

УДК 532.546:536.421

ОБРАЗОВАНИЕ ГАЗОГИДРАТА В ПОРИСТОМ РЕЗЕРВУАРЕ, ЧАСТИЧНО НАСЫЩЕННОМ ВОДОЙ, ПРИ ИНЖЕКЦИИ ХОЛОДНОГО ГАЗА

В. Ш. Шагапов, М. К. Хасанов*, Н. Г. Мусакаев**

Институт механики Уфимского научного центра РАН, 450025 Уфа

* Стерлитамакская государственная педагогическая академия, 453103 Стерлитамак

** Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики

им. С. А. Христиановича СО РАН, 625026 Тюмень

E-mails: shagapov@rambler.ru, hasanovmk@mail.ru, musakaev@ikz.ru

Рассмотрены особенности образования газовых гидратов при инжекции газа в пористую среду, в исходном состоянии заполненную газом и водой. Построены автомодельные решения осесимметричной задачи, описывающие распределения основных параметров в пласте. Показана возможность существования решений, согласно которым образование газогидрата может происходить как на фронтальной поверхности, так и в объемной области.

Ключевые слова: газовые гидраты, фильтрация, гидратообразование, автомодельное решение, численное исследование.

Введение. Возможность хранения газа в гидратном состоянии имеет широкие перспективы применения в промышленности. Рядом исследователей предлагается подземная газогидратная консервация парниковых газов, обеспечивающая высокий уровень безопасности хранения и не требующая больших энергетических затрат. Как известно, при одинаковых условиях в единице объема в гидратном состоянии концентрация газа значительно больше, чем в свободном состоянии [1, 2].

В работах [3–5], посвященных исследованию вопросов математического моделирования процессов разложения газовых гидратов при тепловом и депрессионном воздействии на пористую среду, насыщенную газовым гидратом и газом, показано существование решений, согласно которым разложение гидратов может происходить как на поверхности фазовых переходов, так и в объемной области.

В настоящей работе в осесимметричном приближении рассматриваются особенности образования гидрата при нагнетании газа в пористый пласт, заполненный в исходном состоянии газом и водой.

1. Основные уравнения. Пусть температура пористой среды и насыщающего вещества (газа, гидрата или воды) одинаковы. Гидрат представляет собой двухкомпонентную систему с массовой концентрацией газа G . Скелет пористой среды, газогидрат и вода несжимаемы и неподвижны, пористость постоянна, газ является калорически совершенным:

$$\rho_{sk}, \rho_h, \rho_l, m = \text{const}, \quad p = \rho_g R_g T.$$

Здесь ρ_j ($j = sk, h, l, g$) — истинные плотности фаз; m — пористость; p — давление; T — температура; R_g — газовая постоянная; индексы g, l, h, sk соответствуют параметрам газа, воды, гидрата и скелета пористой среды.

С учетом принятых допущений уравнения сохранения масс газа и воды в осесимметричном приближении запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (mS_g\rho_g) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rS_gmv_g\rho_g) = -mG\rho_h \frac{\partial S_h}{\partial t}; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (mS_l\rho_l) = -m(1-G)\rho_h \frac{\partial S_h}{\partial t}; \quad (1.2)$$

$$S_g + S_l + S_h = 1, \quad (1.3)$$

где S_j ($j = g, l, h$) — насыщенность пор j -й фазы; v_g — скорость газовой фазы.

Для скоростей фильтрации жидкости и газа имеет место равенство $mS_lv_l/(mS_gv_g) = \mu_g k_l/(\mu_l k_g)$ (k_i ($i = l, g$) — коэффициенты фазовой проницаемости). Поскольку динамическая вязкость газа μ_g много меньше вязкости жидкости μ_l , данное отношение, как правило, мало (за исключением случаев, когда водонасыщенность близка к единице). Поэтому в большинстве случаев, когда, например, в исходном состоянии насыщенность пор водой $S \leq 0,5$ (в данной работе рассматривается именно такой случай), допущение о неподвижности жидкости ($v_l = 0$) оправданно.

Процесс фильтрации газа подчиняется закону Дарси

$$mS_gv_g = -\frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (1.4)$$

Пренебрегая баротермическим эффектом, уравнение притока тепла запишем в виде

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_g c_g m S_g v_g \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \lambda \frac{\partial T}{\partial r}) + m \rho_h L_h \frac{\partial S_h}{\partial t}; \quad (1.5)$$

$$\rho c = (1-m)\rho_{sk}c_{sk} + m \sum_{j=g,l,h} S_j \rho_j c_j, \quad \lambda = (1-m)\lambda_{sk} + m \sum_{j=g,l,h} S_j \lambda_j.$$

Здесь L_h — удельная теплота гидратообразования; ρc , λ — удельная объемная теплоемкость и теплопроводность системы; c_j , λ_j — удельная теплоемкость и теплопроводность фаз. Во всем пласте величины ρc и λ будем полагать постоянными, поскольку основной вклад в эти величины вносят параметры скелета пористой среды.

Зависимость коэффициента проницаемости газа k_g от газонасыщенности можно задать формулой Козени

$$k_g = k_*(mS_g)^3/(1-mS_g)^2 \approx k_0 S_g^3 \quad (k_0 = k_* m^3).$$

Температура и давление в области образования гидрата связаны условием фазового равновесия [2]

$$T = T_0 + T_* \ln(p/p_{s0}), \quad (1.6)$$

где T_0 , p_{s0} — начальная температура системы и соответствующее ей равновесное давление; T_* — эмпирический параметр, зависящий от вида газогидрата.

