

УДК 539.3; 539.4

## ПРЕДЕЛЬНАЯ СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИН В УПРУГИХ МАТЕРИАЛАХ

Н. И. Чекунаев, А. М. Каплан

Институт химической физики им. Н. Н. Семенова РАН, 119991 Москва

E-mail: nichek@mail.ru

Трещина представляется в виде непрерывной совокупности линейных дислокаций. Получены простые аналитические выражения для потенциальной и кинетической энергий окружения движущихся трещин и присоединенной массы трещин при произвольном виде приложенного к трещине напряжения  $P(x)$ . Показано, что указанные аналитические выражения представляют собой билинейные интегралы от функций  $P(x)$  и  $\partial P(x)/\partial x$ . Эти интегралы вычислены в явном виде для постоянного напряжения по всей длине трещины и напряжения, обусловленного действием молекулярных сил сцепления в узкой области вблизи устьев трещин. Показано, что результат расчетов не зависит от вида сил молекулярного сцепления. Использованный подход к описанию трещин и выполненные на основе этого подхода расчеты позволили впервые получить полное аналитическое выражение для предельной скорости распространения трещин в упругих материалах в зависимости от основных механических характеристик таких материалов.

**Ключевые слова:** трещина критического размера, предельная скорость трещины, упругое тело, присоединенная масса, механическое напряжение, дислокация.

**Введение.** При исследовании проблемы растрескивания твердых материалов одной из наиболее важных задач является определение (теоретическое и экспериментальное) зависимости скорости  $v$  распространения трещин от основных механических характеристик испытываемых материалов. Согласно имеющимся данным впервые такая зависимость для однородных напряженных материалов теоретически выведена в работе [1]. Дальнейшие исследования показали, что найденная в [1] зависимость скорости распространения трещин от их длины неверна [2, 3]. Однако в [1] получен важный результат: доказано существование предельной скорости  $v_{\max} = k\sqrt{E/\rho}$  распространения трещин сверхкритического размера в напряженных материалах при стремлении размера трещин к бесконечности. При этом значение безразмерного коэффициента  $k$  не определялось. Этот важный параметр вычислен в работе [2]. В предположении, что распределение деформаций в окрестности движущейся трещины в упругих материалах такое же, как и в окрестности стационарной, неподвижной трещины, в [2] получено значение  $k = 0,38$  лишь для одного значения коэффициента Пуассона  $\nu = 0,25$ . К настоящему времени опубликовано значительное количество работ, в которых проведен анализ различных моделей развития трещин сверхкритического размера [4–10]. Однако ни в одной из известных работ не получено важное для практического применения полное аналитическое выражение для предельной скорости распространения трещин  $v_{\max}$  в упругих материалах в зависимости от основных механических характеристик таких материалов, в частности от коэффициента Пуассона. Выводу указанной зависимости посвящена настоящая работа.

**1. Потенциальная энергия окружения нагруженной трещины.** Рассматривается линейная трещина (рис. 1) единичной длины в направлении, нормальном к плоскости рисунка, и длиной  $2a$  в направлении оси  $x$ . Ось  $y$  перпендикулярна плоскости трещины.

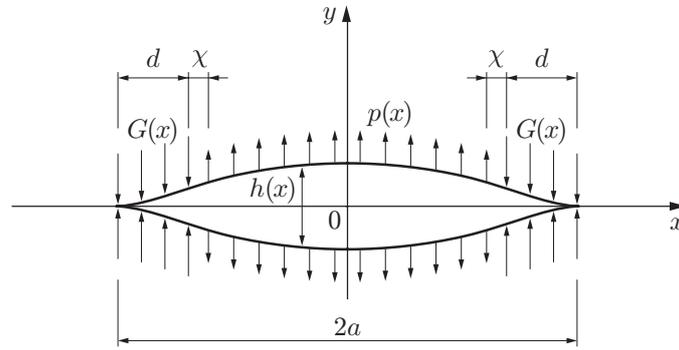


Рис. 1. Схема линейной трещины длиной  $2a$

К поверхности трещины приложено внешнее напряжение  $p(x)$ . Согласно [11] в узкой области размером  $d + \chi$  вблизи устьев трещины в направлении, противоположном направлению  $p(x)$ , действуют молекулярные силы сцепления, создающие дополнительное напряжение  $G(x)$  (см. рис. 1). Таким образом, полное напряжение на поверхности трещины равно

