

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ С ПЛАСТИНКОЙ

А. М. Скобеев

(Москва)

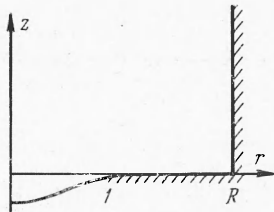
Строится численное решение задачи, связанной с измерением давления на границе между идеальной сжимаемой жидкостью и твердой стенкой. Предполагается, что жидкость занимает полубесконечный цилиндр с жестким дном, в которое вставлена упругая пластина, защемленная по краям. Движение вызывается волной давления, падающей из бесконечности. Описывается конечно-разностная схема, примененная при решении задачи, и приводятся результаты фактических расчетов.

Измерительным элементом при измерении напряжений на границе между сплошной средой и жесткой стенкой служит упругая пластина, лежащая в плоскости стенки и закрепленная по краям. О напряжении в среде судят по прогибу пластины, предполагая линейную связь между этими величинами. Коэффициент пропорциональности принимают таким, каким он будет, если среда представляет собой покоящуюся идеальную жидкость. Очевидно, что при таком методе измерения напряжений неизбежно возникают ошибки, которые в лучшем случае можно сделать достаточно малыми.

Эти ошибки имеют два основных источника. Первый из них состоит в том, что в среде, вообще говоря, могут существовать касательные напряжения. Например, среда представляет собой упругое полупространство, граничащее с жесткой неподвижной плоскостью, в которой имеется отверстие, закрытое упругой пластинкой. Среда нагружена и покоится. Очевидно, что при фиксированном напряжении прогиб пластинки будет ограничен, как бы ни была мала ее толщина. Если же среда представляет собой жидкость, то при фиксированном давлении прогиб будет неограниченно возрастать, если толщина пластинки стремится к нулю. Второй источник ошибок существует, если напряжение в среде меняется достаточно быстро. Он связан просто с инерционностью пластинки и среды. Соответствующие ошибки принято именовать статической и динамической, причем ясно, что они могут возникать одновременно, хотя рассматривать их удобнее порознь.

Дальнейшие рассмотрения касаются только динамической ошибки.

1. Простейшим примером среды, в которой отсутствует статическая ошибка, является идеальная сжимаемая жидкость. Предполагается, что



Фиг. 1

такая среда занимает полубесконечный круговой цилиндр с жестким дном, в которое вставлена круглая упругая пластина, защемленная по краям (фиг. 1). Смещения в среде предполагаются малыми и соответствующие уравнения — линейными. Единицы измерения выбраны так, чтобы радиус пластины, плотность среды и скорость звука в ней равнялись единице.

Используются цилиндрические координаты z, r, θ , время обозначается t . Среда занимает полубесконечный цилиндр $z > 0, r < R, R \geq 1$.

Координаты пластины $z = 0, r \leq 1$ (фиг. 1).

Движение в среде предполагается потенциальным, потенциал ψ не зависит от θ и удовлетворяет волновому уравнению

$$\psi_{tt} = \psi_{zz} + \Delta\psi \quad \text{при } z > 0, r < R \quad (\Delta\psi = \psi_{,r} + \psi_r/r) \quad (1.1)$$

Смещения u_1, u_2 и давление p связаны с ψ выражениями $u_1 = \psi_r, u_2 = \psi_z, p = -\psi_{tt}$. Прогиб пластинки обозначается w . Имеет место условие непрерывности смещений $u_2 = w$ при $z = 0, t \geq 0, r \leq 1$.

Граничные условия принимаются в виде

$$\begin{aligned} \psi_r = 0 \text{ при } r = R, \quad z > 0, \quad \psi_z = 0 \text{ при } z = 0, \quad 1 < r < R \\ \psi_{ztt} + a_1 \Delta \Delta \psi_z - a_2 \psi_{tt} = 0 \text{ при } z = 0, \quad r < 1 \\ \psi_z = 0, \quad \psi_{zr} = 0 \text{ при } z = 0, \quad r = 1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

В размерных переменных

$$a_1 = \frac{El_1^3}{12(1-\sigma^2)\rho_2 l_2^2 c^2}, \quad a_2 = \frac{\rho_1 l_2}{\rho_2 l_1}$$

где l_1 — радиус, l_2 — толщина, ρ_1 — плотность, E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона пластинки, ρ_2, c — плотность и скорость звука в среде.