В общем случае при образовании газогидрата в пористом пласте могут возникнуть три характерные области. В области, находящейся вблизи скважины (ближней области), поры заполнены газом и гидратом. В промежуточной области происходит образование газогидрата, поэтому здесь поры заполнены газом, водой и гидратом. В наиболее удаленной от скважины (дальней) области присутствуют газ и вода. На границах этих областей должны выполняться условия баланса массы и тепла

$$\begin{aligned} [m(S_h \rho_h (1 - G) + S_l \rho_l) \dot{r}_{(i)}] = 0, \quad [m(\rho_g S_g (v_g - \dot{r}_{(i)}) - \rho_h S_h G \dot{r}_{(i)})] = 0, \\ \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right] = [m \rho_h L_h S_h \dot{r}_{(i)}]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь $[f]$ — скачок величины f на границе $r_{(i)}$ ($i = s, m$) между областями; $\dot{r}_{(i)}$ — скорость движения этой границы; $r_{(s)}$ — граница между ближней и промежуточной областями; $r_{(m)}$ — граница между промежуточной и дальней областями. Температуру и давление на этих границах будем полагать непрерывными.

Следует отметить, что в принятой равновесной схеме (как на фронтальных поверхностях, так и в объемных зонах) интенсивность образования гидрата ограничивается отводом скрытой теплоты гидратообразования.

Согласно современным представлениям [6] образование частиц гидрата сопровождается неравновесными процессами, обусловленными диффузией гидратообразующего газа по направлению к поверхности контакта вода — гидрат через слои воды и гидрата. Полагая характерные толщины таких слоев порядка размеров поровых каналов $\sqrt{k/m}$, для характерных времен t_D релаксации диффузионной неравновесности имеем оценку $t_D \simeq k/(mD)$, где D — коэффициент диффузии. По сравнению с временами, представляющими интерес в рассматриваемой задаче, эти характерные времена, как правило, очень малы.

Из уравнения неразрывности для воды (1.2) имеем

$$\rho_l (S_l - S_{l0}) + (1 - G) \rho_h S_h = 0 \quad (1.8)$$

(S_{l0} — начальная водонасыщенность). Отсюда, учитывая соотношение (1.3), получаем

$$S_l = S_{l0} - (\rho_h / \rho_l) (1 - G) S_h, \quad S_g = 1 - S_{l0} - (1 - (\rho_h / \rho_l) (1 - G)) S_h.$$

В рассматриваемой осесимметричной задаче о нагнетании газа в горизонтальный пористый пласт будем полагать, что в начальный момент времени этот пласт насыщен газом и водой, давление p_0 и температура T_0 которых в исходном состоянии соответствуют термодинамическим условиям существования их в свободном состоянии ($p_0 \leq p_{s0}$) и во всем пласте изначально одинаковы:

$$t = 0: \quad T = T_0, \quad p = p_0 \quad (r \geq r_w). \quad (1.9)$$

Пусть через скважину, вскрывшую пласт на всю его толщину, закачивается газ (одноименный исходному) с постоянным массовым расходом Q_g (на единицу высоты скважины) и постоянной температурой T_w . В результате нагнетания газа вблизи скважины образуется область, насыщенная газом и гидратом. Будем полагать, что при достаточно больших временах нагнетания газа, когда размеры данной области значительно превышают радиус скважины ($r_{(s)} \gg r_w$), влияние размера скважины на характеристики протекания процесса незначительно. Тогда с учетом закона Дарси и уравнения состояния газа условия на границе скважины имеют вид

$$r = r_w: \quad - \frac{k_g \pi}{\mu_g R_g T_w} \left(r \frac{\partial p^2}{\partial r} \right) = Q_g, \quad T = T_w \quad (r_w \rightarrow 0, t > 0). \quad (1.10)$$

Сформулированная задача имеет автомодельное решение.

2. Решение с фронтальной поверхностью фазовых переходов. В данном случае возникают две характерные области. В области вблизи скважины вода полностью перешла в газогидратное состояние, поэтому в порах присутствуют только газ и газогидрат. Во второй (дальней) области поры пласта заполнены газом и водой. Следовательно, образование газогидрата полностью происходит на фронтальной поверхности между этими областями, а промежуточная область отсутствует.

Введем автомодельную переменную

$$\xi = r/\sqrt{\alpha^{(T)}t}$$

($\alpha^{(T)} = \lambda/(\rho c)$ — температуропроводность пласта), с учетом соотношений (1.1)–(1.5) уравнения температуропроводности и пьезопроводности в данном случае можно записать в виде

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\xi \frac{dT_{(i)}}{d\xi} &= \frac{1}{2} \frac{\text{Pe}_{(i)}}{p_0^2} \frac{dp_{(i)}^2}{d\xi} \frac{dT_{(i)}}{d\xi} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dT_{(i)}}{d\xi} \right), \\ -\xi \frac{dp_{(i)}^2}{d\xi} &= 2\eta_{(i)} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dp_{(i)}^2}{d\xi} \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\eta_{(i)} = \frac{\alpha^{(p)}}{\alpha^{(T)}}, \quad \alpha^{(p)} = \frac{k_{(i)}p_0}{mS_{g(i)}\mu_g}, \quad \text{Pe}_{(i)} = \frac{\rho_{g0}c_g}{\lambda} \frac{k_{(i)}p_0}{\mu_g}, \quad k_{(i)} = k_0S_{g(i)}^3,$$

нижние индексы в скобках $i = 1, 2$ соответствуют параметрам первой и второй областей. Заметим, что уравнение пьезопроводности получено с использованием метода линеаризации Лейбензона [7].