$$P(x) = p(x) - G(x).$$

Будем считать, что при бесконечном удалении от трещины напряжение равно нулю. Линейную трещину в упругой среде можно рассматривать как линию разрыва, на которой нормальная составляющая смещения имеет скачок:  $u_y(x) = \pm h(x)/2$  [12], где  $h(x)$  — переменная ширина трещины (см. рис. 1). Согласно [12] формально трещину можно трактовать как совокупность прямолинейных дислокаций, вытянутых вдоль оси  $z$  и непрерывно распределенных по оси  $x$  в интервале  $(-a, a)$ , с вектором Бюргерса  $\mathbf{b} = (0, b, 0)$ . Линейную плотность таких дислокаций обозначим  $\rho(x)$ . Ширина трещины  $h(x)$  связана с величиной  $\rho(x)$  соотношением [12]

$$h(x) = \int_{-a}^x \rho(\xi) d\xi.$$

При этом создаваемые трещиной деформация  $u_i$  и напряжение  $\sigma_{ik}$  (зависящее только от координат  $x$  и  $y$ ) определяются выражениями

$$\begin{aligned} u_i(x, y) &= \int_{-a}^a u_i^d(x - \xi, y) \rho(\xi) d\xi; \\ \sigma_{ik}(x, y) &= \int_{-a}^a \sigma_{ik}^d(x - \xi, y) \rho(\xi) d\xi, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где  $u_i^d, \sigma_{ik}^d$  — соответственно деформация и напряжение в материале, создаваемые единичной дислокацией. Используя приведенные в [12] выражения для  $u_i^d$  и  $\sigma_{ik}^d$  в случае плоской деформации, получаем выражения для деформации в материале

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_{-a}^a \left( \frac{1-2\nu}{2} \ln [(x-\xi)^2 + y^2] + \frac{y^2}{(x-\xi)^2 + y^2} \right) \rho(\xi) d\xi, \\ u_y(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \left( \arctg \frac{x-\xi}{y} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{(x-\xi)y}{(x-\xi)^2 + y^2} \right) \rho(\xi) d\xi. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Отсюда находим выражения для компонент тензора напряжений в случае плоской деформации:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, y) &= \frac{E}{4\pi(1-\nu^2)} \int_{-a}^a \rho(\xi) \frac{(x-\xi)(y^2 - (x-\xi)^2)}{[y^2 + (x-\xi)^2]^2} d\xi, \\ \sigma_{yy}(x, y) &= -\frac{E}{4\pi(1-\nu^2)} \int_{-a}^a \rho(\xi) \frac{(x-\xi)(3y^2 + (x-\xi)^2)}{[y^2 + (x-\xi)^2]^2} d\xi, \\ \sigma_{xy}(x, y) &= \frac{E}{4\pi(1-\nu^2)} \int_{-a}^a \rho(\xi) \frac{y[y^2 - (x-\xi)^2]}{[y^2 + (x-\xi)^2]^2} d\xi.\end{aligned}\quad (1.3)$$

Здесь и далее интегралы, содержащие полюс, понимаются в смысле главного значения;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона. В случае трещины с незакрепленными концами для плотности дислокаций справедливо выражение [12]

$$\rho(x) = -\frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^a \frac{P(\xi)}{\sqrt{a^2 - \xi^2} (\xi - x)} d\xi. \quad (1.4)$$

