

УДК 531.224.5

## О ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

В. И. Ванько, Е. С. Перелыгина

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,  
105005 Москва  
E-mail: vvanko@mail.ru

Изучается процесс продольного изгиба стержня из упругопластического материала. Показано, что при любой  $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграмме материала стержня предельная нагрузка (значение продольной внешней силы), которую может “нести” стержень, в безразмерных величинах не превышает текущую жесткость на изгиб наиболее нагруженного (по изгибающему моменту) сечения.

Ключевые слова: продольный изгиб, шарнирно опертый стержень, начальный прогиб, произвольная  $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграмма.

**Введение.** В середине XVIII в. Д. Бернулли, решая задачу об изгибе упругого стержня, сформулировал гипотезу плоских сечений и вывел соотношение между изгибающим моментом в поперечном сечении стержня, кривизной и жесткостью сечения на изгиб. В работе [1] Л. Эйлер, используя результаты Д. Бернулли, с помощью вариационного принципа получил дифференциальное уравнение для упругой кривой. Исследуя собственные значения задачи об изгибе стержня центральной сжимающей силой, Л. Эйлер показал, что имеется дискретный спектр сил, при которых помимо прямолинейной формы стержень может иметь и искривленную (выпученную) форму. Наименьшая из этих сил называется эйлеровой критической силой. Применение эйлеровой критической силы для оценки “несущей” способности стержня возможно только в случае, если соответствующие этой силе напряжения в стержне не превышают предел пропорциональности материала стержня.

Изучение задачи о продольном изгибе упругопластического стержня начато в работе [2], в которой принята гипотеза плоских сечений и рассмотрена задача о продольном изгибе упругопластического материала с линейным упрочнением в геометрически линейной постановке: в предположении, что при изгибе постоянной силой во всех точках поперечного сечения происходит активное нагружение, автор работы [2] ввел понятие касательно-модульной силы. При этом формула для критической силы получается путем замены модуля Юнга  $E$  в формуле для эйлеровой критической силы на касательный модуль  $E_t$   $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграммы. Согласно [3], в случае если изогнутые равновесные формы находятся при неизменной внешней нагрузке, в сечении стержня должны быть как области нагружения, так и области разгрузки (разгрузка происходит во внешних волокнах изогнувшегося стержня). Учет областей разгрузки приводит к появлению в формуле для критической нагрузки приведенного модуля, являющегося комбинацией касательного модуля и модуля Юнга. В работе [4] Ф. Энгессер получил формулу для вычисления приведенного модуля для прямоугольного поперечного сечения.

Дальнейшее развитие теория продольного изгиба стержней из упругопластического материала получила в работе [5], в которой впервые поставлена задача о влиянии на критическую силу начальных несовершенств, в частности эксцентриситета приложения силы или начального прогиба; приведена строгая постановка задачи об устойчивости (в смысле Эйлера) упругопластического стержня под действием постоянной силы; дан алгоритм вычисления приведенного модуля для сечений любой геометрии. Помимо теоретических исследований в [5] проведены эксперименты по определению несущей способности стержней при изгибе за пределом пропорциональности. Автором работы [5] замечено, что соответствие полученных экспериментальных данных теоретической зависимости критической силы от гибкости стержня, построенной с использованием касательного модуля, лучше соответствия зависимости, построенной с использованием приведенного модуля. Этот “парадокс” объяснен в работах Ф. Шенли [6, 7] и Ю. Н. Работнова [8].

В поставленных Ф. Шенли экспериментах замерялись не только прогиб и нагрузка, но и деформации на поверхности стержня. Результаты экспериментальных исследований показывают, что в момент выпучивания стержня деформации сжатия на вогнутой стороне стержня существенно превышают деформации растяжения на выпуклой стороне стержня. Также отмечено, что увеличение прогиба сопровождается увеличением нагрузки и, в случае если нагрузка фиксируется, увеличения прогиба не происходит. На основе этих экспериментальных данных предложена концепция “продолжающегося нагружения”, развитая в работах Ф. Шенли, который использовал модель идеализированного стержня [6, 7], и Ю. Н. Работнова, который исследовал более сложные модели [8].

Исследования Ф. Шенли и Ю. Н. Работнова позволили дать физическую интерпретацию касательно-модульной критической нагрузки и критической нагрузки Кармана: касательно-модульная критическая нагрузка — нагрузка, при которой идеально прямой стержень приобретает возможность искривляться; критическая нагрузка Кармана — нагрузка, при стремлении к которой прогиб либо скорость прогиба интенсивно возрастает.

Дальнейшее развитие идей и постановок Ф. Шенли и Ю. Н. Работнова содержится в работах [9–12].