Начальные условия при $t = 0$

$$\begin{aligned} \psi = -z^2/2, \quad \psi_t = -z \text{ при } z > 0, \quad r < R \\ \psi_z = \psi_{zt} = 0 \text{ при } z = 0, \quad r < 1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Такие начальные условия соответствуют единичной ступеньке давления, падающей из бесконечности.

Сформулированная математическая задача достаточно сложна и получить для нее замкнутое аналитическое решение не удастся. Обычно такие задачи сводятся к интегральным уравнениям, решать которые приходится приближенно или численно (см., например, [1]).

В данной работе задача решается прямым численным счетом. Так как фактические расчеты могут быть проведены лишь для конечного, причем небольшого числа комбинаций параметров, то задача нуждается в предварительном исследовании, которое проводится в п. 2, 3.

В задаче основной интерес представляет прогиб центра пластинки во времени, так как именно эта величина и измеряется в реальном эксперименте и по ней судят о давлении в среде.

2. В этом пункте рассматриваются решения системы (1.1), (1.2) вида¹

$$\psi = \varphi(z, r) \exp(i\omega t), \quad \varphi \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty, \quad \varphi \geq 0 \quad (2.1)$$

Существование решения типа (2.1) означает, что пластинка может совершать незатухающие колебания, даже если давление на бесконечности равно нулю, и, следовательно, по смещению пластинки нельзя судить о давлении на бесконечности.

Далее показывается, что система (1.1), (1.2) не может иметь решений вида (2.1). Это обстоятельство кажется довольно очевидным, однако при других граничных условиях такие решения существуют.

Введем функцию $v(z)$, определенную равенством

$$v = \int_0^R \varphi(z, r) r dr \quad (2.2)$$

Из (1.1) и условия $\psi_r = 0$ при $r = R$ для v получается уравнение

$$\omega^2 v + v_{zz} = 0 \quad (2.3)$$

¹ Неравенство $\varphi \geq 0$ несколько ограничивает содержательность утверждения, которое доказывается ниже. Однако весьма правдоподобно, что утверждение сохраняет силу и в случае непостоянства знака $\varphi(r, z)$. Это подтверждается численными результатами, которые приводят к статическому решению при $t \rightarrow \infty$. Частный случай, когда $R = 1$ (пластина занимает все основание «трубы»), допускает простое решение методом разделения переменных и наглядно демонстрирует, как влияет выбор граничных условий на существование свободных колебаний. В этом примере $\varphi(r, z)$ вообще не сохраняет знака (примечание редактора).

Очевидно, что это уравнение не имеет нетривиальных убывающих на бесконечности решений, поэтому $v \equiv 0$. Так как $\varphi \geq 0$, то из (2.2) следует, что $v(r) = 0$, лишь если $\varphi(z, r) = 0$ для всех $r < R$. Таким образом, система (1.1), (1.2) не имеет нетривиальных решений вида (2.1).

Рассмотрим граничные условия, которые отличаются от (1.2), тем, что $\psi = 0$ при $r = R$, $\psi_z = \Delta\psi_z = 0$ при $z = 0$ и $r = 1$. Построим частное решение в предположении $R = 1$.

Будем искать решение в виде

$$\psi = J_0(\lambda r) \exp(i\omega t - \mu z) \quad (2.4)$$

где J_0 — функция Бесселя, λ — первый корень уравнений $J_0(\lambda) = 0$, μ и ω следует выбрать так, чтобы выполнялось уравнение (1.1) и граничные условия.

Ясно, что если $\mu > 0$, то (2.4) удовлетворяет условиям (2.1).

