му случаю. Из рис. 2 видно, что коэффициент K_I^0 существенно зависит от трансверсальности оболочки по толщине.

Рассмотрим точно такую же, как и вышеописанную, панель, но из ортотропного материала (стеклопластик) с трещиной в центре и определим влияние степени ортотропии E_x/E_y на K_I^0. Результаты представлены в таблице, из анализа данных которой видно, что степень ортотропии не влияет на K_I^0. Имеющая место относительная погрешность между расчетами относится к вычислительной погрешности и влиянию густоты сетки.

На рис. 1 и 2 изображены штриховыми линиями графики, полученные на основании геометрически нелинейной теории, из их анализа можно сделать вывод, что геометрическая нелинейность влияет на амплитуду коэффициента K_I^0, т. е. при применении более точной теории оболочка становится мягче и значения коэффициента интенсивности возрастают.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Королев В. И.** Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс.— М.: Машиностроение, 1965.
2. **Пелех Б. Л., Лазько В. А.** Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений.— Киев: Наук. думка, 1982.
3. **Григоренко Я. М., Василенко А. Т.** Теория оболочек переменной жесткости. Методы расчета оболочек.— Киев: Наук. думка, 1981.— Т. 4.
4. **Осадчук В. А.** Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами.— Киев: Наук. думка, 1985.
5. **Юрков В. И.** Метод податливости в задачах о напряженно-деформированном состоянии пластин, содержащих трещины: Автореф. дис. ... канд. техн. наук.— Киев, 1990.
6. **Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А.** Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек.— Киев: Вища шк., 1986.
7. **Пискунов В. Г., Верижеико В. Е., Присяжнюк В. К. и др.** Расчет неоднородных пологих оболочек и пластин методом конечных элементов.— Киев: Вища шк., 1987.
8. **Си Г., Либовиц Г.** Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение.— М.: Мир, 1975.— Т. 2.
9. **Мазья В. Г., Морозов Н. Ф., Пламеневский Б. А.** О напряженно-деформированном состоянии в окрестности вершины трещины при нелинейном изгибе пластины // ДАН СССР.— 1978.— Т. 243, вып. 4.
10. **Утку С.** Матрица жесткости для тонких треугольных элементов ненулевой гауссовой кривизны // РТК.— 1967.— Т. 5, № 9.

г. Киев *Поступила 21/I 1991 г.,*
в окончательном варианте — 18/III 1991 г.

УДК 539.3

Л. Г. Доборджгинидзе

К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Рассматривается задача давления конечного числа жестких профилей на границе L нелинейно-упругой полуплоскости из материала гармонического типа [1, 2]. На остальных участках границы, вне штампов, действуют заданные нормальные нагрузки (пригрузки) [3]. Везде на L касательные напряжения, а также усилия и вращение на бесконечности отсутствуют. Некоторые контактные задачи для полуплоскости без пригрузки исследованы в [4].

1. Пусть рассматриваемая физическая область S^- занимает нижнюю часть плоскости S переменной $z = x + iy$. Границу S^- обозначим через L. На отрезках $[a_k b_k]$ прямой L без трения давят жесткие профили, а на участках $[c_k d_k]$ ($c_k < d_k$, $d_k \leqslant a_k$, $c_{k+1} \geqslant b_k$), $k = 1, 2, \ldots, n$, действуют заданные нормальные напряжения с интенсивностью $N_k(x)$. Будем

считать, что иригрузка имеет конечный главный вектор $(0, -N_0)$ и удовлетворяет условию Гельдера (включая бесконечно удаленную точку, если она занимает бесконечный интервал границы L).