**1. Изгиб стержня из упругопластического материала с линейным упрочнением.** Рассмотрим продольный изгиб шарнирно опертого стержня, материал которого обладает линейным упрочнением (рис. 1):

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma - \sigma_*}{\mu} \quad \left( \mu = \frac{EE_t}{E - E_t} \right).$$

Здесь  $E$ ,  $E_t$  — модули Юнга и упрочнения; эффект Баушингера не учитывается [13]. Уравнения равновесия поперечного сечения имеют вид

$$\int_F \sigma dF = P, \quad \int_F \sigma z dF = -P(w + w_0). \quad (1.1)$$

В (1.1) интегрирование проводится по площади поперечного сечения  $F$ ;  $-h \leq z \leq h$  — координата элемента площади, отсчитываемая от оси симметрии сечения;  $P$  — внешняя возрастающая продольная сила;  $w_0$  — начальный прогиб стержня;  $w$  — дополнительный прогиб стержня, соответствующий текущему значению силы.

С учетом гипотезы плоских сечений выражение деформации точки любого сечения стержня через деформацию геометрической оси и кривизну сечения стержня в геометрически линейной постановке имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi z, \quad \chi = \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (1.2)$$

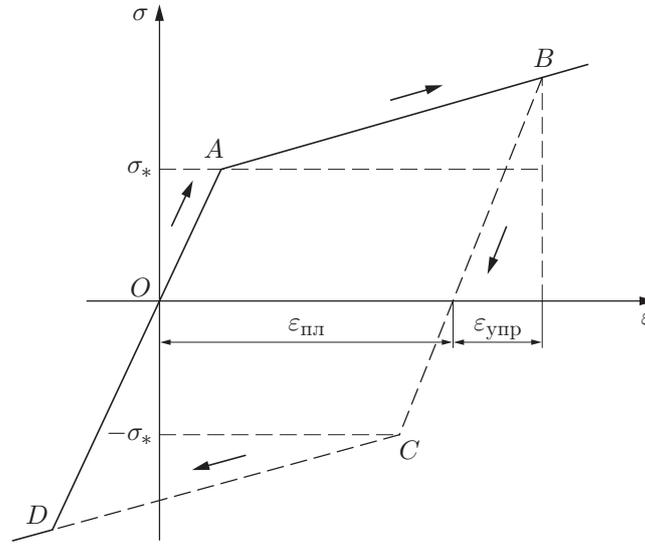


Рис. 1.  $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграмма для материала с линейным упрочнением

Система уравнений (1.1), (1.2) решается методом последовательных нагружений. Запишем (1.1), (1.2) в приращениях [13]:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_i &= \Delta\sigma_i(1/E + 1/\mu) = E_{i-1}^* \Delta\sigma_i, \\ \int_F \Delta\sigma_i dF &= \Delta P_i, \quad \int_F \Delta\sigma_i z dF = P_{i-1} \Delta w_i - \Delta P_i w_{i-1}, \\ \Delta\varepsilon_i &= \Delta\varepsilon_{0i} + z \Delta\chi_i, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $E_{i-1}^* = E^{-1}$  в упругой области и при разгрузке в пластической области,  $E_{i-1}^* = E_t^{-1}$  в пластической области при активном нагружении; индекс  $i$  обозначает шаг по нагрузке.

Рассмотрим стержень прямоугольного сечения  $2h \times b$  длиной  $L$ . Введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{P_i}{P_\Theta}, \quad \Delta\tilde{\varepsilon}_{0i} = \frac{\Delta\varepsilon_{0i}}{\varepsilon_\Theta}, \quad \Delta\tilde{\varepsilon}_i = \frac{\Delta\varepsilon_i}{\varepsilon_\Theta}, \quad \Delta\tilde{\sigma}_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\sigma_\Theta}, \\ \xi &= \frac{\pi x}{L} \quad (0 \leq \xi \leq \pi), \quad \eta = \frac{z}{h} \quad (-1 \leq \eta \leq 1), \quad \Delta\tilde{w}_i = \frac{\Delta w_i}{h}, \quad \tilde{w}_i = \frac{w_i}{h}, \end{aligned}$$

где  $P_\Theta = \pi^2 EI/L^2$  — эйлерова критическая нагрузка;  $\sigma_\Theta = P_\Theta/F$  — эйлерово напряжение;  $\varepsilon_\Theta = \sigma_\Theta/F$  — деформация;  $I$  — момент инерции сечения; знак “ $\sim$ ” далее опускается.

В силу соотношений (1.3) для приращения прогиба на каждом шаге нагружения получаем обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка [14]

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \left( I_2 - \frac{I_1^2}{I_0} \right)_i \Delta w_i'' + p_{i-1} \Delta w_i &= -\Delta p_i \left( w_{i-1} + \left( \frac{I_1}{I_0} \right)_i \right), \\ \Delta w_i(0) &= \Delta w_i(\pi) = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $I_k = \int_{-1}^1 \nu_{i-1} \eta^k d\eta$  ( $k = 0, 1, 2$ ); штрих обозначает производную по координате  $\xi$ .