Если (2.4) подставить в (1.1) и (1.2), то получатся два уравнения для ω и μ

$$\omega^2 + \mu^2 - \lambda^2 = 0, \quad \mu(\omega^2 - a_1\lambda^4) + a_2\omega^2 = 0 \quad (2.5)$$

Покажем, что (2.5) всегда имеет решение. Действительно, если учесть условие $\mu > 0$, то из (2.5) можно получить уравнение для ω

$$\omega^2 - a_1\lambda^2 + a_2\omega^2 / \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} = 0 \quad (2.6)$$

Очевидно, что при $0 < \omega < \lambda$ левая часть этого уравнения есть монотонная функция ω , причем при $\omega = 0$ она меньше нуля, при $\omega \rightarrow \lambda$ — больше нуля и, следовательно, на интервале $(0, \lambda)$ (2.6) имеет единственное решение.

Таким образом, (2.4) есть решение типа (2.1), если ω и μ выбрать так, чтобы выполнялось (2.5).

3. Далее строится приближенное решение краевой задачи (1.1) — (1.3) при дополнительном предположении $R = 1$. Это решение описывает прогиб пластинки во времени и не содержит информации о поле давления.

Вводится функция $v(t, z)$, определенная равенством, аналогичным (2.2)

$$v(t, z) = 2 \int_0^1 \psi(t, z, r) r dr \quad (3.1)$$

Интегрированием по r уравнения (1.1) получится уравнение для v

$$v_{tt} = v_{zz} \quad (3.2)$$

Здесь существенно использовано условие $\partial\psi / \partial r = 0$ при $r = 1$ и $z > 0$.

Интегрированием (1.3) получатся начальные условия для (3.2)

$$v(0, z) = -z^2 / 2, \quad v_t(0, z) = -z \quad \text{при } z > 0 \quad (3.3)$$

Упрощающее предположение состоит в том, что прогиб пластинки ищется в виде

$$w = Q(t) (1 - r^2)^2 / 32 \quad (3.4)$$

где $Q(t)$ — неизвестная функция. Зависимость w от r выбрана так, чтобы (3.4) правильно описывала статический прогиб пластинки.

Из (3.4) и (3.1) получается граничное условие для (3.2) $v_z(t, 0) = 1/96 Q(t)$.

Это условие совместно с (3.3) определяет решение (3.2)

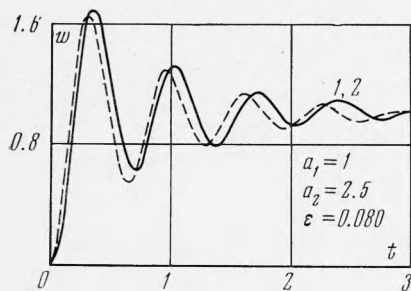
$$v = - \int_0^{t-z} 1/96 Q(s) ds - t^2 - z^2 \quad (3.5)$$

Так как зависимость w от r зафиксирована, то удовлетворить условиям (1.2) невозможно. Потребуем, чтобы они выполнялись в среднем по r . Это даст уравнение для $Q(t)$

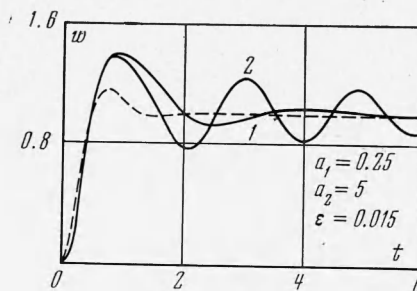
$$Q'' + a_2 Q' + 96a_1 Q = -192a_2 \quad (3.6)$$

Начальные условия для (3.6) получаются из (1.3) и имеют вид $Q(0) = Q'(0) = 0$.

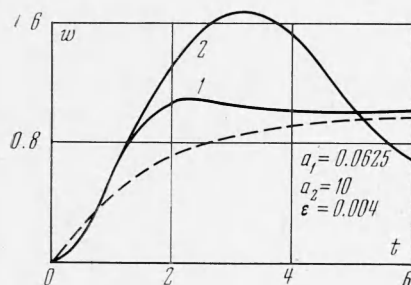
Уравнение (3.6) есть классическое уравнение затухающих колебаний; свойства его решений хорошо известны и здесь их можно не обсуждать. Результаты фактического построения решения изображены на фиг. 2—6 пунктиром.