Введем обозначения: $L_1=\sum_{k=1}^{n}[a_kb_k]$, $L_2=\sum_{k=1}^{n}[c_kd_k]$, $L_3=L\setminus(L_1+L_2)$. Тогда граничные условия задачи примут вид [5]

$$X_y^-=0 \text{ на } L,\ Y_y=-N_k(x) \text{ на } [c_k d_k], Y_y^-=0 \text{ на } L_3,$$
$$v^-=f(x^*)+c(x^*) \text{ на } L_1, \tag{1.1}$$

где Y_y, X_y — компоненты тензора истинных напряжений Коши; $N_k(x)$ — известная действительная на $[c_kd_k]$ функция, удовлетворяющая указанным выше условиям; v^- — нормальное упругое смещение точек линии L_1; $f(x^*)$ — заданная на деформированной линии ($x^*=x+u^-(x)$, $u^-(x)$ — горизонтальное упругое смещение точек линии L_1) действительная функция, характеризующая геометрию профиля основания штампов ($f'(x^*)\in H$); $c(x^*)$ — кусочно-постоянная функция: если штампы жестко не связаны, то $c(x^*)=c_k$ на $[a_kb_k]$, а $c(x^*)=c_0=\text{const}$ на L_1, если они жестко связаны. В первом случае дополнительно задается главный вектор действующих на каждом штампе внешних усилий $(0, -P_k)$, а во втором — главный вектор $(0, -P_0)$ действующих сил.

Отметим, что заданная на L_1 функция $f(x^*)=f[x+u(x)]=f_1(x)$ в конечном счете неизвестна, поскольку в нашей (нелинейной) постановке неизвестна геометрия (форма) деформируемой границы. Ее следует отыскать в процессе решения задачи (функцию $u=u(x)$ на L_1).

Для решения используем комплексные представления [2, 4]

$$X_x+Y_y+4\mu=\frac{(\lambda+2\mu)\,q\Omega(q)}{\sqrt{I}},\quad Y_y-X_x-2iX_y=$$
$$=-\frac{4(\lambda+2\mu)}{\sqrt{I}}\frac{\Omega(q)}{q}\frac{\partial z^*}{\partial z}\frac{\partial z^*}{\partial\bar z}; \tag{1.2}$$

$$u+iv=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\int\varphi'^2(z)\,dz+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\varphi(z)}{\overline{\varphi'(z)}}+\overline{\psi(z)}\right]-z,\ z^*=z+u+iv, \tag{1.3}$$

где

$$\frac{\partial z^*}{\partial z}=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\varphi'^2(z)+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\varphi'(z)}{\overline{\varphi'(z)}},\ \frac{\partial z^*}{\partial\bar z}=-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\varphi(z)\overline{\varphi''(z)}}{\overline{\varphi'^2(z)}}-\overline{\psi'(z)}\right]; \tag{1.4}$$

$$\sqrt{I}=\frac{\partial z^*}{\partial z}\frac{\partial\bar z^*}{\partial\bar z}-\frac{\partial z^*}{\partial\bar z}\frac{\partial\bar z^*}{\partial z},\ q=2\left|\frac{\partial z^*}{\partial z}\right|,\ \Omega(q)=q-\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}. \tag{1.5}$$

Доказано, что

$$\varphi'(z)\neq 0 \text{ в } S^-+L. \tag{1.6}$$

В приведенных соотношениях λ, μ — упругие постоянные Ламе; $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — аналитические в области S^- функции комплексного аргумента $z=x+iy$, имеющие при достаточно больших $|z|$ представления

$$\varphi(z)=-\frac{(\lambda+2\mu)(X+iY)}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\ln z+z+O(1)+\text{const},$$
$$\psi(z)=\frac{(\lambda+2\mu)(X-iY)}{2\pi\mu(\lambda+\mu)}\left[\frac{1}{2\varphi'(z)}-1\right]\ln z+O(1)+\text{const} \tag{1.7}$$

((X, Y) — главный вектор всех внешних усилий, приложенных к L).

