрузок. С использованием модели неразрушаемого льда выполнены численные расчеты и проведено их сравнение с известными экспериментальными данными.

Ключевые слова: изгибно-гравитационные волны, резонансный метод разрушения льда, резонансная скорость.

Введение. Разрушение ледяного покрова может осуществляться различными способами и техническими средствами. Перспективным методом разрушения ледяного покрова является резонансный метод, заключающийся в возбуждении во льду резонансных изгибно-гравитационных волн движущимися нагрузками, в частности амфибийными судами на воздушной подушке [1]. При проведении ледокольных работ резонансным методом свободный от снега ледяной покров встречается редко. Данная работа посвящена исследованию влияния снежного покрова на параметры изгибно-гравитационных волн, возбуждаемых в ледяном покрове движущимися нагрузками.

1. Теоретические зависимости. Рассмотрим задачу деформирования бесконечной флотирующей ледяной пластины с плотностью ρ_1 при движении по ней системы поверхностных давлений q со скоростью u. Используется следующая система координат: плоскость xOy совпадает с невозмущенной поверхностью раздела лед — вода, направление оси x совпадает с направлением движения судна, ось z направлена вертикально вверх. Предполагается, что вода представляет собой идеальную несжимаемую жидкость с плотностью ρ_2 и ее движение является потенциальным. Ледяной покров моделируется вязкоупругой изначально не напряженной изотропной пластиной.

В общем случае уравнение малых колебаний плавающей вязкоупругой ледяной пластины записывается в виде [2]

$$\frac{G_m h^3}{3}\,Q\Big(3P+\frac{GQ}{K}\Big)\nabla^4 w = P\Big(3P+\frac{2GQ}{K}\Big)\Big(-q-\rho_2 g w-\rho_1 h\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\rho_2\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{z=0}\Big), \qquad (1)$$

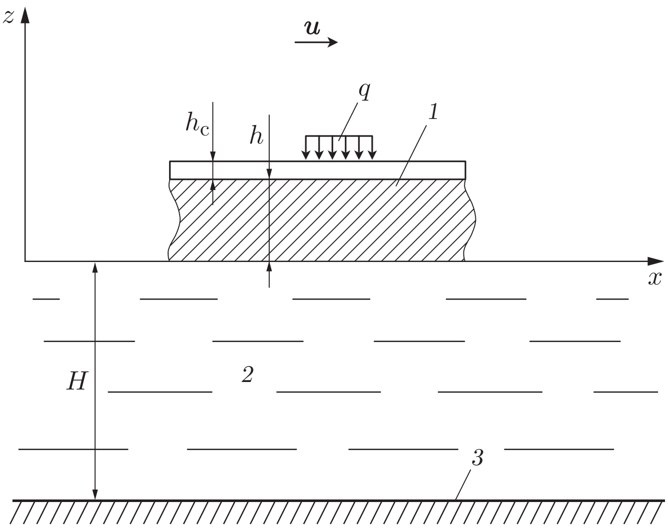

Рис. 1. Расчетная схема:
1 — лед, *2* — вода, *3* — дно водоема

где $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x} \cdot \boldsymbol{i} + \dfrac{\partial}{\partial y} \cdot \boldsymbol{j} + \dfrac{\partial}{\partial z} \cdot \boldsymbol{k}$; G_m — модуль упругости при сдвиге; g — ускорение свободного падения; $G = E/[2(1+\nu)]$; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; K — модуль всестороннего сжатия; P, Q — линейные дифференциальные операторы [3], выбираемые в зависимости от принятой для льда реологической модели; h — толщина ледяной пластины; w — вертикальное перемещение льда и воды; $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ — функция потенциала скорости жидкости, удовлетворяющая уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$. В качестве линейной вязкоупругой среды, имитирующей лед, выбрана среда, полученная из моделей Максвелла и Кельвина, соединенных последовательно. Без учета упругой сжимаемости льда ($K \to \infty$) уравнение (1) принимает вид

$$\frac{G_m h^3}{3} Q \nabla^4 w = P\Big(-q - \rho_2 g w - \rho_1 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho_2 \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big|_{z=0}\Big). \tag{2}$$