На поверхности, разделяющей ближнюю и дальнюю области, происходит скачок гидратонасыщенности с $S_h^- = S_{h(1)}$ до $S_h^+ = 0$. Гидратонасыщенность первой области $S_{h(1)}$ определяется из условия (1.8)

$$S_{h(1)} = \rho_l S_{l0}/(\rho_h(1 - G)).$$

На границе между этими областями давление и температура связаны условием фазового равновесия (1.6).

Используя соотношения (1.7), систему уравнений для определения автомодельной координаты $\xi_{(s)}$ границы фазовых переходов и значений параметров на ней запишем в виде

$$\frac{dT_{(1)}}{d\xi} - \frac{dT_{(2)}}{d\xi} = \frac{\Delta T S_{h(1)}}{2} \xi_{(s)}, \quad k_{(2)} \frac{dp_{(2)}^2}{d\xi} - k_{(1)} \frac{dp_{(1)}^2}{d\xi} = K S_{h(1)} \xi_{(s)}, \quad (2.2)$$

где

$$\Delta T = m\rho_h L_h/(\rho c), \quad K = m\mu_g \alpha^{(T)} p_0 (\rho_h G/\rho_{g0} + \rho_h(1 - G)/\rho_l - 1).$$

Проинтегрировав уравнения (2.1), с учетом начальных и граничных условий (1.9), (1.10) для давления и температуры в каждой из областей получаем

$$p_{(1)}^2 = p_{(s)}^2 + \frac{Q_g \mu_g R_g T_w}{\pi k_{(1)}} \int_{\xi}^{\xi_{(s)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_{(1)}}\right) d\xi, \quad (2.3)$$

$$T_{(1)} = T_{(s)} + (T_w - T_{(s)}) \int_{\xi}^{\xi_{(s)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{\text{Pe}_{(1)}}{2p_0^2} p_{(1)}^2\right) d\xi / \int_0^{\xi_{(s)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{\text{Pe}_{(1)}}{2p_0^2} p_{(1)}^2\right) d\xi;$$

$$p_{(2)}^2 = p_0^2 + (p_{(s)}^2 - p_0^2) \int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_{(2)}}\right) d\xi / \int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_{(2)}}\right) d\xi, \quad (2.4)$$

$$T_{(2)} = T_0 + (T_{(s)} - T_0) \int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{\text{Pe}_{(2)}}{2p_0^2} p_{(2)}^2\right) d\xi / \int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{\text{Pe}_{(2)}}{2p_0^2} p_{(2)}^2\right) d\xi.$$

После подстановки в систему граничных условий (2.2) решений (2.3), (2.4) она принимает вид

$$k_{(2)}(p_0^2 - p_{(s)}^2) \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{4\eta_{(2)}}\right) / \int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_{(2)}}\right) d\xi + \frac{Q_g \mu_g R_g T_w}{\pi} \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{4\eta_{(1)}}\right) = K S_{h(1)} \xi_{(s)}^2; \quad (2.5)$$

$$(T_{(s)} - T_w) \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{4} - \frac{\text{Pe}_{(1)}}{2p_0^2} p_{(s)}^2\right) / \int_0^{\xi_{(s)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{\text{Pe}_{(1)}}{2p_0^2} p_{(1)}^2\right) d\xi - (T_0 - T_{(s)}) \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{4} - \frac{\text{Pe}_{(2)}}{2p_0^2} p_{(s)}^2\right) / \int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{\text{Pe}_{(2)}}{2p_0^2} p_{(2)}^2\right) d\xi = \frac{\Delta T S_{h(1)}}{2} \xi_{(s)}^2. \quad (2.6)$$

Систему (2.5), (2.6) можно решить следующим образом. Выражая явно из уравнения (2.5) величину $p_{(s)}$ и подставляя ее в соотношение (2.6), с учетом условия (1.6) получаем трансцендентное уравнение с одной неизвестной $\xi_{(s)}$. Решая полученное уравнение (например, методом половинного деления), определяем величину $\xi_{(s)}$, а затем находим распределение давления и температуры в первой и второй областях, в том числе значения данных параметров на границе между областями.

На рис. 1, *а* представлены распределения температуры и давления при нагнетании газа (метана) с массовым расходом $Q_g = 0,02$ кг/(м·с) и температурой $T_w = 278$ К в пласт с начальным давлением $p_0 = 4$ МПа и начальной водонасыщенностью $S_{l0} = 0,2$. Линией 2 на рис. 1, *а* показано распределение равновесной температуры, соответствующей полученному распределению давления.

На рис. 1, *а* видно, что перед фронтом гидратообразования температура пласта ниже равновесной температуры, а за фронтом — выше этой температуры, что является физически непротиворечивым. Следовательно, в этом случае можно говорить о существовании решения с фронтальной поверхностью образования гидрата.

На рис. 1, *б* приведены распределения температуры и давления при нагнетании газа с массовым расходом $Q_g = 0,1$ кг/(м·с) и температурой $T_w = 278$ К. Видно, что за фронтом гидратообразования температура пласта ниже равновесной температуры (линия 2 на рис. 1, *б*), т. е. в этой области наблюдается переохлаждение воды. Таким образом, при данном массовом расходе модель образования гидрата на фронтальной поверхности не позволяет построить физически непротиворечивое решение. Для устранения этого противоречия необходимо вводить протяженную область гидратообразования.