Из первого равенства условия (1.1) при отсутствии напряжений на бесконечности следует

$$\overline{\varphi(x)}\,\varphi''(x)-\varphi'^2(x)\,\psi'(x)=0 \text{ на } L. \tag{1.8}$$

Учитывая это соотношение в (1.2), имеем

$$Y_y^-=N(x)=2\mu(\lambda+\mu)\left[|\varphi'^2(x)|-1\right]/\left[\lambda+\mu+\mu|\varphi'^2(x)|\right] \text{ на } L. \tag{1.9}$$

Отсюда после элементарных приведений находим формулу

$$\ln \varphi'^2(x) + \ln \overline{\varphi'^2(x)} = 2F_0(x) \text{ на } L, \tag{1.10}$$

где

$$F_0(x) = \ln\left[\frac{\lambda+\mu}{\mu} \frac{2\mu + N(x)}{2(\lambda+\mu) - N(x)}\right].$$

Очевидно, что в условиях безопасного нагружения $F_0(x) > 0$ на области определения L.

После этого продифференцируем равенство (1.3) по x и в полученном соотношении учтем (1.8). Тогда после некоторых очевидных преобразований

$$\ln \varphi'^2(x) - \ln \overline{\varphi'^2(x)} = 2i\delta(x) \text{ на } L \tag{1.11}$$

($\delta(x) = \operatorname{arctg}(dv/dx^*)$ — действительная функция на L).

Введем новую функцию $\Omega(z) = \ln \varphi'^2(z)$, которая, согласно (1.6), будет аналитической в области S^-.

Считая временно $\delta(x)$ известной, граничные условия задачи запишем как

$$\operatorname{Im} \Omega(x) = \delta(x) \text{ на } L_1, \quad \operatorname{Re} \Omega(x) = F_0(x) \text{ на } L_2 + L_3. \tag{1.12}$$

Здесь $\delta(x)$ и $F_0(x)$ удовлетворяют условию Гельдера на L_1 и $L_2 + L_3$ соответственно (в последнем случае включая бесконечно удаленную точку).

В приведенных соотношениях (как и в (1.10), (1.11)) под $\ln \varphi'^2(x)$ подразумевается граничное значение из S^- на L голоморфной (согласно (1.6)) в области S^- функции $\ln \varphi'^2(z)$. Под ней в дальнейшем подразумевается та ветвь, для которой $\lim\limits_{z\to\infty} \Omega(z) = 0$.

Следовательно, для определения голоморфной в S^- и исчезающей на бесконечности функции $\Omega(z)$ мы получили известную смешанную задачу для полуплоскости, задачу Келдыша — Седова. Решение класса h_0 этой задачи имеет вид [6]

$$\Omega(z) = \frac{1}{\pi X(z)}\left[\int\limits_{L_1} \frac{X(x)\delta(x)dx}{x-z} - i\int\limits_{L_2} \frac{X(x)F_0(x)dx}{x-z} + P_{n-1}(z)\right], \tag{1.13}$$

где $X(z)$ — каноническая функция указанного класса соответствующей задачи сопряжения

$$X(z) = \sqrt{(z-a_1)(z-b_1)\ldots(z-a_n)(z-b_n)}.$$

Под $X(z)$ подразумевается ветвь, голоморфная на разрезанной вдоль L_1 плоскости S, такая, что

$$\lim_{z\to\infty} [z^{-n}X(z)] = 1. \tag{1.14}$$

Кроме того, $X(x) \equiv X^+(x)$, т. е. $X(x)$ — граничное значение, принимаемое функцией $X(z)$ на левой стороне L_1. В (1.13)

$$P_{n-1}(z) = C_1 z^{n-1} + C_2 z^{n-2} + \ldots + C_n \tag{1.15}$$

— произвольный полином с чисто мнимыми постоянными, которые должны быть определены в процессе решения задачи. В частности, одну из них, постоянную C_1, согласно (1.7), (1.13)—(1.15), определяем как

$$C_1 = -(\lambda + 2\mu)iY/2\pi\mu(\lambda+\mu). \tag{1.16}$$

Значит, имеем

$$\varphi'(z) = \exp[(1/2)\Omega(z)] \tag{1.17}$$

($\Omega(z)$ — правая часть формулы (1.13)).