При нарушении равновесия меняется размер трещины, а следовательно, и распределение напряжений в окрестности трещины. При распространении неравновесной трещины наряду с действующими вблизи устьев трещины молекулярными силами, точный вид выражений для которых неизвестен, возникают дополнительные силы, в том числе инерционные, которые можно учесть, изменив вид функции  $G(x)$ . В реальном материале возникают также силы, обусловленные наличием пластической области вблизи вершин трещины. В общем случае это может привести к тому, что функция  $G(x)$  будет зависеть от размера и скорости движения трещины. В дальнейшем под величиной  $G(x)$  понимается напряжение, обусловленное действием молекулярных сил и дополнительных сил, создаваемых окружением. Следует отметить, что если молекулярные силы  $G(x)$  приложены в узкой (по сравнению с размером трещины) области вблизи устьев трещины, то окончательные выражения не зависят от конкретного вида этих сил. При этом принимается естественное предположение, что прилегающая к трещине область находится в состоянии квазистатического равновесия. Иными словами, справедливое для статической трещины условие равновесия [12]

$$\int_{-a}^a \frac{P(x) dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \quad (1.5)$$

выполняется и в рассматриваемом случае движения неравновесной трещины. Для равновесной трещины это условие обеспечивает равенство нулю напряжений на бесконечности [12]. В работе [10] приведено аналогичное условие квазистатического распространения трещины в виде равенства динамического фактора перенапряжения и динамической удельной энергии разрушения, которые могут зависеть от скорости и размера трещины.

С помощью выражений (1.3) можно вычислить упругую энергию, запасенную в материале, окружающем трещину. Для удельной упругой энергии  $f$  справедливо выражение [12]

$$f = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( u_{ik}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} u_{ii}^2 \right), \quad (1.6)$$

где тензор деформации  $u_{ik}$  связан с тензором напряжений соотношением

$$u_{ik} = [(1 + \nu)\sigma_{ik} - \nu\sigma_{ll}\delta_{ik}]/E. \quad (1.7)$$

Здесь  $\delta$  — символ Кронекера ( $\delta_{ik} = 1$  при  $i = k$ ,  $\delta_{ik} = 0$  при  $i \neq k$ ); по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Выражение для упругой энергии  $U$  напряжения материала в окрестности трещины может быть получено после подстановки (1.3) в (1.6), (1.7) и интегрирования по двумерному объему по  $x$  и  $y$ :

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy.$$

Интегралы по объему вычисляются стандартными методами. В результате после ряда упрощений получаем выражение для упругой энергии материала

$$U = -\frac{E}{8\pi(1 - \nu^2)} \int_{-a}^a \int_{-a}^a \rho(\xi)\rho(\xi') \ln |\xi - \xi'| d\xi d\xi'. \quad (1.8)$$

Подставляя в (1.8) выражение для  $\rho(x)$  из (1.4), имеем

$$U = \frac{2(1 - \nu^2)}{\pi E} \int_{-a}^a \int_{-a}^a P(\xi)P(\xi')J(\xi, \xi') d\xi d\xi',$$

где

$$J(x, y) = \ln \left| \frac{\sqrt{1 - x/a} / \sqrt{1 + x/a} + \sqrt{1 - y/a} / \sqrt{1 + y/a}}{\sqrt{1 - x/a} / \sqrt{1 + x/a} - \sqrt{1 - y/a} / \sqrt{1 + y/a}} \right|.$$

Учитывая симметрию приложенных к трещине напряжений:  $P(x) = P(-x)$ , выражение для упругой энергии можно представить в виде

$$U = \frac{4}{\pi} \frac{1 - \nu^2}{E} \int_0^a \int_0^a \ln \left| \frac{\sqrt{1 - \xi^2/a^2} + \sqrt{1 - \xi'^2/a^2}}{\sqrt{1 - \xi^2/a^2} - \sqrt{1 - \xi'^2/a^2}} \right| P(\xi)P(\xi') d\xi d\xi'. \quad (1.9)$$