В данной работе рассматривается случай, когда пластина покрыта слоем снега толщиной h_c (рис. 1), упругость которого пренебрежимо мала по сравнению с упругостью ледяной пластины, т. е. ею можно пренебречь. Для учета вязкости слоя снега в уравнение (2) введены дополнительные члены. Как известно, снежный покров на льду можно моделировать слоем вязкой жидкости с коэффициентом внутреннего трения η_c [2], т. е. не учитывать объемную (вторую) вязкость, характеризующую необратимое превращение механической энергии в теплоту, происходящее при объемных деформациях и при прохождении звуковых и ультразвуковых волн в жидкостях. Сжатие снега непосредственно под нагрузкой не влияет на параметры изгибно-гравитационных волн, так как площадь сжатой области пренебрежимо мала по сравнению со всей площадью колеблющегося ледяного покрова. Добавляя в дифференциальное уравнение изгиба ледяной пластины (2) инерционные силы $\rho_c h_c\, \partial^2 w/\partial t^2$ и силы, обусловленные вязкостью снежного покрова, $\eta_c h_c\, \partial \nabla^2 w/\partial t$, получаем уравнение малых колебаний плавающей вязкоупругой ледяной пластины с учетом наличия слоя снега:

$$\frac{G_m h^3}{3} Q \nabla^4 w = P\Big(-q - \rho_2 g w - (\rho_1 h + \rho_c h_c) \frac{\rho_2 w}{\partial t^2} - \\ - \eta_c h_c \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w - \rho_2 w - \rho_2 \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big|_{z=0}\Big). \tag{3}$$

Здесь

$$P = \tau_m^{-1} + \Big(1 + \frac{G_m}{G_k} + \frac{\tau_k}{\tau_m}\Big)\frac{\partial}{\partial t} + \tau_k\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \qquad Q = \frac{\partial}{\partial t} + \tau_k\,\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

ρ_c — плотность снежного покрова; τ_m, τ_k — времена релаксации в моделях Максвелла и Кельвина — Фойгта; G_m, G_k — соответствующие модули упругости при сдвиге.

При стационарном режиме движения нагрузки уравнение (3) принимает вид

$$\frac{G_m h^3}{3}\Big(-u\,\frac{\partial}{\partial x} + \tau_k u^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)\nabla^4 w + \Big(\tau_m^{-1} + \Big(1 + \frac{G_m}{G_k} + \frac{\tau_k}{\tau_m}\Big)\Big(-u\,\frac{\partial}{\partial x}\Big) + \tau_k u^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big) \times$$
$$\times \Big(q + \rho_2 g w + (\rho_1 h + \rho_c h_c)u^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta_c h_c\Big(-u\,\frac{\partial}{\partial x}\Big)\nabla^2 w - \rho_2 u\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{z=0}\Big) = 0. \qquad (4)$$

Решение уравнения (4) при $q = \mathrm{const}$ и краевых условиях

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=-H} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=0} = -u\,\frac{\partial w}{\partial x}$$

в области $x_1 \in [-L/2; L/2]$, $y_1 \in [-L/(2\omega); L/(2\omega)]$ имеет вид

$$\mathrm{Re}\,(w(x,y)) = \frac{q_0}{4\rho_2 u^2\alpha_1\alpha_2}\int\limits_0^\infty \lambda^2\,\mathrm{th}\,(\lambda H)\int\limits_0^\lambda \cos\,(\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\,y) \times$$
$$\times \frac{\sin\,(\alpha L/2)\sin\,(\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\,L/(2\omega))}{\mathrm{sh}\,(\pi\alpha/(2\alpha_1))\,\mathrm{sh}\,(\pi\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\,/(2\alpha_2))}\,\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\,(\xi^2+\eta^2)} \times$$
$$\times \Big[\Big((\tau_m^{-1} - \tau_k u^2\alpha^2)\cos\,(\alpha x) + \Big(1 + \frac{G_m}{G_k} + \frac{\tau_k}{\tau_m}\Big)u\alpha\sin\,(\alpha x)\Big)\xi +$$
$$+ \Big((\tau_m^{-1} - \tau_k u^2\alpha^2)\sin\,(\alpha x) - \Big(1 + \frac{G_m}{G_k} + \frac{\tau_k}{\tau_m}\Big)u\alpha\cos\,(\alpha x)\Big)\eta\Big]\,d\alpha\,d\lambda,$$