Решение (единственное) класса $h(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$ задачи (1.12) (относительно $\varphi'(z)$) примет вид

$$\varphi'(z) = \exp\left[\frac{X(z)}{2\pi}\int_{L_1}\frac{\delta(x)dx}{X(x)(x-z)} + \frac{X(z)}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{F_0(x)dx}{X(x)(x-z)}\right] \tag{1.18}$$

при соблюдении следующих условий разрешимости:

$$\int_{L_1}\frac{x^n\delta(x)dx}{X(x)} - i\int_{L_2}\frac{x^nF_0(x)dx}{X(x)} = -\frac{(\lambda+2\mu)iY}{2\mu(\lambda+\mu)} \quad \text{и}$$

$$\int_{L_1}\frac{x^k\delta(x)dx}{X(x)} = i\int_{L_2}\frac{x^kF_0(x)dx}{X(x)} \quad \text{при } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Наконец, приведем решение (единственное) класса $h(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (относительно $\varphi'(z)$):

$$\varphi'(z) = \exp\left[\frac{X_a(z)}{2\pi X_b(z)}\left(\int_{L_1}\frac{X_b(x)\,\delta(x)\,dx}{X_a(x)\,(x-z)} - i\int_{L_2}\frac{X_b(x)\,F_0(x)\,dx}{X_a(x)\,(x-z)} + C_1\right)\right], \tag{1.19}$$

где

$$X_a(z) = \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)}, \tag{1.20}$$
$$X_b(z) = \sqrt{(z-b_1)(z-b_2)\dots(z-b_n)},$$

а постоянная C_1, согласно (1.7), (1.20), определяется формулой

$$C_1 = \int_{L_1}\frac{X_b(x)\,\delta(x)\,dx}{X_a(x)} - i\int_{L_2}\frac{X_b(x)\,F_0(x)\,dx}{X_a(x)} - \frac{(\lambda+2\mu)\,iY}{2\mu(\lambda+\mu)}.$$

После нахождения функции $\varphi(z)$ другой искомый потенциал $\psi(z)$ можно получить из (1.8), используя операцию действия интеграла типа Коши. Как легко убедиться, с учетом (1.7) имеем

$$\psi'(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\varphi(x)}\,\varphi''(x)dx}{\varphi'^2(x)\,(x-z)} - \frac{(\lambda+2\mu)iY}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\left[\frac{\varphi''(z)\ln z}{\varphi'^2(z)} - \frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi''(x)\ln x\,dx}{\varphi'^2(x)(x-z)}\right].$$

Поле упругих элементов определяем из (1.2)—(1.5). В частности, нормальные контактные напряжения вычислим согласно (1.9), а упругое смещение точек линии L — по формуле

$$u_x' + iv_x' = \left[\frac{\mu}{\lambda+2\mu} + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\,\frac{1}{|\varphi'^2(x)|}\right]\varphi'^2(x) - 1.$$

2. Пример 1. *Штамп с прямолинейным горизонтальным основанием.* Пусть есть один штамп ($n = 1$), занимающий заданный отрезок $[ab]$ действительной оси L, а на участках $[c_1d_1]$, $[c_2d_2]$ ($c_1 < d_1$, $d_1 < a$, $c_2 < d_2$, $c_2 > b$) вне штампа той же линии действуют внешние нормальные напряжения с постоянной интенсивностью P_1 и P_2 соответственно. На штамп действуют внешние силы, главный вектор которых обозначим через $(0, -P_0)$. Полагаем, что штамп может перемещаться лишь поступательно. Случай, когда он может наклоняться, приведен в следующем примере.