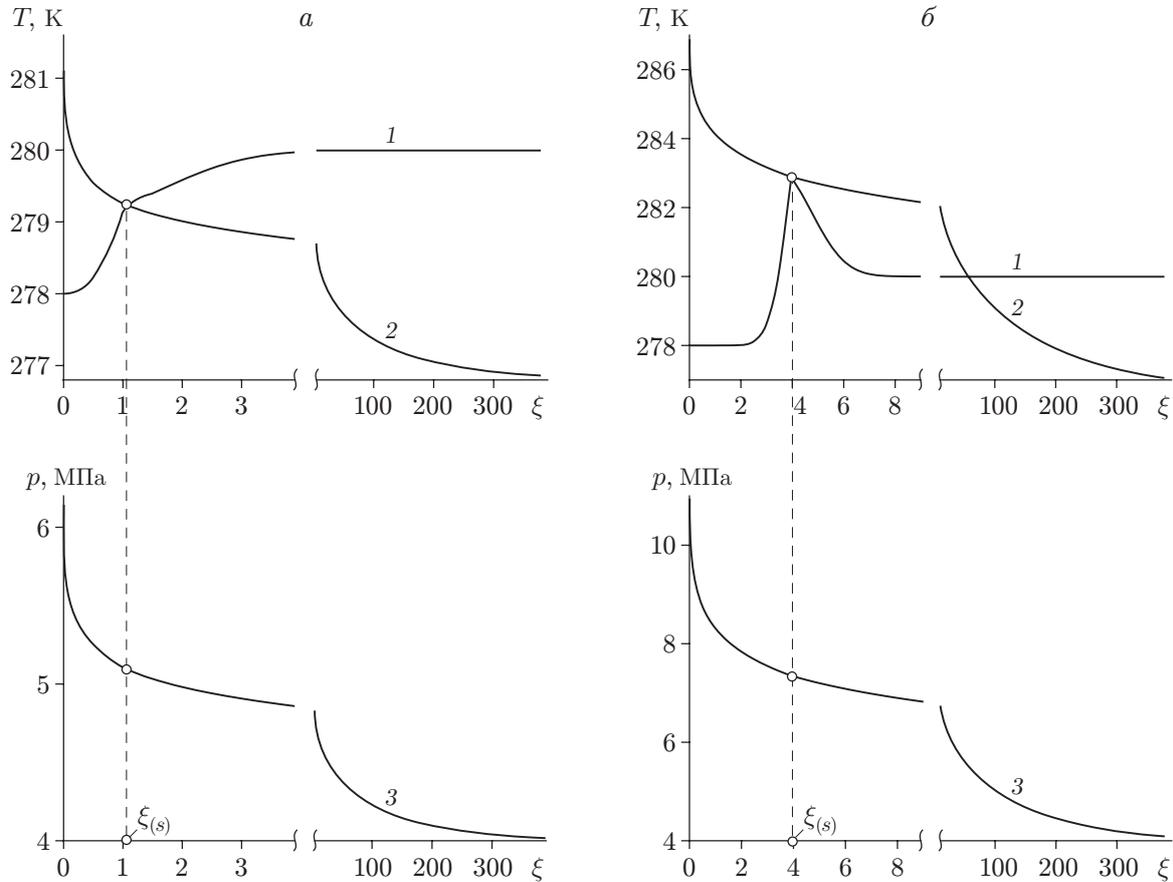


Рис. 1. Распределения температуры пласта (1), равновесной температуры (2) и давления (3) при $T_w = 278$ К, $p_0 = 4$ МПа, $S_{l0} = 0,2$, $m = 0,1$, $G = 0,12$, $T_0 = 280$ К, $T_* = 10$ К, $p_{s0} = 5,5$ МПа, $k_0 = 10^{-14}$ м², $\rho_{sk} = 2 \cdot 10^3$ кг/м³, $\rho_h = 900$ кг/м³, $\rho_l = 1000$ кг/м³, $R_g = 520$ Дж/(К·кг), $\rho c = 2,5 \cdot 10^6$ Дж/(К·м³), $\lambda = 2$ Вт/(м·К), $\mu_g = 10^{-5}$ кг/(м·с), $L_h = 5 \cdot 10^5$ Дж/кг, $c_{sk} = 1000$ Дж/(К·кг), $c_h = 900$ Дж/(К·кг), $c_l = 4200$ Дж/(К·кг), $c_g = 1560$ Дж/(К·кг) и различных значениях массового расхода газа:
 а — $Q_g = 0,02$ кг/(м·с); б — $Q_g = 0,1$ кг/(м·с)

Объемная область гидратообразования возникает в случае, когда на границе фазовых переходов ($\xi = \xi_{(s)}$) выполняется условие

$$\frac{dT_{(2)}}{d\xi} < \frac{dT_{(2)s}}{d\xi},$$

где $T_{(2)s}$ — температура гидратообразования, соответствующая давлению $p_{(2)}$. Из уравнения (1.6) следует

$$\frac{dT_{(2)s}}{d\xi} = \frac{T_*}{2p_{(s)}^2} \frac{dp_{(2)}^2}{d\xi}.$$

Используя граничные уравнения (2.2), получаем условие возникновения протяженной области

$$\frac{dT_{(1)}}{d\xi} - \frac{\Delta T S_{h(1)}}{2} \xi_{(s)} < \frac{T_*}{2k_{(2)} p_{(s)}^2} \left(k_{(1)} \frac{dp_{(1)}^2}{d\xi} + K S_{h(1)} \xi_{(s)} \right),$$