где

$$\xi = -\frac{G_m h^3\alpha^2\lambda^5\tau_k\,\mathrm{th}\,(\lambda H)}{3\rho_2} + \tau_m^{-1}\Big(\frac{g\lambda\,\mathrm{th}\,(\lambda H)}{u^2} - \frac{\alpha^2\lambda(\rho_1 H + \rho_c h_c)\,\mathrm{th}\,(\lambda H)}{\rho_2} - \alpha^2\Big) +$$
$$+ \Big(1 + \frac{G_m}{G_k} + \frac{\tau_k}{\tau_m}\Big)\frac{\eta_c h_c\alpha^2\lambda^3\,\mathrm{th}\,(\lambda H)}{\rho_2} +$$
$$+ \tau_k\alpha^2\Big(-g\lambda\,\mathrm{th}\,(\lambda H) + \frac{u^2\alpha^2\lambda(\rho_1 h + \rho_c h_c)\,\mathrm{th}\,(\lambda H)}{\rho_2} + u^2\alpha^2\Big),$$

$$\eta = -\frac{G_m h^3\alpha^3\lambda^5\,\mathrm{th}\,(\lambda H)}{3\rho_2 u} + \tau_m^{-1}\,\frac{\eta_c h_c\alpha\lambda^3\,\mathrm{th}\,(\lambda H)}{u\rho_2} +$$
$$+ \Big(1 + \frac{G_m}{G_k} + \frac{\tau_k}{\tau_m}\Big)\Big(-\frac{\alpha g\lambda\,\mathrm{th}\,(\lambda H)}{u} + \frac{u\alpha^3\lambda(\rho_1 h + \rho_c h_c)\,\mathrm{th}\,(\lambda H)}{\rho_2} + u\alpha^3\Big) -$$
$$- \tau_k\,\frac{u\alpha^3\eta_c h_c\lambda^3\,\mathrm{th}\,(\lambda H)}{\rho_2}.$$

2. Определение полей изгибных напряжений. Изгибные и крутящий моменты, действующие в сечениях, нормальных к осям x, y, связаны с прогибом пластины зависимостями

$$M_x = -D\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(w + \tau_f\,\frac{\partial w}{\partial t}\Big) + \nu\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(w + \tau_f\,\frac{\partial w}{\partial t}\Big)\Big),$$

$$M_y = -D\Big(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(w + \tau_f\,\frac{\partial w}{\partial t}\Big) + \nu\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(w + \tau_f\,\frac{\partial w}{\partial t}\Big)\Big),$$

$$M_{xy} = D(1-\nu)\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Big(w + \tau_f\,\frac{\partial w}{\partial t}\Big),$$

где $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ — цилиндрическая жесткость; $\tau_f = \eta/E$ — время релаксации деформаций. Таким образом,

$$\sigma^0_{x\,\max} = \pm 6M_x/h^2, \quad \sigma^0_{y\,\max} = \pm 6M_y/h^2, \quad \tau^0_{xy\,\max} = \pm 6M_{xy}/h^2,$$

где

$$M_x = D\,\frac{q_0}{4\rho_2 u^2\alpha_1\alpha_2}\int\limits_0^\infty \lambda^2\,\mathrm{th}\,(\lambda h)\int\limits_0^\lambda (\alpha^2 + \nu(\lambda^2-\alpha^2))\cos\big(\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\,y\big)\times$$
$$\times\frac{\sin(\alpha L/2)\sin\big(\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\,L/(2\omega)\big)}{\mathrm{sh}\,(\pi\alpha/(2a_1))\,\mathrm{sh}\,(\pi\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}/(2\alpha_2))}\,\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\,(\xi^2+\eta^2)}\times$$
$$\times\Big[\Big((\tau_m^{-1} - \tau_k u^2\alpha^2)\cos(\alpha x) + \Big(1 + \frac{G_m}{G_k} + \frac{\tau_k}{\tau_m}\Big)u\alpha\sin(\alpha x)\Big)\xi +$$
$$+\Big((\tau_m^{-1} - \tau_k u^2\alpha^2)\sin(\alpha x) - \Big(1 + \frac{G_m}{G_k} + \frac{\tau_k}{\tau_m}\Big)u\alpha\cos(\alpha x)\Big)\eta\Big]\,d\alpha\,d\lambda,$$