В рассматриваемой задаче, согласно (1.13), (1.17), имеем

$$\varphi'(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi\sqrt{(z-a)(z-b)}}\left(\int_a^b\frac{\sqrt{(x-a)(x-b)}\,\delta(x)dx}{x-z} - \right.\right. \tag{2.1}$$
$$\left.\left. - i\int_{c_1}^{d_1}\frac{\sqrt{(x-a)(x-b)}\,F_0^{(1)}(x)dx}{x-z} - i\int_{c_2}^{d_2}\frac{\sqrt{(x-a)(x-b)}\,F_0^{(2)}(x)dx}{x-z} + C\right)\right].$$

Здесь C — постоянная, определяемая из (1.16) и условий задачи в виде

$$C = (\lambda + 2\mu)(P_0 + P_1 + P_2)i/4\pi\mu(\lambda + \mu). \tag{2.2}$$

Но в данном случае $\delta(x) = 0$ на $[ab]$, а $F_0^{(1)}(x)$ и $F_0^{(2)}(x)$ — известные постоянные величины. Учитывая это обстоятельство, из (2.1) после вычислений соответствующих интегралов получим

$$\varphi'(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi\sqrt{(z-a)(b-z)}}\left(\frac{(\lambda+2\mu)(P_0+P_1+P_2)}{4\mu(\lambda+\mu)} - F_0^{(1)}(z)R_0^{(1)}(z) - F_0^{(2)}(z)R_0^{(2)}(z)\right)\right], \tag{2.3}$$

где

$$F_0^{(i)}(z) = \ln\{[(\lambda+\mu)(2\mu+P_i)\mu^{-1}][2(\lambda+\mu)-P_i]^{-1}\} \equiv F_0^{(i)},\ i = 1, 2; \tag{2.4}$$

$$R_0^{(i)}(z) = \sqrt{(d_i-a)(d_i-b)} - \sqrt{(c_i-a)(c_i-b)} + \left(z - \frac{a+b}{2}\right)\ln\left|\frac{\sqrt{(d_i-a)(d_i-b)} + 2d_i - a - b}{\sqrt{(c_i-a)(c_i-b)} + 2c_i - a - b}\right| + \sqrt{(z-a)(b-z)} \times$$
$$\times \ln\frac{\left[2\sqrt{(c_i-a)(c_i-b)(z-a)(b-z)} + 2(z-a)(b-z) + (c_i-z)(2z-a-b)\right](d_i-z)}{\left[2\sqrt{(d_i-a)(d_i-b)(z-a)(b-z)} + 2(z-a)(b-z) + (d_i-z)(2z-a-b)\right](c_i-z)}. \tag{2.5}$$

После этого из (1.9), (2.3)—(2.5) находим значения нормальных контактных напряжений $N(x)$ под штампом в виде (при $x \in [ab]$)

$$N(x) = \frac{2\mu(\lambda+\mu)\left\{\exp\frac{1}{\pi\sqrt{(x-a)(b-x)}}\left[\frac{(\lambda+2\mu)(P_0+P_1+P_2)}{2\mu(\lambda+\mu)} - F_0^{(1)}R_0^{(1)}(x) - F_0^{(2)}R_0^{(2)}(x)\right] - 1\right\}}{\lambda + \mu + \mu\exp\left\{\frac{1}{\pi\sqrt{(x-a)(b-x)}}\left[\frac{(\lambda+2\mu)(P_0+P_1+P_2)}{2\mu(\lambda+\mu)} - F_0^{(1)}R_0^{(1)}(x) - F_0^{(2)}R_0^{(2)}(x)\right]\right\}}. \tag{2.6}$$

Эта формула от своего линейного классического аналога отличается двумя существенными свойствами. Во-первых, она зависит от упругих свойств материала, и, во-вторых, напряжения в окрестности концов штампа остаются ограниченными. В частности, как это следует из (2.6),

$$\lim_{x\to a (x\to b)} N(x) = 2(\lambda + \mu). \tag{2.7}$$

В табл. 1 приводятся значения отношения $N(x)/2\mu$ в различных точках контактной области при разных значениях $P/\mu (P_0 = P_1 = P_2 = P)$ и при $\lambda = \mu$, когда $a = -1$, $b = 1$, $c_1 = -3$, $d_1 = -2$, $c_2 = 2$, $d_2 = 3$.