Используя формулу [13]

$$\ln \frac{|q|}{|p|} = \int_0^{\infty} \frac{\cos pt - \cos qt}{t} dt,$$

выражение (1.9) можно привести к виду

$$U = \frac{8}{\pi} \frac{1 - \nu^2}{E} a^2 \int_0^{\infty} \frac{I_P^2(a, t)}{t} dt,$$

где

$$I_P(a, t) = \int_0^1 \sin(\sqrt{1 - x^2}t) P(ax) dx.$$

Вычислим упругую энергию для случая, когда к трещине приложено постоянное напряжение:  $p(x) = p_0$ , а сдерживающие трещину напряжения, обусловленные действием молекулярных сил вблизи вершины, имеют вид сглаженной ступеньки шириной  $d$ . При этом размер переходной области  $\chi$  определяется по формуле

$$G(x) = \frac{p_1}{2} \left( 1 + \operatorname{th} \frac{|x| - L}{\chi} \right), \quad (1.10)$$

где  $L = a - d$ . Следует учитывать, что напряжение  $p_1$ , обусловленное действием молекулярных сил, значительно больше приложенного к поверхности трещины внешнего напряжения:  $p_1 \gg p_0$ . При  $\chi \rightarrow 0$  после вычисления интеграла в (1.5) получаем

$$\arccos(L/a) = \pi p_0 / (2p_1). \quad (1.11)$$

Вычислив интеграл в (1.9), получим выражение для упругой энергии

$$U = \frac{\pi(1 - \nu^2)}{E} a^2 \left\{ p_0^2 + \frac{4}{\pi} p_0 p_1 \left[ \frac{L}{a} \sqrt{1 - \frac{L^2}{a^2}} - \arccos \left( \frac{L}{a} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{4}{\pi^2} p_1^2 \left[ \arccos^2 \left( \frac{L}{a} \right) - 2 \frac{L}{a} \sqrt{1 - \frac{L^2}{a^2}} \arccos \left( \frac{L}{a} \right) - \frac{L^2}{a^2} \ln \left( \frac{L^2}{a^2} \right) \right] \right\}. \quad (1.12)$$

Подставляя (1.11) в (1.12), имеем

$$U = -\frac{4(1 - \nu^2)}{\pi E} a^2 p_1^2 \cos^2 \left( \frac{\pi p_0}{2 p_1} \right) \ln \left[ \cos^2 \left( \frac{\pi p_0}{2 p_1} \right) \right].$$

При  $p_1 \gg p_0$  получаем известное выражение

$$U = \pi(1 - \nu^2) p_0^2 a^2 / E,$$

которое зависит только от приложенного внешнего напряжения  $p_0$  и не зависит от вида молекулярных сил.

**2. Кинетическая энергия окружения движущейся трещины.** Предположим, что движущаяся трещина находится в квазиравновесном состоянии, т. е. напряжения вокруг нее такие же, как и вокруг равновесной трещины. Это предположение справедливо, если трещина распространяется со скоростью, значительно меньшей скорости звука в материале. Правомерность данного предположения обсуждается ниже.

Локальные смещения в окрестности трещины задаются выражениями (1.1), (1.2). Эти смещения изменяются со временем при изменении размера трещины  $a$ . Тогда для распространяющейся трещины локальные компоненты вектора скорости  $v_x$  и  $v_y$  равны

$$v_{x(y)}(x, y) = \frac{du_{x(y)}(x, y, a)}{dt} = \frac{\partial}{\partial a} u_{x(y)}(x, y, a) \frac{da}{dt} = \frac{\partial}{\partial a} u_{x(y)}(x, y, a) v.$$

Здесь  $v = da/dt$  — скорость распространения трещины. Поскольку  $\rho(a, a) = \rho(-a, a) = 0$  [12], можно записать

$$\frac{\partial}{\partial a} u_{x(y)}(x, y, a) = \int_{-a}^a u_{x(y)}^d(x - \xi, y) \frac{\partial}{\partial a} \rho(\xi, a) d\xi.$$