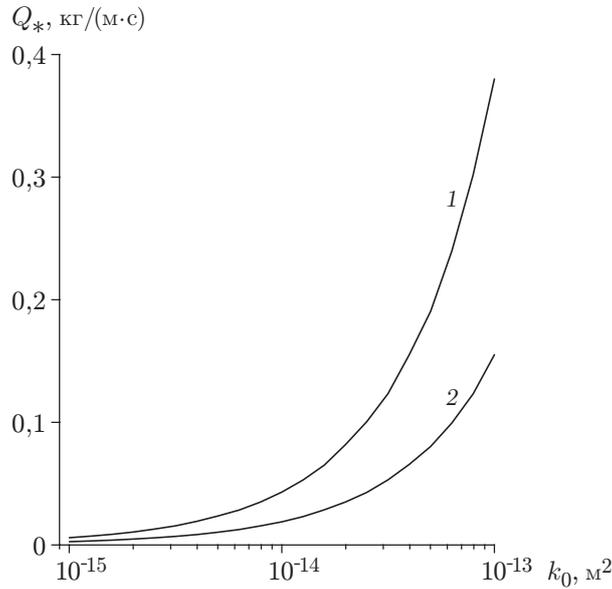


Рис. 2. Зависимость критического значения массового расхода газа Q_* от коэффициента проницаемости k_0 при различных значениях начальной водонасыщенности пласта:

1 — $S_{i0} = 0,2$; 2 — $S_{i0} = 0,4$

которое с учетом решений (2.3) принимает вид

$$(T_{(s)} - T_w) \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{4} - \frac{\text{Pe}_{(1)}}{2p_0^2} p_{(s)}^2\right) / \int_0^{\xi_{(s)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{\text{Pe}_{(1)}}{2p_0^2} p_{(1)}^2\right) d\xi - \frac{\Delta T S_{h(1)}}{2} \xi_{(s)}^2 < < \frac{T_*}{2k_{(2)} p_{(s)}^2} \left(-\frac{Q_g \mu_g R_g T_w}{\pi} \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{4\eta_{(1)}}\right) + K S_{h(1)} \xi_{(s)}^2 \right). \quad (2.7)$$

С использованием неравенства (2.7) и системы уравнений (2.5), (2.6) проведены численные эксперименты в широком диапазоне параметров. Результаты численных расчетов позволяют сделать следующий вывод: для каждого значения проницаемости существует критическое значение Q_* массового расхода газа, при превышении которого возникает объемная область образования гидрата. Эта зависимость представлена на рис. 2 при двух значениях начальной водонасыщенности пласта.

3. Решение с объемной областью фазовых переходов. В случае образования гидрата в объемной области в пласте возникают три характерные зоны: ближняя (первая), в которой поры заполнены газом и гидратом; промежуточная (вторая), в которой одновременно присутствуют газ, вода и гидрат; дальняя (третья), заполненная газом и водой. В промежуточной зоне происходит образование гидрата. Соответственно возникают две поверхности: между дальней и промежуточной областями, где начинается процесс гидратообразования, а также между ближней и промежуточной областями, где этот процесс заканчивается.

Для ближней и дальней областей уравнения температуропроводности и пьезопроводности в автомодельных переменных можно представить в виде (2.1).

С использованием уравнений (1.1)–(1.5) в промежуточной области получаем

$$-\xi \frac{dp_{(2)}^2}{d\xi} = 2\eta_{(2)} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dp_{(2)}^2}{d\xi} \right) + 2R_h p_{(2)}^2 \xi \frac{dS_{h(2)}}{d\xi}; \quad (3.1)$$

$$-\xi \frac{dT_{(2)}}{d\xi} = \frac{Pe_{(2)}}{p_0^2} \frac{dp_{(2)}^2}{d\xi} \frac{dT_{(2)}}{d\xi} + \frac{2}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dT_{(2)}}{d\xi} \right) - \Delta T \xi \frac{dS_{h(2)}}{d\xi}. \quad (3.2)$$

В (3.1), (3.2)

$$\eta_{(2)} = \frac{k_{(2)} p_0}{\mu_g m S_{g(2)} \alpha^{(T)}}, \quad Pe_{(2)} = \frac{\rho_{g0} c_g}{\lambda} \frac{k_{(2)} p_0}{\mu_g}, \quad R_h = \frac{\rho_h G}{\rho_{g0} S_{g(2)}}.$$

Здесь и далее газонасыщенность и проницаемость во второй области будем полагать постоянными и равными их значениям в третьей области:

$$S_{g(2)} = S_{g(3)} = 1 - S_{l0}, \quad k_{(2)} = k_{(3)} = k_0(1 - S_{l0})^3.$$

Кроме того, в промежуточной области температура и давление связаны условием фазового равновесия

$$T_{(2)} = T_0 + T_* \ln(p_{(2)}/p_{s0}). \quad (3.3)$$

Из уравнения (3.3) следует

$$\frac{dT_{(2)}}{d\xi} = \frac{T_*}{2p_{(2)}^2} \frac{dp_{(2)}^2}{d\xi}. \quad (3.4)$$

Подставляя соотношение (3.4) в уравнение (3.2), получаем

$$-\xi \frac{dp_{(2)}^2}{d\xi} = \frac{Pe_{(2)}}{p_0^2} \left(\frac{dp_{(2)}^2}{d\xi} \right)^2 + \frac{2}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dp_{(2)}^2}{d\xi} \right) - 2 \frac{\Delta T}{T_*} p_{(2)}^2 \xi \frac{dS_{h(2)}}{d\xi}. \quad (3.5)$$

Выразив из (3.1) производную $dS_{h(2)}/d\xi$ и подставив ее в уравнение (3.5), имеем

$$-\frac{R_h T_* + \Delta T}{2R_h T_*} \xi \frac{dp_{(2)}^2}{d\xi} = \frac{Pe_{(2)}}{2p_0^2} \left(\frac{dp_{(2)}^2}{d\xi} \right)^2 + \frac{1}{\xi} \frac{T_* R_h + \Delta T \eta_{(2)}}{T_* R_h} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dp_{(2)}^2}{d\xi} \right). \quad (3.6)$$