В табл. 2 представлены значения того же отношения $N(x)/2\mu$, когда функция $R_0^{(1)} \equiv 0$, т. е. когда пригрузка действует только с правой стороны штампа на отрезке [2, 3].

Как показывают эти данные, в приведенных случаях действие нагрузки вне штампа существенно увеличивает значения контактных напряжений под штампом.

Пример 2. *Штамп с прямолинейным наклонным основанием с пригрузкой.* Пусть угол наклона основания после деформации с положительным направлением оси L составляет угол ω_0. Вне штампа на участках $[c_1d_1]$ и $[c_2d_2]$ действуют те же нагрузки, что и в предыдущем примере. Учитывая, что в рассматриваемом случае $\delta(x) = \omega_0$, из (1.19) после очевидных приведений получим

$$\varphi'(z) = \exp\left[\frac{i\omega_0}{2} + \frac{\pi\omega_0 z + C_0 - F_0^{(1)}R_0^{(1)}(z) - F_0^{(2)}R_0^{(2)}(z)}{2\pi\sqrt{(z-a)(b-z)}}\right],$$

где $C_0 = (\lambda + 2\mu)(P_0 + P_1 + P_2)/2\mu(\lambda + \mu)$, а $F_0^{(i)}$, $R_0^{(i)}$ определяются формулами (2.4), (2.5). Под $\sqrt{(z-a)(b-z)}$ подразумевается ветвь,

Таблица 1

x	P/μ			
	0,2	0,4	0,6	0,8
	$N(x)/2\mu$			
0	0,0977	0,1982	0,3017	0,4101
0,1	0,0978	0,1984	0,3021	0,4117
0,2	0,0979	0,1991	0,3036	0,4142
0,3	0,0991	0,2023	0,3086	0,4170
0,4	0,1021	0,2083	0,3179	0,4296
0,5	0,1064	0,2175	0,3322	0,4489
0,6	0,1117	0,2287	0,3494	0,4725
0,7	0,1698	0,3476	0,5291	0,7092
0,8	0,1715	0,3519	0,5369	0,7681
0,9	0,2216	0,4569	0,6946	0,9229
0,99	0,7159	1,3444	1,7164	1,8876

Таблица 2

x	P/μ			
	0,2	0,4	0,6	0,8
	$N(x)/2\mu$			
0	0,1358	0,2769	0,4208	0,5657
0,1	0,1372	0,2796	0,4252	0,5715
0,2	0,1406	0,2855	0,4341	0,5832
0,3	0,1445	0,2947	0,4481	0,6018
0,4	0,1510	0,3082	0,4685	0,6288
0,5	0,1601	0,3270	0,4971	0,6663
0,6	0,1717	0,3511	0,5334	0,7139
0,7	0,2399	0,4905	0,7387	0,9727
0,8	0,2465	0,5049	0,7608	1,0007
0,9	0,3421	0,6974	1,0288	1,3087
0,99	1,0676	1,7186	1,9295	1,9832

для которой при больших $|z|$ $\sqrt{(z-a)(b-z)} = -iz + O(1)$. Она характеризуется тем, что принимает положительные значения на верхней стороне $[ab]$.

Из (2.2) следует, что на $[ab]$

$$\varphi'^2(x)\big| = \exp\left[\left(\pi\omega_0 x + C_0 - F_0^{(1)} R_0^{(1)}(x) - F_0^{(2)} R_0^{(2)}(x)\right)/\pi \sqrt{(x-a)(b-x)}\right].$$

Подставляя это выражение в правую часть (1.9), находим нормальное контактное давление на $[ab]$ в виде

$$N(x) = \frac{2\mu(\lambda+\mu)\left\{\exp\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \times \left[\omega_0 x + \dfrac{(\lambda+2\mu)(P_0+P_1+P_2)}{2\pi\mu(\lambda+\mu)} - \dfrac{1}{\pi}\left(F_0^{(1)} R_0^{(1)}(x) + F_0^{(2)} R_0^{(2)}(x)\right)\right] - 1\right\}}{\lambda+\mu+\mu\exp\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \times \left[\omega_0 x + \dfrac{(\lambda+2\mu)(P_0+P_1+P_2)}{2\pi\mu(\lambda+\mu)} - \dfrac{1}{\pi}\left(F_0^{(1)} R_0^{(1)}(x) + F_0^{(2)} R_0^{(2)}(x)\right)\right]}. \tag{2.8}$$

Формула (2.8), как и (2.6), дает распределение нормальных напряжений на контактной области без особенностей. В частности, как видно из (2.8), имеет место соотношение (2.7), что в свою очередь свидетельствует об образовании пластических зон в указанных местах.