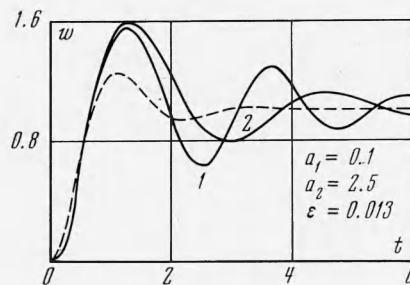
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

При получении (3.6) свойства симметрии задачи по существу не использовались, поэтому все рассуждения остаются в силе, если пластинка имеет произвольную достаточно гладкую форму, нужно только потребовать, чтобы она занимала все основание цилиндра, но при этом коэффициенты в (3.6) будут другими.

4. Далее описывается численный метод решения основной задачи и приводятся результаты фактических расчетов. Для частного случая $R = 1$ дается сравнение с приближенным решением.

Численное решение задачи проводится по обычной схеме, т. е. все производные заменяются разностными отношениями, а полученная система линейных алгебраических уравнений решается на ЭВМ.

Уравнение (1.1) с условиями (1.2), (1.3) не удобно для численного решения, так как решение ищется в полубесконечной области, а начальные значения негладкие, поэтому задача подверглась предварительной обработке.

Особенность в начальных условиях легко выделяется. Для этого решение представляется в виде

$$\psi = \psi_1 + \psi_2, \text{ где } \psi_2 = (t - z)^2 / 2 \text{ для } z \geq t, \psi_2 = 0 \text{ для } z < t$$

Из линейности задачи ясно, что ψ_1 удовлетворяет (1.1), (1.2) с начальными условиями

$$\psi_1 = -z^2, \quad \psi_{1t} = 0 \quad \text{при } t = 0$$

Кроме того, $\psi_1 = \psi$ при $z < t$, в частности, при $z = 0, t > 0$. Так как основной интерес представляет зависимость прогиба пластинки от времени, то в дальнейшем не делается различия между ψ и ψ_1 .

Так как граничные условия содержат дифференциальное уравнение для ψ_z , то оказалось удобным перейти к переменным

$$w(t, r) = \psi_z(t, 0, r), \\ p(t, z, r) = -\psi_{tt}(t, z, r)$$

Для p получается уравнение

$$p_{tt} = p_{zz} + \Delta p \quad (\Delta p = p_{rr} + p_r/r) \quad (4.1)$$

с условиями

$$p_r(t, 0, z) = p_r(t, R, z) = 0, \quad p_z(t, r, 0) = -w_{tt} \\ p(0, r, z) = 2, \quad p_t(0, r, z) = 0 \quad (4.2)$$

При $1 \leq r \leq R$ $w(t, r) = 0$, при $r < 1$ для w выполняется уравнение

$$w_{tt} + a_1 \Delta \Delta w + a_2 p = 0 \quad (4.3)$$

с условиями

$$w_r(t, 0) = w_{rrr}(t, 0) = 0 \\ w(t, 1) = w_r(t, 1) = 0, \quad w(0, r) = w_t(0, r) = 0 \quad (4.4)$$

В граничные условия (4.2) и (4.4) входит условие при $r = 0$, которое выбирается из соображений симметрии и сводится к тому, что если p и w не зависят от θ , то они должны быть четными функциями r .

Соотношения (4.1) — (4.4) полностью эквивалентны исходной задаче для $z < t$.

Так как численное решение фактически может быть построено только в ограниченной области, то в задачу следует ввести дополнительное граничное условие. Полубесконечный цилиндр обрезается при $z = z_0$ и на полученной границе ставится условие

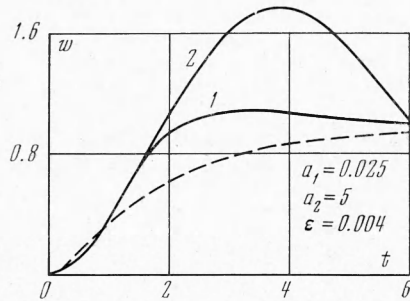
$$p_t + p_z = 0 \quad \text{при } z = z_0 \quad (4.5)$$

Смысл этого условия выясняется, если рассмотреть косое падение плоской волны на плоскую границу, на которой выполняется (4.5). Пусть в плоскости xz при $z = 0$ задано условие (4.5) и при $z < 0$ задана падающая волна $p = f(t - \cos \alpha z - \sin \alpha x)$. Тогда отраженная волна получится в виде

$$p = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} f(t + \cos \alpha z - \sin \alpha x) \quad (4.6)$$

Если при $z = 0$ граница отсутствует, то никакой отраженной волны не будет. Из (4.6) видно, что коэффициент отражения равен нулю при нормальном падении ($\alpha = 0$) и имеет порядок α^2 при малых α .