$$M_y = D\,\frac{q_0}{4\rho_2 u^2\alpha_1\alpha_2}\int\limits_0^\infty \lambda^2\,\mathrm{th}\,(\lambda h)\int\limits_0^\lambda (\lambda^2-\alpha^2+\nu\lambda^2)\cos\big(\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\,y\big)\times$$
$$\times\frac{\sin(\alpha L/2)\sin\big(\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\,L/(2\omega)\big)}{\mathrm{sh}\,(\pi\alpha/(2a_1))\,\mathrm{sh}\,(\pi\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\,/(2\alpha_2))}\,\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\,(\xi^2+\eta^2)}\times$$
$$\times\Big[\Big((\tau_m^{-1} - \tau_k u^2\alpha^2)\cos(\alpha x) + \Big(1 + \frac{G_m}{G_k} + \frac{\tau_k}{\tau_m}\Big)u\alpha\sin(\alpha x)\Big)\xi +$$
$$+\Big((\tau_m^{-1} - \tau_k u^2\alpha^2)\sin(\alpha x) - \Big(1 + \frac{G_m}{G_k} + \frac{\tau_k}{\tau_m}\Big)u\alpha\cos(\alpha x)\Big)\eta\Big]\,d\alpha\,d\lambda,$$

$$M_{xy} = D(1-\nu)\,\frac{q_0}{4\rho_2 u^2\alpha_1\alpha_2}\int\limits_0^\infty \lambda^2\,\mathrm{th}\,(\lambda h)\int\limits_0^\lambda \alpha\sin\big(\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\,y\big)\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\times$$
$$\times\frac{\sin(\alpha L/2)\sin\big(\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\,L/(2\omega)\big)}{\mathrm{sh}\,(\pi\alpha/(2a_1))\,\mathrm{sh}\,(\pi\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\,/(2\alpha_2))}\,\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\,(\xi^2+\eta^2)}\times$$
$$\Big[\Big(-(\tau_m^{-1} - \tau_k u^2\alpha^2)\sin(\alpha x) + \Big(1 + \frac{G_m}{G_k} + \frac{\tau_k}{\tau_m}\Big)u\alpha\cos(\alpha x)\Big)\xi +$$
$$+\Big((\tau_m^{-1} - \tau_k u^2\alpha^2)\cos(\alpha x) + \Big(1 + \frac{G_m}{G_k} + \frac{\tau_k}{\tau_m}\Big)u\alpha\sin(\alpha x)\Big)\eta\Big]\,d\alpha\,d\lambda.$$

Результаты расчетов напряжений по приведенным выше зависимостям представлены на рис. 2 ($\bar\sigma_x = \sigma_x/\sigma_{x0}$, σ_{x0} — статические напряжения). Характеристики ледяного покрова взяты из работы [4].

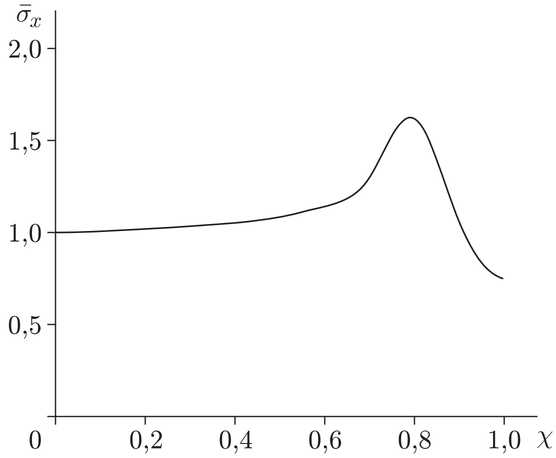

Рис. 2. Зависимость наибольших относительных напряжений в ледяном покрове от скорости нагрузки $\chi = u/\sqrt{gH}$

Для проверки полученных зависимостей проведено сравнение результатов теоретических расчетов прогибов ледяного покрова без снежного покрова с экспериментальными данными [4] при следующих значениях параметров: $\rho_2 = 1000$ кг/м^3, $\rho_1 = 900$ кг/м^3, $h = 0{,}075$ м, $H = 6{,}8$ м, $L = 1{,}23$ м, $q_0 = 406{,}5$ Па, $\tau_m = \tau_k = 0{,}34$ с. Полученные результаты представлены на рис. 3.