В силу (1.3) для приращений напряжения в некоторой точке  $(\xi, \eta)$  сечения стержня имеем

$$\Delta\sigma_i = \nu_{i-1} \left( 2 \frac{\Delta p_i}{I_0} - 3 \Delta w_i'' \left( \left( \frac{I_1}{I_0} \right)_i - \eta \right) \right), \quad \nu_{i-1} = \frac{1}{E E_{i-1}^*}. \quad (1.5)$$

Для фиксированного значения координаты  $\xi$  безразмерный модуль  $\nu_{i-1}$  представляет собой функцию координаты  $\eta$  по высоте сечения. Вычислительная процедура описана в работах [13, 14].

В уравнении (1.4) коэффициент  $J_i(\xi) = (3/2)(I_2 - I_1^2/I_0)$  при  $\Delta w_i''$  — жесткость стержня на изгиб. Интегралы  $I_k(\xi)$  вычисляются на каждом шаге интегрирования. Для упругого стержня  $J = 1$ , для упругопластического стержня в случае линейного упрочнения  $\nu \leq J(\xi) \leq 1$ . В безразмерном виде приложенную силу можно сравнивать с жесткостью на изгиб в наиболее напряженном по изгибающему моменту сечении, в данном случае в сечении  $\xi = \pi/2$ . При увеличении нагрузки прогиб также увеличивается:

$$\Delta p_i > 0, \quad \Delta w_i > 0.$$

В этом случае квазистатическая постановка является корректной [15].

Из численного решения системы (1.4), (1.5) (уравнение (1.4) решалось методом конечных разностей) следует, что до тех пор, пока жесткость срединного сечения  $\xi = \pi/2$  больше приложенной силы, стержень “несет” нагрузку:

$$J_i > p_i, \quad \Delta w_i > 0. \quad (1.6)$$

Поясним данное утверждение на следующем примере. В работах [13, 16] показано, что результаты решения полной системы (1.4), (1.5) и результаты решения той же системы методом коллокации по срединному сечению (в этом случае во всех поперечных сечениях жесткость на изгиб принимается равной  $J(\pi/2)$  и уравнение (1.4) становится уравнением с постоянными коэффициентами) в окрестности “критической” точки (когда на следующем шаге нагружения при  $\Delta p_i > 0$  получаем  $\Delta w_i < 0$ ) различаются не более чем на 1–2 % (см. п. 2).

Пусть

$$\Delta w_i = a_i \sin \xi, \quad w_{i-1} = \left( \sum_1^{i-1} a_k \right) \sin \xi. \quad (1.7)$$

Подставляя (1.7) в уравнение (1.4) и полагая  $\xi = \pi/2$ , получаем выражение для приращения прогиба

$$a_i = \frac{\Delta p_i (w_{i-1} + I_1/I_0)}{J_i - p_i}, \quad (1.8)$$

где  $J_i = (3/2)(I_{2i} - I_{1i}^2/I_{0i})$  — текущая жесткость на изгиб срединного сечения.

Из (1.8) следует, что квазистатическая постановка является корректной при выполнении условия (1.6).

Таким образом, несущая способность стержня не исчерпана до тех пор, пока жесткость срединного сечения больше приложенной силы.

В качестве примера приведем результаты численного решения полной системы (1.4), (1.5) для упругопластического стержня из материала с линейным упрочнением. При  $w_0 = 0,001$ ,  $\sigma_* = 0,1$ , значениях силы касательного модуля  $p_t = \sigma_t = E_t/E = \nu = 0,15$  (в данном случае выполняется неравенство  $\sigma_t > \sigma_*$ ) выражение для силы Кармана (приведенного модуля) [8, 14] имеет вид

$$p_K = \sigma_K = 4p_t / (1 + \sqrt{p_t})^2 = 0,312.$$

Найдем значение силы  $p_1$ , при достижении которого в наиболее напряженной на сжатие точке упругого стержня ( $\xi = \pi/2, \eta = -1$ ) напряжение достигает величины  $\sigma_*$ . При этом приращение кривизны упругого стержня с начальным прогибом  $w = w_{00} \sin \xi$  в срединном сечении равно

$$\Delta\chi(\pi/2) = -p_1 w_{00} / (1 - p_1) \quad (w_{00} \ll 1).$$

Подставляя данное значение в выражение (1.5) для приращения напряжения и решая квадратное уравнение относительно  $p_1$  при  $w_{00} \ll 1$ , получаем [14]

$$p_1 = \sigma_* - \frac{3w_{00}\sigma_*}{1 - \sigma_*}. \quad (1.9)$$

Найти точное значение силы  $p_2$ , при котором в точке ( $\xi = \pi/2, \eta = 1$ ) также будет достигнуто напряжение  $\sigma_*$  (т. е. во всех точках сечения  $\xi = \pi/2$  материал будет находиться в состоянии, которому соответствует отрезок  $AB$  на  $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграмме (см. рис. 1)), невозможно, так как на каждом шаге нагружения жесткость сечения  $J(\pi/2)$  меняется.