Представив второе слагаемое в правой части (3.6) в виде суммы двух слагаемых, получаем

$$\begin{aligned} -\frac{R_h T_* + \Delta T}{2R_h T_*} \xi \frac{dp_{(2)}^2}{d\xi} &= \frac{Pe_{(2)}}{2p_0^2} \left(\frac{dp_{(2)}^2}{d\xi} \right)^2 + \frac{T_* R_h + \Delta T \eta_{(2)}}{T_* R_h} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dp_{(2)}^2}{d\xi} \right) + \\ &+ \frac{T_* R_h + \Delta T \eta_{(2)}}{T_* R_h} \frac{1}{\xi} \frac{dp_{(2)}^2}{d\xi}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Отношение первого и второго слагаемых в правой части уравнения (3.7) запишем в виде

$$\chi = \frac{Pe_{(2)} \Delta p_{(2)}^2 T_* R_h}{2p_0^2 (\Delta T \eta_{(2)} + T_* R_h)},$$

где $\Delta p_{(2)}^2$ — характерный перепад давления $p_{(2)}^2$ во второй области.

Поскольку в большинстве случаев, представляющих практический интерес, $\chi \ll 1$, уравнение (3.6) можно представить в виде

$$-\frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dp_{(2)}^2}{d\xi} \right) = \frac{1}{2\eta_*} \xi^2 \frac{dp_{(2)}^2}{d\xi}, \quad (3.8)$$

где $\eta_* = (\Delta T \eta_{(2)} + R_h T_*) / (\Delta T + R_h T_*)$. С учетом соотношения (3.8) из уравнения (3.1) получаем дифференциальное уравнение первого порядка, связывающее гидратонасыщенность и давление во второй области:

$$\frac{\eta_{(2)} - \eta_*}{\eta_*} \xi \frac{dp_{(2)}^2}{d\xi} = 2R_h p_{(2)}^2 \xi \frac{dS_{h(2)}}{d\xi}. \quad (3.9)$$

На поверхности $r = r_{(s)}$, разделяющей ближнюю и промежуточную области (на первой границе), происходит скачок гидратонасыщенности с $S_h^- = S_{h(1)}$ до $S_h^+ = S_{h(s)}$. Тогда, используя соотношения (1.7) и условие (3.3), запишем следующую систему уравнений для нахождения координаты первой границы $\xi_{(s)}$ и значений параметров на ней:

$$\begin{aligned} k_{(2)} \frac{dp_{(2)}^2}{d\xi} - k_{(1)} \frac{dp_{(1)}^2}{d\xi} &= K(S_{h(1)} - S_{h(s)})\xi_{(s)}, \\ \frac{dT_{(1)}}{d\xi} - \frac{dT_{(2)}}{d\xi} &= \frac{\Delta T}{2} (S_{h(1)} - S_{h(s)})\xi_{(s)}, \quad \frac{dT_{(2)}}{d\xi} = \frac{T_*}{2p_{(s)}^2} \frac{dp_{(2)}^2}{d\xi}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

На поверхности $r = r_{(m)}$, разделяющей дальнюю и промежуточную области (на второй границе), значение гидратонасыщенности $S_{h(m)}$ будем считать непрерывным и равным нулю:

$$S_{h(m)}^- = S_{h(m)}^+ = 0. \quad (3.11)$$

В рамках рассматриваемой модели любой скачок гидратонасыщенности на второй границе приводит к возникновению в третьей зоне области, в которой температура пласта ниже температуры гидратообразования. Таким образом, условие (3.11) является единственно возможным решением для значения гидратонасыщенности на второй границе, при котором решение в третьей области является термодинамически непротиворечивым.

С учетом соотношений (1.7) и условия (3.3) система уравнений для нахождения координаты второй границы $\xi_{(m)}$ и значений параметров на ней принимает вид

$$\frac{dp_{(2)}^2}{d\xi} = \frac{dp_{(3)}^2}{d\xi}, \quad \frac{dT_{(2)}}{d\xi} = \frac{dT_{(3)}}{d\xi}, \quad \frac{dT_{(2)}}{d\xi} = \frac{T_*}{2p_{(m)}^2} \frac{dp_{(2)}^2}{d\xi}. \quad (3.12)$$

Распределения давления и температуры в ближней области описываются решениями, совпадающими с решениями (2.3).

Проинтегрировав уравнение (3.8), получаем распределение давления в промежуточной области

$$p_{(2)}^2 = p_{(m)}^2 + (p_{(s)}^2 - p_{(m)}^2) \int_{\xi}^{\xi_{(m)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_*}\right) d\xi / \int_{\xi_{(s)}}^{\xi_{(m)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_*}\right) d\xi. \quad (3.13)$$

Соответствующее распределению давления (3.13) распределение температуры T_2 в этой области связано с ним условием фазового равновесия (3.3).

Проинтегрировав уравнение (3.9) и учитывая условие (3.11), для распределения гидратонасыщенности в промежуточной области получаем выражение

$$S_{h(2)} = \frac{\eta_{(2)} - \eta_*}{2R_h\eta_*} \ln \frac{p_{(2)}^2}{p_{(m)}^2},$$

из которого находим значение гидратонасыщенности на первой границе (со стороны промежуточной области):

$$S_{h(s)} = \frac{\eta_{(2)} - \eta_*}{2R_h\eta_*} \ln \frac{p_{(s)}^2}{p_{(m)}^2}. \quad (3.14)$$

Для дальнейшей области имеем

$$p_{(3)}^2 = p_0^2 + (p_{(m)}^2 - p_0^2) \int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_{(3)}}\right) d\xi / \int_{\xi_{(m)}}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_{(3)}}\right) d\xi,$$

$$T_{(3)} = T_0 + (T_{(m)} - T_0) \int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{\text{Pe}_{(3)}}{2p_0^2} p_{(3)}^2\right) d\xi / \int_{\xi_{(m)}}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{\text{Pe}_{(3)}}{2p_0^2} p_{(3)}^2\right) d\xi.$$