Следует отметить, что вблизи движущейся нагрузки, т. е. в области возникновения максимальных прогибов, в которой вероятность разрушения ледяного покрова наибольшая, результаты хорошо согласуются.

3. Исследование влияния вязкого слоя на напряженно-деформированное состояние льда. Теоретические расчеты напряженно-деформированного состояния ледяной пластины при наличии на ней вязкого слоя (снежного покрова) проводились при следующих значениях параметров: коэффициент внутреннего трения вязкого слоя $\eta_{\text{с}} = -0{,}3 \cdot 10^6$ П, толщина вязкого слоя $h_{\text{с}} = 0{,}5$; 1,0 м, интенсивность нагрузки $q = 3300$ Па, площадь распределения нагрузки $s = 350$ м^2, длина судна $L = 2{,}4$ м, глубина водоема $H = 10$ м. Скорость движения нагрузки варьировалась в диапазоне $\chi = 0 \div 1{,}2$. Проведена серия экспериментов с использованием неразрушаемой модели льда в оптовом бассейне с размерами $5{,}0 \times 1{,}8 \times 0{,}6$ м [5] и известной методики моделирования [6]. В экспериментах ледяной покров моделировался упругой пленкой с известным модулем упругости $E = 5 \cdot 10^9$ Па. Толщина ледяного и снежного покровов, а также глубина водоема, параметры нагрузки и скорость ее перемещения принимались такими же, как в теоретических расчетах.

Результаты расчетов напряженно-деформированного состояния льда и данные экспериментов приведены на рис. 4 ($\bar{w} = w/w_{sp}$, $\bar{\sigma}_x = \sigma_x/\sigma_{xsp}$, $\bar{\sigma}_y = \sigma_y/\sigma_{ysp}$, w, σ_x, σ_y — статические прогиб и напряжения, w_{sp}, σ_{xsp}, σ_{ysp} — прогиб и напряжения с учетом снежного покрова). На рис. 4 представлены графики относительных перемещений $\bar{w}$ и относительных напряжений $\bar{\sigma}$. Видно, что наличие вязкого слоя, как и следовало ожидать, приводит к уменьшению напряжений и при наличии на ледяном покрове плотного слежавшегося снега с большой вязкостью его влияние на напряженно-деформированное состояние льда может быть значительным.

Анализ результатов выполненных исследований показывает, что с использованием предлагаемой модели можно проводить расчеты напряженно-деформированного состояния ледяной пластины с учетом наличия снежного покрова.