Нетрудно показать, что при выполнении равенства (1.5) справедливо соотношение

$$\frac{\partial}{\partial a} \rho(x, a) = -\frac{4(1 - \nu^2)}{\pi E} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi - x + i\delta} \frac{\partial}{\partial a} P(\xi, a) d\xi.$$

Полная кинетическая энергия  $T$  материала равна

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{\rho}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (v_x^2 + v_y^2) dx dy = \frac{\rho v^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \left[ \left( \frac{\partial u_x(x, y, a)}{\partial a} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y(x, y, a)}{\partial a} \right)^2 \right] = \\
 &= \frac{\rho v^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \left( \int_{-a}^a \int_{-a}^a [u_x^d(x - \xi, y) u_x^d(x - \xi', y) + u_y^d(x - \xi, y) u_y^d(x - \xi', y)] \times \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{\partial}{\partial a} \rho(\xi, a) \frac{\partial}{\partial a} \rho(\xi', a) d\xi d\xi' \right) \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

( $\rho$  — плотность материала). Введем присоединенную (ассоциированную) массу трещины  $m$  согласно соотношению

$$T = mv^2/2. \quad (2.2)$$

Вычислив интегралы (2.1) с использованием выражения (1.2), получаем

$$m(a) = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \Theta(\xi, \xi') \frac{\partial}{\partial a} P(\xi, a) \frac{\partial}{\partial a} P(\xi', a) d\xi d\xi', \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned}
 \Theta(x, y) &= \frac{4\rho(1+\nu)^2}{\pi E^2} \left\{ \left( \nu^2 - \frac{3}{2}\nu + \frac{7}{8} \right) \left[ (x-y)^2 \ln \left| \frac{\sqrt{(a-x)/(a+x)} - \sqrt{(a-y)/(a+y)}}{\sqrt{(a-x)/(a+x)} + \sqrt{(a-y)/(a+y)}} \right| - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2 \left( 1 - \ln \frac{2R}{a} \right) \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{a^2 - y^2} \right] + \left( 3\nu^2 - \frac{21}{4}\nu + \frac{45}{16} \right) \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{a^2 - y^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{a^2 - y^2}}{12R^2} \left[ \left( -3\nu^2 + \frac{9}{2}\nu - \frac{33}{8} \right) xy + x^2 + y^2 + a^2 \right] \right\}. \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

В (2.1) интегралы имеют логарифмическую особенность, вследствие чего вводится радиус обрезания  $R$ . Физический смысл радиуса  $R$  — размер области материала, вовлеченного в движение вместе с трещиной, который определяется ниже. Для вычисления присоединенной массы трещины по формуле (2.3) можно принять, что при малых  $\chi$  функция  $G$  в (1.10) является ступенчатой. Тогда

$$\frac{\partial P(x, a)}{\partial a} = p_1 [\delta(x - L) + \delta(x + L)] \frac{\partial L}{\partial a} \quad (2.5)$$

( $\delta(x)$  — функция Дирака). Подставляя (2.4) и (2.5) в (2.3) и оставляя первые члены разложения по степеням  $p_0/p_1$ , получаем выражение для присоединенной массы трещины

$$m(a) = 8\pi \frac{p_0^2}{E^2} \rho a^2 (1+\nu)^2 \left[ \left( \nu^2 - \frac{3}{2}\nu + \frac{7}{8} \right) \ln \left( \frac{2R}{a} \right) - \frac{3}{8}\nu + \frac{3}{32} + \frac{a^2}{8R^2} \right]. \quad (2.6)$$

Таким образом, полученное выражение не зависит от вида молекулярных сил.