Верхняя оценка для  $p_2$  может быть найдена как сила  $p_{(2)}$ , при которой в упругом стержне в точке ( $\xi = \pi/2, \eta = 1$ ) будет достигнуто напряжение  $\sigma_*$ . По аналогии с (1.9) находим

$$p_{(2)} = \sigma_* + \frac{3w_{00}\sigma_*}{1 - \sigma_*} > p_2.$$

Итак, если механические характеристики материала, начальный прогиб  $w_{00}$  и геометрия стержня таковы, что  $p_t > p_{(2)}$ , то во всех точках сечения  $\xi = \pi/2$  материал перейдет в состояние, которому соответствуют точки отрезка  $AB$ , до того как нагрузка достигнет критического значения  $p_t$ , определяемого с помощью касательного модуля.

Пусть  $p > p_{(2)}$ . Во всех точках сечения  $\xi = \pi/2$  материал переходит в состояние, которому соответствуют точки отрезка  $AB$ , и стержень “работает” в качестве упругого с жесткостью  $J = p_t = E_t/E$ . Найдем значение силы  $p_3$ , при котором в точке ( $\xi = \pi/2, \eta = 1$ ) начинается разгрузка, т. е. приращение напряжения меняет знак на противоположный:  $d\sigma/dp = 0$  при  $p = p_3$ .

Пусть  $w(p_{(2)}) = w_2, p > p_{(2)}$ . Тогда

$$\sigma(\pi/2, 1) = \sigma_2 + (p - p_{(2)}) - 3w_2(p - p_{(2)})/(\nu - p).$$

Из условия

$$\left. \frac{d\sigma}{dp} \right|_{p=p_3} = 1 - \frac{3w_2(\nu - p_{(2)})}{(\nu - p_3)^2} = 0$$

определим нагрузку  $p_3$

$$p_3 = \nu - \sqrt{3w_2(\nu - p_{(2)})} = p_t - \sqrt{3w_2(p_t - p_{(2)})}. \quad (1.10)$$

Из (1.10) получаем  $\lim_{w_{00} \rightarrow 0} p_3 = p_t$ , т. е. продольный изгиб без разгрузки возможен только при значении силы, меньшем критической касательно-модульной нагрузки.

При  $w_0 = 0,001, \sigma_* = 0,1, p_t = 0,15$  выполняются неравенства  $p_t > p_{(2)} > p_2$ . При изменении силы от нулевого значения до значения  $p_1$  стержень находится в упругом состоянии ( $J = 1$ ). При  $p > p_1$  жесткость срединного сечения уменьшается, так как в точке с координатами  $(\pi/2, -1)$ , а также в других точках сечения  $\xi = \pi/2$  материал переходит в состояние, которому соответствуют точки отрезка  $AB$ . Наконец, при  $p \approx p_{(2)}$  во всех точках срединного сечения материал переходит в состояние, которому соответствуют точки отрезка  $AB$ , при этом имеет место равенство  $J = \nu$ .

На рис. 2,а показано состояние стержня, когда происходит “продольный изгиб без разгрузки” [7]. При  $p = p_3$  в точке  $(\pi/2, 1)$  начинается разгрузка. При увеличении области разгрузки жесткость срединного сечения также увеличивается.