Подставив в (3.10) полученные решения для распределения давления и температуры в первой и второй областях, систему уравнений для нахождения параметров на первой границе запишем в виде

$$k_{(2)}(p_{(m)}^2 - p_{(s)}^2) \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{4\eta_*}\right) / \int_{\xi_{(s)}}^{\xi_{(m)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_*}\right) d\xi + \frac{Q_g\mu_g R_g T_w}{\pi} \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{4\eta_{(1)}}\right) = \\ = K(S_{h(1)} - S_{h(s)})\xi_{(s)}^2; \quad (3.15)$$

$$(T_{(s)} - T_w) \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{4} - \frac{\text{Pe}_{(1)}}{2p_0^2} p_{(s)}^2\right) / \int_0^{\xi_{(s)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{\text{Pe}_{(1)}}{2p_0^2} p_{(1)}^2\right) d\xi - \\ - \frac{T_*}{2p_{(s)}^2} (p_{(m)}^2 - p_{(s)}^2) \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{4\eta_*}\right) / \int_{\xi_{(s)}}^{\xi_{(m)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_*}\right) d\xi = \\ = \frac{\Delta T}{2} (S_{h(1)} - S_{h(s)})\xi_{(s)}^2. \quad (3.16)$$

Аналогично, подставив в (3.12) полученные решения для распределения давления и температуры во второй и третьей областях, получаем систему уравнений для второй границы:

$$(p_{(m)}^2 - p_{(s)}^2) \exp\left(-\frac{\xi_{(m)}^2}{4\eta_*}\right) / \int_{\xi_{(s)}}^{\xi_{(m)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_*}\right) d\xi = \\ = (p_0^2 - p_{(m)}^2) \exp\left(-\frac{\xi_{(m)}^2}{4\eta_{(3)}}\right) / \int_{\xi_{(m)}}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_{(3)}}\right) d\xi; \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{T_*}{2p_{(m)}^2} (p_{(m)}^2 - p_{(s)}^2) \exp\left(-\frac{\xi_{(m)}^2}{4\eta_*}\right) / \int_{\xi_{(s)}}^{\xi_{(m)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_*}\right) d\xi = \\ & = (T_0 - T_{(m)}) \exp\left(-\frac{\xi_{(m)}^2}{4} - \frac{\text{Pe}_{(3)}}{2p_0^2} p_{(m)}^2\right) / \int_{\xi_{(m)}}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{\text{Pe}_{(3)}}{2p_0^2} p_{(3)}^2\right) d\xi. \quad (3.18) \end{aligned}$$

На этих границах температура и давление связаны условием фазового равновесия

$$T_{(s)} = T_0 + T_* \ln(p_{(s)}/p_{s0}), \quad T_{(m)} = T_0 + T_* \ln(p_{(m)}/p_{s0}).$$

Систему граничных уравнений (3.15)–(3.18) решаем следующим образом. Сначала задаем нулевое приближение искомых величин на первой границе (в качестве такого приближения взяты значения параметров на фронте гидратообразования при расчете по фронтальной модели). Затем, выразив из (3.17) значение $p_{(m)}$ и подставив его в выражение (3.18), получаем трансцендентное уравнение с одной неизвестной $\xi_{(m)}$. Решая данное уравнение (например, методом половинного деления), определяем величину $\xi_{(m)}$, а затем значение $p_{(m)}$. Далее, зная значения параметров на второй границе, из уравнения (3.15) находим значение $p_{(s)}$ и подставляем его в (3.16). Получаем трансцендентное уравнение с одной неизвестной $\xi_{(s)}$, решая которое определяем новое приближенное значение координаты первой границы $\xi_{(s)}$, а затем новое приближенное значение давления $p_{(s)}$. В результате циклического повторения описанной итерационной процедуры получаем последовательность приближенных значений, которая сходится к искомым значениям граничных параметров.

На рис. 3 приведены распределения температуры и гидратонасыщенности при массовом расходе, близком к критическому значению расхода Q_* , при котором фронтальная поверхность гидратообразования переходит в объемную зону. Из рис. 3 следует, что при превышении критического значения массового расхода возникает промежуточная область, протяженность которой при дальнейшем увеличении расхода газа увеличивается. Из рис. 3 также следует, что в этом случае основная часть воды переходит в газогидрат на фронтальной поверхности, а температура в области гидратообразования незначительно превышает начальную температуру пласта.

На рис. 4 представлены распределения давления, температуры и гидратонасыщенности в случае высокой интенсивности закачки газа. На рис. 4 видно, что при высоких расходах газа при его нагнетании температура в области гидратообразования значительно выше начальной температуры пласта. Это обусловлено тем, что в промежуточной области давление значительно превышает равновесное давление p_{s0} , соответствующее начальной температуре T_0 . Следовательно, подача холодного ($T_w < T_0$) газа в пласт приводит к его нагреву, причем с увеличением массового расхода газа при нагнетании величина нагрева также растет. Кроме того, из рис. 4 следует, что увеличение массового расхода газа приводит к значительному увеличению протяженности промежуточной области и доли гидратов, образующихся в этой области (по сравнению с количеством гидратов, образующихся на фронтальной поверхности, разделяющей ближнюю и промежуточные области). Таким образом, при увеличении расхода газа схема процесса образования гидрата в объемной области все более существенно отличается от рассмотренной выше схемы образования гидрата на фронтальной поверхности.