Так как можно ожидать, что при достаточно больших z движение будет близко к одномерному, условие (4.5) представляется оправданным.



Фиг. 6

По r область ограничена, однако возможна ситуация $R \gg 1$; тогда полагалось $R = 3$ и при $r = 3$ ставилось условие, аналогичное (4.5).

Таким образом, возникает задача численного решения системы (4.1)–(4.5) в области $0 \leq r \leq R$, $0 \leq z \leq z_0$, $t > 0$.

Уравнение (4.1) во внутренних точках области аппроксимируется трехслойной явной схемой второго порядка, причем шаги по времени и координатам выбираются так, чтобы выполнялось условие Куранта [2]. Уравнение (4.3) решалось по неявной схеме. Такой выбор объясняется тем, что машинное время в основном тратится на вычисление p во внутренних точках, поэтому желательно избежать дополнительных ограничений на шаг по времени, которые возникают, если для (4.3) применяется явная схема.

Используются обычные обозначения: h — шаг по r и z , τ — шаг по t

$$p_{ij}^k = p(k\tau, hi, hj), \quad -2 \leq k, \quad 0 \leq i \leq n_3, \quad -1 \leq j \leq n_2$$

$$n_3 = R/h, \quad n_2 = z_0/h, \quad w_i^k = w(k\tau, hi), \quad 0 \leq i \leq n, \quad n = 1/h$$

Чтобы выполнялся критерий Куранта [2], полагается $h = 2\tau$.

Для аппроксимации производной порядка m от функции $f(\xi)$ по направлению ξ вводятся центральные разностные операторы δ_ξ^m и одно-сторонние d_ξ^m по формулам

$$\begin{aligned} \delta_\xi^1 f &= \frac{1}{2\xi_0} [f(\xi + \xi_0) - f(\xi - \xi_0)], & \delta_\xi^2 f &= \frac{1}{\xi_0^2} [f(\xi + \xi_0) - 2f(\xi) + f(\xi - \xi_0)] \\ d_\xi^1 f &= \frac{1}{2\xi_0} [3f(\xi) - 4f(\xi - \xi_0) + f(\xi - 2\xi_0)] & (4.7) \\ d_\xi^2 f &= \frac{1}{\xi_0^2} [2f(\xi) - 5f(\xi - \xi_0) + 4f(\xi - 2\xi_0) - f(\xi - 3\xi_0)] \end{aligned}$$

где $\xi_0 = \tau$, если $\xi = t$, $\xi_0 = h$, если $\xi = r$, z .

Для аппроксимации Δ вводится оператор $q = \delta_r^2 + r^{-1}\delta_r^1$. Видно, что эти операторы аппроксимируют соответствующие производные с точностью до второго порядка.

Для (4.1) принимается трехслойная явная схема

$$(\delta_t^2 - \delta_z^2 - q) p_{ij}^k = 0, \quad 0 \leq k, \quad 0 < i < n_3, \quad 0 \leq j < n_2 \quad (4.8)$$

Граничные условия для (4.8) принимают вид

$$\begin{aligned} (d_z^1 + d_t^1) p_{ij}^k &= 0 \quad \text{при } j = n_2, \quad 0 < i < n_3 \\ d_{-z}^1 p_{0j}^k &= 0 \quad \text{при } 0 \leq j < n_2 \\ (d_r^1 + \alpha d_t^1) p_{ij}^k &= 0 \quad \text{при } i = n_3, \quad 0 \leq j < n_2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $\alpha = 1$, если $R = 3$, $\alpha = 0$, если $R < 3$.