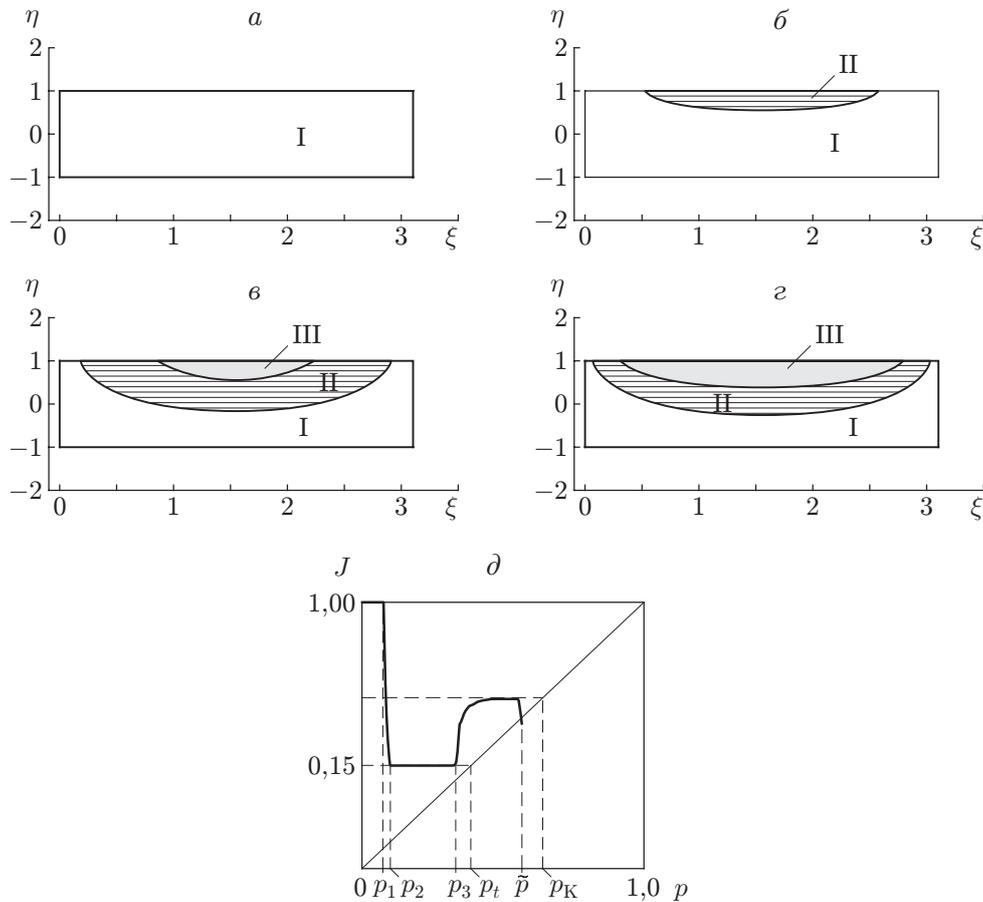


Рис. 2. Области пластичности в сечении стержня из материала с линейным упрочнением при  $p_t > p_*$  и различных значениях силы и жесткости (а-г) и зависимость жесткости от силы для этого стержня (д):  
 а —  $p = 0,145$ ,  $J = 0,15$ ; б —  $p = 0,195$ ,  $J = 0,312$ ; в —  $p = 0,205$ ,  $J = 0,274$ ; г —  $p = 0,213$ ,  $J = 0,216$ ; I — область пластического нагружения (состояние, которому соответствуют точки отрезка AB на рис. 1); II — область разгрузки (состояние, которому соответствуют точки отрезка BC); III — область пластических деформаций растяжения

В работе [9], по-видимому, впервые отмечено, что при  $p > p_t$  продольный изгиб без разгрузки невозможен.

На рис. 2,б показано состояние стержня при действии силы  $p = 0,195$ , высоте области разгрузки  $\zeta = 0,45$ , жесткости  $J = 0,312$ . Эти значения близки к вычисленной теоретически высоте зоны разгрузки  $\zeta^* = 0,442$ , что соответствует силе Кармана  $p_K = 0,3122$  [14].

На рис. 2,в видно, что в точке  $(\pi/2, 1)$  и в других точках сечения  $\xi = \pi/2$  возникает область пластических деформаций растяжения. Жесткость при этом уменьшается.

В работе [9] на примере стержневой модели Шенли показано, что, как только в стержне, находящемся на выпуклой стороне модели, напряжение достигает значения  $\sigma_1 = -\sigma_*$ , равновесие модели нарушается. При этом жесткость модели на изгиб меняется скачкообразно от критического значения Кармана до критического значения, соответствующего касательно-модульной нагрузке. При этом внешняя сила превышает касательно-модульную, следовательно, несущая способность конструкции исчерпана.

Жесткость стержня, имеющего сплошное сечение, меняется непрерывно, поэтому при возникновении области пластических деформаций растяжения особенностей в поведении

стержня не наблюдается. Аналогичный вывод сделан в работе [17]. При увеличении силы жесткость срединного сечения уменьшается, так как область пластических деформаций растяжения распространяется по сечению. На рис. 2,г показано состояние стержня непосредственно перед “критическим” ( $p = 0,213$ ,  $J = 0,216$ ). На следующем шаге нагружения  $J = p$ , при этом  $dw/dp \rightarrow \infty$  при конечном прогибе  $\tilde{w} = 0,49$ ,  $\tilde{p} = 0,2135$ , т. е.  $\tilde{p} < p_K$ . Соответствующая зависимость  $J(p)$  приведена на рис. 2,д.

Заметим, что впервые теоретический анализ распространения пластических зон в изгибаемом стержне выполнен в работе [17]. Однако зависимость  $J(p)$  не исследовалась.