**3. Скорость распространения трещин в упругих материалах.** Скорость распространения трещины можно найти с помощью закона сохранения энергии, который записывается в виде

$$\frac{d}{dt} (T + U + E_S - W) = 0. \quad (3.1)$$

Здесь  $E_S = 4\Gamma a$  — поверхностная энергия трещины;  $\Gamma$  — коэффициент поверхностного натяжения материала;  $W$  — работа внешних сил [3]:

$$W = \int_{-a}^a h(x)P(x) dx = 2F. \quad (3.2)$$

Согласно соотношениям (1.13), (2.2) и (3.2) из (3.1) находим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m(a)v^2}{2} - \frac{\pi(1-\nu^2)p_0^2}{E} a^2 + 4\Gamma a \right) = 0. \quad (3.3)$$

Используя выражение (2.6) для присоединенной массы трещины  $m(a)$ , из (3.3) легко получить выражение

$$\frac{d}{dt} \left( a^2 \frac{v^2}{v_{\max}^2} - (a - a_{cr})^2 \right) = 0. \quad (3.4)$$

Здесь

$$a_{cr} = \frac{2\Gamma E}{\pi(1-\nu^2)p_0^2};$$

$$v_{\max}(R) = \sqrt{\frac{1-\nu}{4(1+\nu)[(\nu^2 - 3\nu/2 + 7/8) \ln(2R/a) - 3\nu/8 + 3/32 + a^2/(8R^2)]}} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (3.5)$$

Величина  $a_{cr}$  имеет смысл критического размера трещины [14], так как только для трещин с полудлиной  $a > a_{cr}$  выполняется условие положительности ускорения  $dv/dt$ . Следовательно, только такие трещины могут распространяться в однородном твердом теле с ускорением. Величина  $v_{\max}$  представляет собой предельную скорость распространения трещины при бесконечном увеличении размера трещины. Решение уравнения (3.4) записывается в виде

$$v = v_{\max}(1 - a_{cr}/a).$$

В (3.5)  $v_{\max}$  зависит от радиуса обрезания области интегрирования  $R$ , который следует определить. Зависимость максимальной (предельной) скорости хрупкого разрушения  $v_{\max}$  от  $R$  является логарифмической. Радиус  $R$  ограничен расстоянием, пройденным продольными упругими волнами, и связан со скоростью  $v_{\max}$  и скоростью продольных звуковых волн  $c_l$  соотношением [2]

$$v_{\max}(R) = c_l a / R. \quad (3.6)$$

В рассматриваемом случае хрупкого разрушения радиус обрезания  $R$  находится из уравнения (3.6):  $R = 2,6a$ . Напомним, что условием установления квазиравновесного состояния является неравенство  $v/c_l \ll 1$ . Поскольку согласно (3.6)  $v/c_l \sim a/R \approx 1/2,6$ , это условие выполняется слабо. Однако зависимость  $v_{\max}$  от радиуса обрезания  $R$  слабая (логарифмическая) (3.5), и, следовательно, можно ожидать, что полученный результат незначительно отличается от точного значения.

Следует отметить, что в соответствии с [12] все полученные в данной работе результаты для случая плоской деформации могут быть использованы и в случае плоского напряженного состояния. При этом в приведенных выше формулах нужно выполнить замену

$$E \rightarrow E \left( 1 - \frac{\nu^2}{(1+\nu)^2} \right), \quad \nu \rightarrow \frac{\nu}{1+\nu}.$$

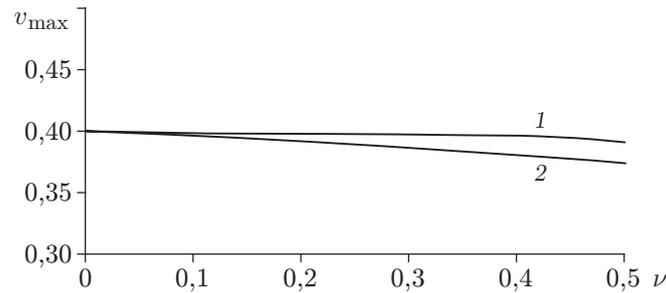


Рис. 2. Зависимость предельной скорости  $v_{\max}$  от коэффициента Пуассона  $\nu$ :  
1 — плоская деформация; 2 — плоское напряженное состояние

На рис. 2 представлена зависимость предельной скорости от коэффициента Пуассона для случаев плоской деформации и плоского напряженного состояния.