Граничное условие при $z = 0$ имеет вид $p_z + w_{tt} = 0$. Для аппроксимации этого условия вводятся фиктивные точки $j = -1$ по формуле

$$p_{i,-1}^k = p_{i,1}^k + 2hd_t^2 w_i^k \quad (4.10)$$

и предполагается, что (4.8) справедливо при $j = 0$.

Уравнение (4.3) преобразуется с учетом условия $p_z + w_{tt} = 0$ к виду

$$(1 + a_2 h) w_{tt} + a_1 \Delta \Delta w + a_2 p(t, r, h) + o(h^2) = 0$$

и аппроксимируется по четырехслойной неявной схеме

$$(1 + a_2 h) d_i^2 w_i^k + a_1 q q w_i^k + a_2 p_{i,1}^k = 0, \quad k \geq 1 \quad (4.11)$$

Смысл этого не вполне очевидного преобразования можно разъяснить на примере одномерного уравнения $p_{tt} = p_{zz}$ с граничными условиями $w_{tt} = -a_2 p$, $p_z + w_{tt} = 0$ при $z = 0$ и начальными $w = w_i = 0$, $p = p_i = 0$ при $t = 0$.

Если положить $h = \tau$, то аналогично (4.8) получим

$$\begin{aligned} p_j^{k+1} &= p_{j+1}^k + p_{j-1}^k - p_j^{k-1}, \quad 0 \leq j < \infty, \quad 0 \leq k \\ p_j^{-1} &= p_j^1 = 1, \quad -1 \leq j \end{aligned} \quad (4.12)$$

Фиктивные точки $j = -1$ вводятся аналогично (4.10)

$$p_{-1}^k = p_1^k + 2h w_{tt} \quad (4.13)$$

Рассмотрим два способа аппроксимации (4.13). Первый соответствует уравнению (4.3), второй — уравнению (4.11)

$$w_{it} + a_2 p_0^k = 0, \quad (1 + a_2 h) w_{tt} + a_2 p_1^k = 0 \quad (4.14)$$

Из (4.12) можно усмотреть, что $p_{j+1}^{k+1} - p_j^k = 0$ при $j \geq 0$, $k \geq 0$. Отсюда получается уравнение для p_0^k , которое для первого способа аппроксимации граничного условия имеет вид

$$p_0^{k+1} + 2a_2 h p_0^k - p_0^{k-1} = 0 \quad (4.15)$$

для второго

$$p_0^{k+1} - \frac{1 - a_2 h}{1 + a_2 h} p_0^{k-1} = 0 \quad (4.16)$$

Видно, что (4.16) устойчиво при любых $h \geq 0$, (4.15) неустойчиво для всех $h > 0$. Граничные условия для (4.3) при $r = 1$ имеют вид $w = 0$, $w_r = 0$. Шаг по r выбран так, чтобы $r = 1$ было точкой сетки, поэтому первое условие выполнено точно.

Вводится фиктивная точка $r = 1 + h$ и второе условие заменяется на $w_{n+1} = w_{n-1}$. Для аппроксимации условий при $r = 0$ вводятся фиктивные точки $r = -h$ и $r = -2h$ и условия приобретают вид $w_{-1} = w_1$, $w_{-2} = w_2$. Уравнение (4.11) предполагается справедливым при $0 \leq i \leq n-1$. Однако при $r = 0$ (4.3) содержит особенность, поэтому (4.11) при $i = 0,1$ должно быть видоизменено.

Сравнительно несложными вычислениями можно показать, что

$$\begin{aligned} \Delta \Delta w &= 16 (w_2 - 4w_1 + 3w_0) / 3h^4 + o(h^2) \quad \text{при } r = 0 \quad (4.17) \\ \Delta \Delta w &= \left(2w_3 - \frac{20}{3} w^2 + \frac{26}{3} w_1 - 4w_0 \right) / h^4 + o(h^2) \quad \text{при } r = h \end{aligned}$$

Поэтому при $i = 0,1$ выражение $q q w_i$ в (4.11) следует заменить на правые части (4.12).