**2. Изгиб стержня из упругопластического материала с произвольной  $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграммой.** Проведенный выше анализ продольного изгиба справедлив при условии  $p_t > p_*$  ( $\sigma_t > \sigma_*$ ). Рассмотрим процесс продольного изгиба стержня из материала с линейным упрочнением при  $p_t \leq p_*$ .

При  $p_t \approx p_*$  точки стержня не переходят в состояние, которому соответствуют точки отрезка  $CD$   $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграммы (см. рис. 1). При увеличении различия между  $p_*$  и  $p_t$  точки стержня “не успевают” перейти в состояние разгрузки (состояние, которому соответствуют точки отрезка  $BC$ ) вследствие резкого уменьшения жесткости.

Сказанное выше подтверждают зависимости жесткости от силы и графики распространения пластичности по сечению стержня (рис. 3, 4). На рис. 3 приведены результаты

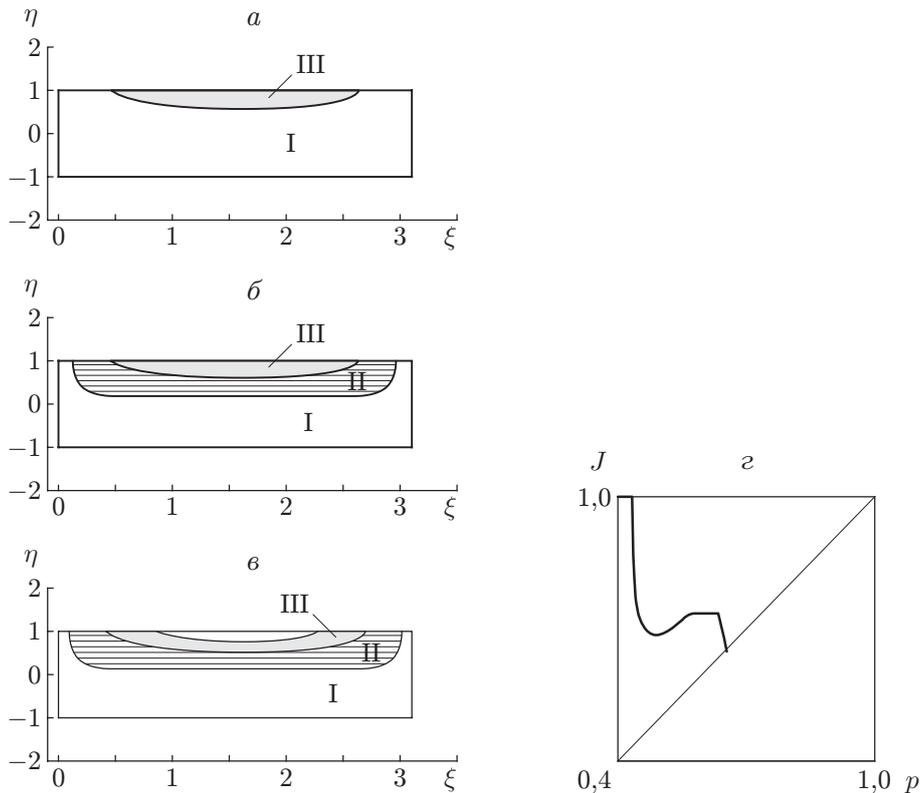


Рис. 3. Области пластичности в сечении стержня из материала с линейным упрочнением при  $p_t \approx p_*$  и различных значениях силы и жесткости (а–в) и зависимость жесткости от силы для этого стержня (г):

а —  $p = 0,403$ ,  $J = 0,592$ ; б —  $p = 0,435$ ,  $J = 0,581$ ; в —  $p = 0,536$ ,  $J = 0,536$ ; I — область пластического нагружения (состояние, которому соответствуют точки отрезка  $AB$ ); II — область разгрузки (состояние, которому соответствуют точки отрезка  $BC$ ); III — область упругости (состояние, которому соответствуют точки отрезка  $OA$ )