**Заключение.** Использованное в данной работе представление трещины в виде непрерывной совокупности линейных дислокаций позволило существенно упростить задачу нахождения потенциальной и кинетической энергий окружения, а также присоединенной массы движущейся трещины. Указанные параметры движущейся трещины представлены в виде двойных интегралов, которые вычисляются достаточно просто при изменении порядка интегрирования. В результате впервые удалось получить полное аналитическое выражение для предельной скорости  $v_{\max}$  распространения сверхкритических трещин в однородных материалах как функцию трех характеристических параметров ( $E$ ,  $\nu$ ,  $\rho$ ) таких материалов (3.5).

Вычисленное значение  $v_{\max}$  оказалось зависящим от радиуса  $R$  обрезания области интегрирования. Однако зависимость  $v_{\max}(R)$  является слабой (логарифмической) (см. 3.5), что позволяет, выбрав на основе решения уравнения (3.6) конкретное значение  $R = 2,6a$  ( $a$  — полудлина трещины), упростить полученное аналитическое выражение для  $v_{\max}$ :

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{1 - \nu}{4(1 + \nu)[(\nu^2 - 3\nu/2 + 7/8) \ln 5,2 - 3\nu/8 + 3/32]}} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Таким образом, появилась возможность рассчитывать величину предельной скорости распространения трещин  $v_{\max}$  в твердых материалах, для которых известны основные механические характеристики ( $E$ ,  $\nu$ ,  $\rho$ ). Например, при коэффициенте Пуассона  $\nu = 0,25$  предельная скорость  $v_{\max}$  трещин в однородных материалах, вычисленная по формуле (3.5), равна  $v_{\max} = 0,38\sqrt{E/\rho}$ , что совпадает с полученным численно в [2] выражением для  $v_{\max}$ .

Авторы выражают благодарность А. Н. Мохелю и Р. Л. Салганику за обсуждение работы и полезные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Mott N. F.** Fracture of metals: some theoretical considerations // Engng. 1948. V. 165. P. 16–18.
2. **Roberts D. K., Wells M. A.** The velocity of brittle fracture // Engng. 1954. V. 178, N 4639. P. 820.
3. **Финкель В. М.** Физика разрушения. М.: Metallurgy, 1970.
4. **Jin Yu.** The link between crack velocity and rupture time in creeping solids // Engng Fract. Mech. 1996. V. 53, N 2. P. 213–230.
5. **Klein P. A., Foulk J. W., Chen E. P., et al.** Physics-based modeling of brittle fracture: cohesive formulations and the application of meshfree methods // Theor. Appl. Fract. Mech. 2001. V. 37. P. 99–166.

6. **Broberg К. В.** Cracks and fracture. L.: Acad. Press, 1999.
7. **Broberg К. В.** Constant velocity crack propagation — dependence on remote load // Intern. J. Solids Struct. 2002. V. 39. P. 6403–6410.
8. **Nishioka Т.** Computational dynamic fracture mechanics // Intern. J. Fract. 1997. V. 86. P. 127–159.
9. **Ravi-Chandar К.** Dynamic fracture of nominally brittle materials // Intern. J. Fract. 1998. V. 90. P. 83–102.
10. **Freund L. В.** Dynamic fracture mechanics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
11. **Баренблатт Г. И.** Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. № 4. С. 3–56.
12. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1987.
13. **Градштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М.: Физматгиз, 1963.
14. **Griffith А. А.** The phenomena of rupture and flow in solids // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1920. V. 221. P. 163–198.

*Поступила в редакцию 29/V 2008 г.*

---