Начальные условия для $k = 0, -1, -2$ принимаются в виде

$$p_{ij}^k = 1, \quad 0 \leq i \leq n_2, \quad -1 \leq j \leq n_3, \quad w_i^0 = w_i^{-1} = w_i^{-2} = 0, \quad 0 \leq i \leq n$$

Уравнение (4.11) принадлежит к пятидиагональному типу, для него существует эффективный метод прогонки [2], который и использовался.

Система конечно-разностных уравнений (4.8)–(4.11) аппроксимирует исходную систему; необходимо оценить возникающую при этом ошибку, так как от нее зависит достоверность полученных результатов. В дальнейшем под решением будем понимать функцию $w_0(t) = w(t, 0)$.

Рассмотрим статическую задачу, соответствующую (4.1)–(4.4). Эта задача получится, если в (4.1)–(4.4) положить $\partial/\partial t \equiv 0$ и выбросить начальные условия. Эта задача

имеет очевидное решение

$$p = 2, \quad w(r) = -\frac{a_2}{32a_1}(r^2 - 1)^2 \quad (4.18)$$

Конечно-разностная аппроксимация этой задачи получится, если в (4.8)–(4.11) положить $d_t^2 = \delta_t^2 = 0$. Полученная система уравнений также имеет простое решение

$$p_{ij} = 2, \quad w_i = -\frac{a_2}{32a_1} \left(i - \frac{i^2}{n^2} \right) \left(1 + \frac{2}{n^2} - \frac{i^2}{n^2} \right) \quad (4.19)$$

Из (4.18), (4.19) получается выражение для ошибки аппроксимации

$$\frac{w_0 - w(0)}{w(0)} = \frac{2}{n^2} = 2h^2 \quad (4.20)$$

Так как из физических соображений и рассуждений п. 2 кажется вероятным, что решение (4.1)–(4.4) при $t \rightarrow \infty$ будет стремиться к статическому, то (4.20) можно рассматривать как оценку снизу для максимальной ошибки.

Эти рассуждения касаются погрешности аппроксимации производных по координатам и существенно используют то обстоятельство, что исключение зависимости от времени резко упрощает ситуацию. Аналогично можно поступить и с производными по времени.

Так как найти подходящий частный случай не удастся, то использовалась модельная задача. Рассматривалась одномерная задача для уравнения (3.2) с граничными условиями (3.4), (3.6).

Эта задача имеет точное решение, которое можно получить из (3.6). Уравнение (3.2) и граничные и начальные условия заменялись конечно-разностными уравнениями, аналогичными (4.8)–(4.11). Эти уравнения решались на интервале $0 \leq t \leq 10$, и вычислялось среднее квадратичное отклонение полученного решения от точного.

Численное значение этой величины для соответствующих значений параметров приведено на фиг. 2–6, где оно обозначено через ε .

Результаты расчетов для конкретных значений параметров a_1 и a_2 приведены на фиг. 2–6. Кривые 1 на этих фигурах изображают $w_0(t)$ для $R = 1$, $n = n_3 = 10$, $n_2 = 30$, кривые 2 соответствуют $R = 3$, $n = 10$, $n_2 = n_3 = 30$, пунктиром изображено решение (3.6). Масштаб по w выбран так, чтобы $w \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$. Ясно, что одной и той же комбинации a_1 и a_2 могут соответствовать разные значения размерных параметров. Например, можно считать, что на фиг. 2–4 все параметры одинаковы, кроме толщины пластинки, которая уменьшается при переходе к следующей фигуре в два раза, а фиг. 5, 6 отличаются от фиг. 2, 3 только модулем Юнга, который для них в 10 раз меньше. Видно, что для достаточно жестких пластинок все кривые близки друг к другу, в частности на фиг. 2 кривые 1, 2 совпадают в пределах точности графика.

Окончательно можно сделать вывод, что для достаточно жестких пластинок (3.6) дает удовлетворительное количественное, а в остальных случаях качественное согласие с точным решением.

В заключение автор благодарит Л. М. Флитмана за обсуждение работы.

Поступила 22 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. А ф а н а с ь е в Е. Ф. Отражение волны давления от плоскости с деформируемой частью в виде мембраны. Инж. ж., 1961, т. 1, вып. 2.
2. В а з о в В., Ф о р с а й т Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1963.