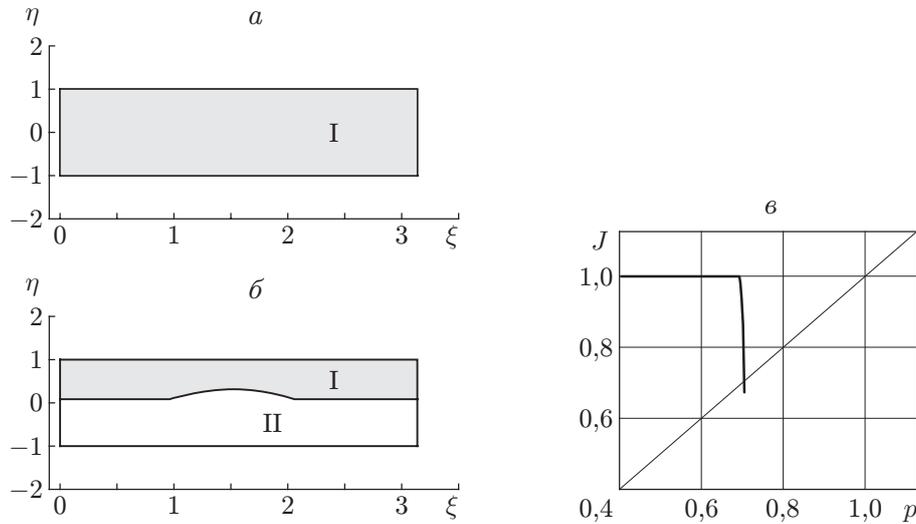


Рис. 4. Области пластичности в сечении стержня из материала с линейным упрочнением при  $p_t < p_*$  и различных значениях силы и жесткости (а, б) и зависимость жесткости от силы для этого стержня (в):

а —  $p = 0,6, J = 1,0$ ; б —  $p = 0,689, J = 0,689$ ; I — область упругости (состояние, которому соответствуют точки отрезка  $OA$ ); II — область пластического нагружения (состояние, которому соответствуют точки отрезка  $AB$ )

расчетов для случая  $p_t \approx p_*$  ( $p_t = 0,4, p_* = 0,41, w_0 = 0,001$ ). На рис. 3,а большая часть точек стержня перешла в состояние пластического нагружения (состояние, которому соответствуют точки отрезка  $AB$ ). На рис. 3,б начинается разгрузка (состояние, которому соответствуют точки отрезка  $BC$ ). При этом часть точек стержня остается в области упругости (состояние, которому соответствуют точки отрезка  $OA$ ). На рис. 3,в часть точек, которые находились в области упругости, переходит в пластическое состояние, которому соответствуют точки отрезка  $AB$ , вследствие чего жесткость уменьшается. В результате квазистатическая постановка становится некорректной:  $p_i > J_i$ , следовательно,  $\Delta w_i < 0$ .

На рис. 4 приведены результаты расчета для случая  $p_t < p_*$  ( $p_t = 0,4, p_* = 0,7, w_0 = 0,001$ ). На рис. 4,а весь стержень находится в области упругости. Далее часть точек переходит в пластическое состояние, вследствие чего жесткость резко уменьшается и квазистатическая постановка задачи становится некорректной (рис. 4,б).

Рассмотрим стержень из материала с произвольной  $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграммой.

Уравнение состояния материала записывается в виде

$$\varepsilon = \sigma/E + f(\sigma),$$

где  $f(\sigma)$  — некоторая функция, задающая вид упрочнения. Тогда в некоторой точке стержня приращение деформации на  $i$ -м шаге нагружения имеет вид

$$\Delta\varepsilon_i = \Delta\sigma_i(1/E + f'_\sigma) = E_{i-1}^* \Delta\sigma_i,$$

где  $E_{i-1}^* = E^{-1}$  в упругой области и при разгрузке в пластической области,  $E_{i-1}^* = (1 + E f'_\sigma)/E$  в пластической области при активном нагружении.

Диаграммы, исследованные в настоящей работе, близки к диаграммам реально существующих материалов, таких как медь и сталь. Рассматривались материалы с упрочнением, участки  $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграмм которых аппроксимируются параболой в нечетной степени, синусом, логарифмом и арктангенсом.

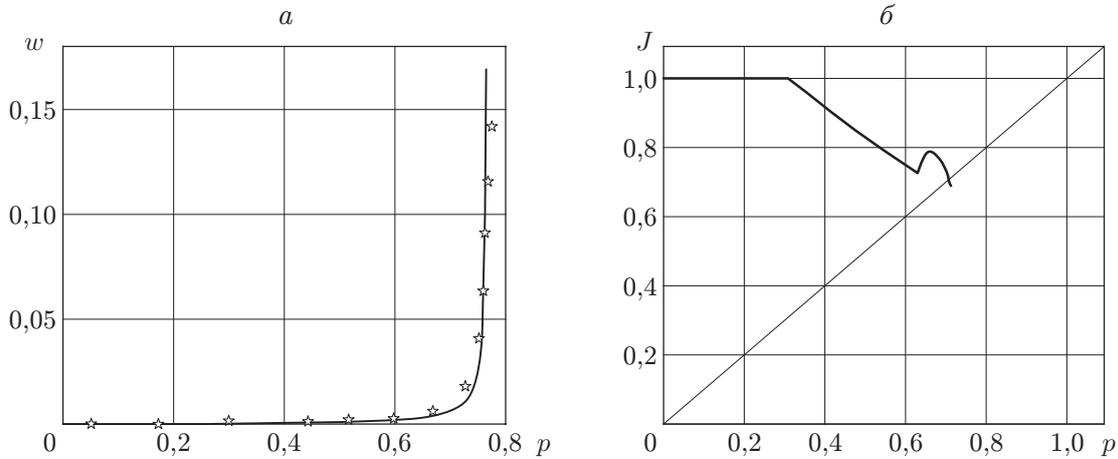


Рис. 5. Зависимости прогиба (*а*) и жесткости (*б*) от силы для стержня из материала с нелинейным упрочнением:  
линия — расчет методом конечных разностей, точки — расчет методом коллокаций

Полученные результаты показывают, что при исследовании процесса продольного изгиба стержня с шарнирным закреплением концов условие корректности квазистатической постановки

$$J_i > p_i \quad (2.1)$$

является универсальным.