В табл. 3 приведены значения $N(x)/2\mu$ в различных точках контактной области при $\omega_0 = 0{,}1$ и разных значениях P/μ для $\lambda = \mu$, когда $a = -1$, $b = 1$, $c_1 = -3$, $d_1 = -2$, $c_2 = 2$, $d_2 = 3$, т. е. когда пригрузка действует с обеих сторон штампа.

Таблица 3

x	P/μ = 0,2	0,4	0,6	0,8
	$N(x)/2\mu$			
0	0,0977	0,1992	0,3037	0,4102
0,1	0,1041	0,2053	0,3094	0,4155
0,2	0,1118	0,2138	0,3186	0,4254
0,3	0,1211	0,2251	0,3319	0,4405
0,4	0,1326	0,2399	0,3502	0,4627
0,5	0,1470	0,2595	0,3750	0,4922
0,6	0,1647	0,2834	0,4053	0,5287
0,7	0,2404	0,4207	0,6025	0,7807
0,8	0,2577	0,4313	0,7067	0,7994
0,9	0,3735	0,6116	0,8443	1,0609
0,99	1,1883	1,6348	1,8524	1,9432

Таблица 4

x	P/μ = 0,2	0,4	0,6	0,8
	$N(x)/2\mu$			
0	0,1358	0,2768	0,4208	0,5657
0,1	0,1443	0,2871	0,4327	0,5789
0,2	0,1545	0,3005	0,4494	0,5985
0,3	0,1668	0,3179	0,4717	0,6253
0,4	0,1821	0,3405	0,5012	0,6612
0,5	0,2015	0,3699	0,5404	0,7089
0,6	0,2257	0,4069	0,5896	0,7687
0,7	0,3118	0,6639	0,8098	1,0378
0,8	0,3447	0,6048	0,8565	1,0875
0,9	0,4964	0,8470	1,1592	1,4125
0,99	1,4519	1,8536	1,9646	1,9915

В табл. 4 указаны значения $N(x)/2\mu$ для тех же условий и параметров, но при $R_0^{(1)} = 0$, т. е. когда пригрузка с интенсивностью P действует с правой стороны штампа.

Анализ приведенных данных показывает, что действие пригрузки вне штампа увеличивает значения контактных напряжений под штампом.

3. Пример 3. *Штамп с закругленным основанием с пригрузкой.* В рассматриваемом случае (с приемлемой точностью) принимаем $\delta(x) = x/R$, где R — достаточно большая величина. Действующая вне штампа пригрузка такая же, как и в предыдущих примерах.

Из (1.18) имеем

$$(3.1)\quad \varphi'(z)=\exp\left[\frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{2\pi}\left(\frac{1}{R}\int_a^b\frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}(x-z)}-i\int_{L_2}\frac{F_0(x)\,dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}(x-z)}\right)\right]$$

при соблюдении условий

$$(3.2)\quad \frac{1}{R}\int_{L_1}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} = i\int_{L_2}\frac{F_0(x)\,dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}},$$

$$\frac{1}{R}\int_{L_1}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} = i\int_{L_2}\frac{xF_0(x)\,dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} - \frac{(\lambda+2\mu)P_0}{2\mu(\lambda+\mu)}.$$

Из (3.1) после соответствующих вычислений получим

$$(3.3)\quad \varphi'(z) = \exp\left[\frac{iz}{2R} + \frac{\sqrt{(z-a)(b-z)}}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{F_0^{(1)}R_1^{(1)}(z) + F_0^{(2)}R_1^{(2)}(z)}{\pi}\right)\right],$$