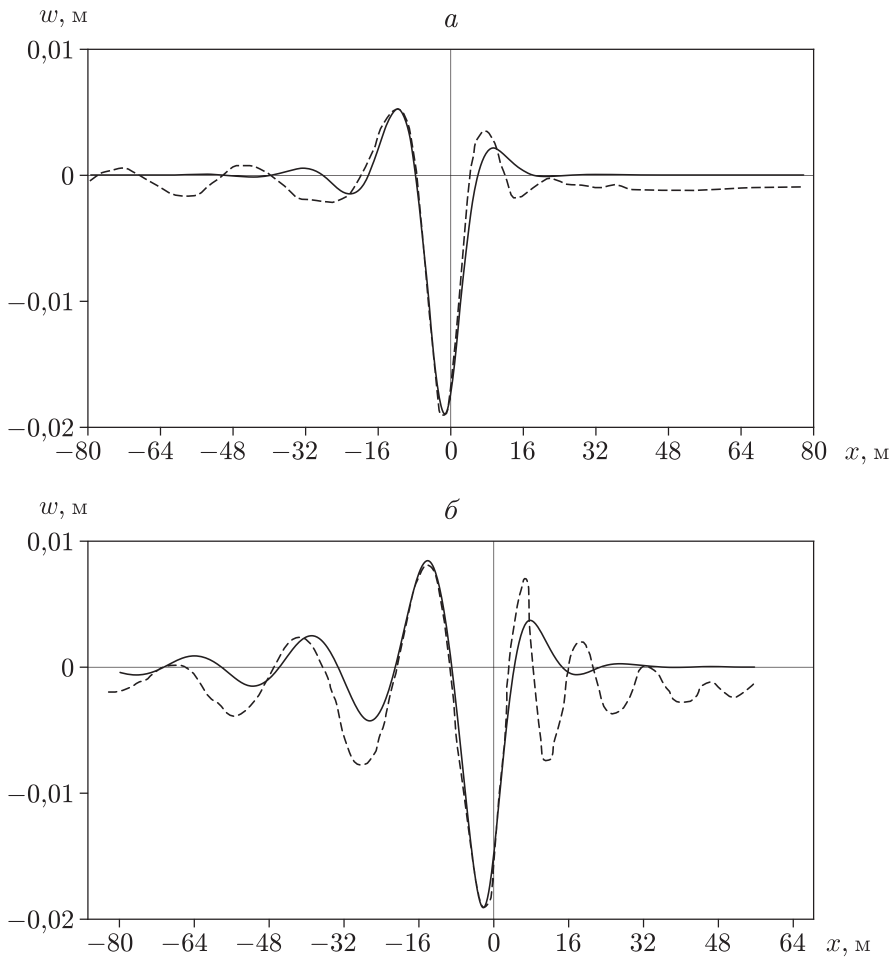

Рис. 3. Прогибы ледяной пластины при различных скоростях судна:
а — $u = 4{,}2$ м/с, *б* — $u = 5{,}6$ м/с; сплошные линии — результаты расчетов, штриховые — экспериментальные данные [4]

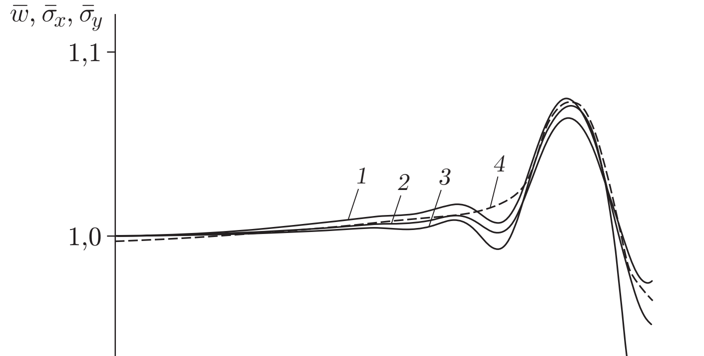

Рис. 4. Относительные прогибы $\bar{w}$ и напряжения $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ в ледяном покрове:
1, 4 — относительный прогиб $\bar{w}$ (*1* — результаты расчетов, *4* — данные экспериментов), *2* — относительные продольные напряжения $\bar{\sigma}_x$, *3* — относительные поперечные напряжения $\bar{\sigma}_y$

Натурные эксперименты [1] показали, что разрушить свободные от снега участки льда легче, чем заснеженный ледяной покров. Это свидетельствует о необходимости корректировки известных данных о ледоразрушающей способности судна на воздушной подушке в случае чистого льда [1] с полученными теоретическими результатами. Использование этих результатов при определении максимальной разрушаемой толщины слоя льда с учетом наличия снежного покрова позволит более эффективно планировать проведение ледокольных работ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Козин В. М.** Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперименты. М.: Акад. естествознания, 2007.
2. **Хейсин Д. Е.** Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоиздат, 1967.
3. **Филиппов А. П.** Установившиеся колебания бесконечно длинной балки, лежащей на упругом полупространстве, под действием движущейся силы // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Механика и машиностроение. 1961. № 6. С. 97–105.
4. **Takizawa T.** Deflection of a floating sea ice sheet induced by a moving load // Cold Regions Sci. Technol. 1985. V. 11. P. 123–139.
5. **Земляк В. Л.** Лаборатория механики сплошных сред // Вестник Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета: Сб. науч. тр. Комсомольск-на-Амуре: Комс.-на-Амуре гос. техн. ун-т, 2009. С. 244–246.
6. **Козин В. М.** Обоснование исходных данных для выбора основных параметров СВП, предназначенных для разрушения ледяного покрова резонансным способом: Дис. ... канд. техн. наук. Горький, 1983.

Поступила в редакцию 17/II 2012 г.,
в окончательном варианте — 13/IX 2012 г.