В работе [13] справедливость неравенства (2.1) проверена при решении задачи о выпучивании упругопластического стержня с учетом ползучести.

На рис. 5 приведены зависимости прогиба и жесткости от силы для материала с  $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграммой вида

$$\sigma = \begin{cases} \varepsilon, & \varepsilon \leq \varepsilon_*, \quad \sigma \leq \sigma_*, \\ \ln(\varepsilon - \varepsilon_* + 1) + \sigma_*, & \varepsilon > \varepsilon_*, \quad \sigma > \sigma_*, \end{cases}$$

где  $\sigma_* = 0,4$ ;  $\varepsilon_* = 0,4$ . На рис. 5, *а* показана зависимость прогиба стержня в точке  $\xi = \pi/2$  от силы  $p$  ( $w_0 = 0,001$ ). Также на рис. 5, *а* приведены результаты решений, полученные с использованием полной системы (1.4), (1.5) и метода коллокаций. В рассмотренном случае зависимости распространения пластичности по сечению стержня для различных видов упрочнения аналогичны зависимостям, приведенным на рис. 2.

**Заключение.** Изучен процесс продольного изгиба стержня, имеющего начальное отклонение от идеальной (прямолинейной) формы. Поскольку в этом случае процесс увеличения прогиба начинается непосредственно по мере увеличения приложенной силы ( $\Delta p > 0$ , следовательно,  $\Delta w > 0$ ), путем численного решения системы уравнений равновесия определяется значение силы  $p = \tilde{p}$ , при превышении которого квазистатическая постановка становится некорректной.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Эйлер Л.** Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1934.
2. **Engesser F.** Über Knickfestigkeit gerader Stäbe // Z. Architekt und Ingenieur vom Verein zu Hannover. 1889. Bd 35. S. 455.

3. **Jasinski F.** Zu den Knickfragen // Schweiz. Bauzeitung. 1895. Bd 26, h. 24.
4. **Engesser F.** Über Knickfragen // Schweiz. Bauzeitung. 1895. Bd 26, h. 24.
5. **Kármán Th. von.** Untersuchungen über Knickfestigkeit // Collected works of Th. von Kármán. V. 1. 1902–1913. L.: Butterworths Sci. Publ., 1956.
6. **Shanley F.** The column paradox // J. Aeronaut. Sci. 1946. V. 13, N 12. P. 676.
7. **Shanley F.** Inelastic column theory // J. Aeronaut. Sci. 1947. V. 14, N 5. P. 261–267.
8. **Работнов Ю. Н.** О равновесии сжатых стержней за пределом пропорциональности // Инж. сб. 1952. № 11. С. 123–126.
9. **Пановко Я. Г.** О критической силе сжатого стержня за пределом пропорциональности // Инж. сб. 1954. № 20. С. 160–163.
10. **Ильюшин А. А.** Об упругопластической устойчивости конструкции, включающей стержневые элементы // Инж. сб. 1960. Т. 27. С. 87–90.
11. **Зубчанинов В. Г.** Устойчивость стержней как элементов конструкций // Инж. сб. 1960. Т. 27. С. 101–113.
12. **Вольмир А. С.** Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1961.
13. **Ванько В. И., Шестериков С. А.** Продольный изгиб и выпучивание // Инж. журн. Механика твердого тела. 1967. № 2. С. 157–163.
14. **Ванько В. И.** Продольный изгиб упругопластического стержня // Инж. журн. Механика твердого тела. 1968. № 4. С. 157–162.
15. **Ванько В. И.** О критериях выпучивания в условиях ползучести // ПМТФ. 1965. № 1. С. 127–130.
16. **Перельгина Е. С.** О продольном изгибе упругопластического стержня // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н. Э. Баумана. Естеств. науки. Спецвыпуск. Прикл. математика. 2011. С. 177–184.
17. **Лепик Ю. Р.** Изучение послекритической стадии сжатого упругопластического стержня с учетом вторичных пластических деформаций // Учен. зап. Тарт. гос. ун-та. Тр. по математике и механике. 1959. Вып. 73. С. 168–178.

*Поступила в редакцию 24/XII 2012 г.*

---