где

$$R_1(z)=\frac{1}{\sqrt{(z-a)(b-z)}}\ln\left[\frac{2\sqrt{(c_i-a)(c_i-b)(z-a)(b-z)}+(c_i-z)(2z-a-b)}{2\sqrt{(d_i-a)(d_i-b)(z-a)(b-z)}+(d_i-z)(2z-a-b)}\right].$$

В этих соотношениях параметры a и b — пока неизвестные постоянные. Они должны быть определены из условий (3.2). Первое из них приводит к уравнению

$$F_0^{(1)}\left(\arcsin\frac{2d_1-a-b}{b-a}-\arcsin\frac{2c_1-a-b}{b-a}\right)-\tag{3.4}$$
$$-F_0^{(2)}\left(\arcsin\frac{2d_2-a-b}{b-a}-\arcsin\frac{2c_2-a-b}{b-a}\right)=\pi(a+b)/2R,$$

а из второго после некоторых вычислений находим

$$\pi(3a^2+3b^2-2ab)/8R+F_0^{(1)}\left[\sqrt{(d_1-a)(d_1-b)}-\sqrt{(c_1-a)(c_1-b)}-\right.\tag{3.5}$$
$$\left.-\frac{a+b}{2}\arcsin\frac{2d_1-a-b}{b-a}+\frac{a+b}{2}\arcsin\frac{2c_1-a-b}{b-a}\right]+$$
$$+F_0^{(2)}\left[\sqrt{(d_2-a)(d_2-b)}-\sqrt{(c_2-a)(c_2-b)}-\frac{a+b}{2}\arcsin\frac{2d_2-a-b}{b-a}+\right.$$
$$\left.+\frac{a+b}{2}\arcsin\frac{2c_2-a-b}{b-a}\right]=\frac{(\lambda+2\mu)(P_0+P_1+P_2)}{2\mu(\lambda+\mu)}.$$

В частности, при $a=-l$, $b=l$ в отсутствие пригрузки равенство (3.5) обращается в тождество, а из (3.6) после элементарных вычислений имеем

$$l=\sqrt{(\lambda+2\mu)R(P_0+P_1+P_2)/\pi\mu(\lambda+\mu)}.$$

Вернемся к формуле (3.3). Вычислим граничное значение функции $\varphi'(z)$ на $[ab]$ и полученное выражение внесем в (1.9). Тогда

$$N(x)=\frac{2\mu(\lambda+\mu)\left\{\exp\left[\left(\frac{1}{R}+\frac{F_0^{(1)}R_1^{(1)}(x)+F_0^{(2)}R_1^{(2)}(x)}{\pi}\right)\sqrt{(x-a)(b-x)}\right]-1\right\}}{\lambda+\mu+\mu\exp\left[\left(\frac{1}{R}+\frac{F_0^{(1)}R_1^{(1)}(x)+F_0^{(2)}R_1^{(2)}(x)}{\pi}\right)\sqrt{(x-a)(b-x)}\right]}.$$

Эта формула дает распределение нормальных напряжений на контактной области. Как видно, указанные напряжения, меняясь непрерывно на контактной области, обращаются в нуль на ее концах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **John F.** Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type // Communs. Pure Appl. Math.— 1960.— V. 13, N 2.
2. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости.— М.: Наука, 1980.
3. **Кузнецов Е. А.** Плоская контактная задача с учетом пригрузки, приложенной вне штампа // ПМ.— 1982.— Т. 18, № 5.
4. **Добордлжгинидзе Л. Г.** Плоская контактная задача нелинейной теории упругости для упругой полуплоскости из материала гармонического типа // Изв. АН СССР. МТТ.— 1987.— № 4.
5. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966.
6. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.

г. Тбилиси *Поступила 18/X 1990 г.,*
в окончательном варианте — 18/III 1991 г.