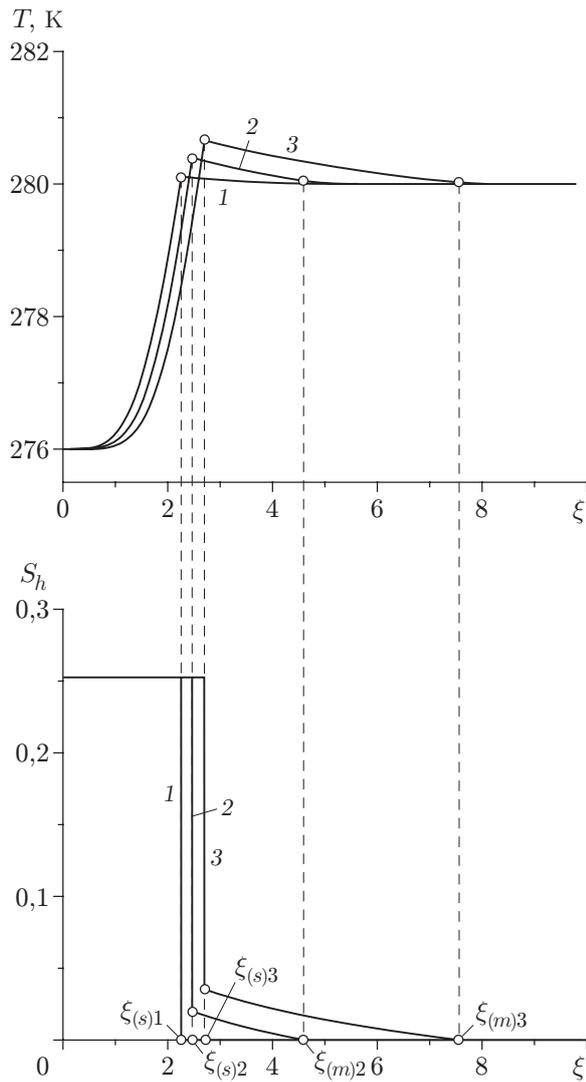


Рис. 3

Рис. 3. Распределения температуры T и гидратонасыщенности S_h при $T_w = 276$ К, $S_{l0} = 0,2$ и различных значениях массового расхода газа (остальные параметры те же, что на рис. 1):

1 — $Q_g = 0,035$ кг/(м·с); 2 — $Q_g = 0,04$ кг/(м·с); 3 — $Q_g = 0,045$ кг/(м·с)

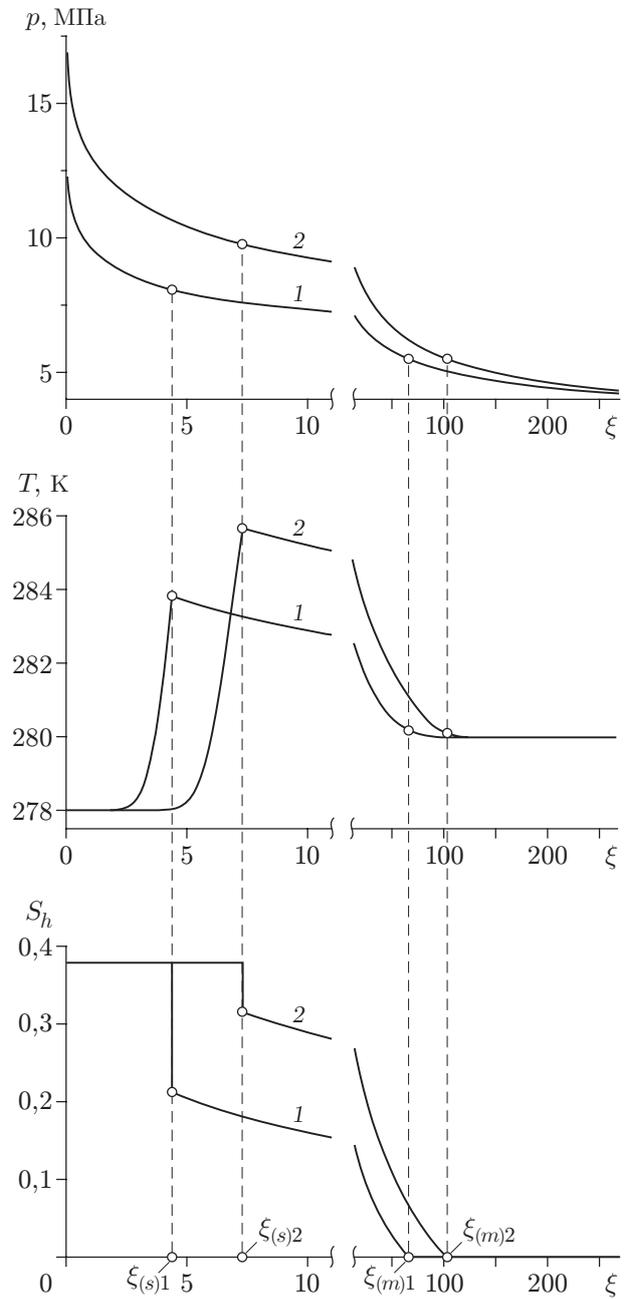


Рис. 4

Рис. 4. Распределения давления p , температуры T и гидратонасыщенности S_h при $S_{l0} = 0,3$ и различных значениях массового расхода газа:

1 — $Q_g = 0,1$ кг/(м·с); 2 — $Q_g = 0,2$ кг/(м·с)

В п. 2 показано, что протяженная область образования гидрата возникает при условии, если выполняется неравенство (2.7). Рассмотрим предельный случай

$$\begin{aligned} (T_{(s)} - T_w) \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{4} - \frac{\text{Pe}_{(1)}}{2p_0^2} p_{(s)}^2\right) / \int_0^{\xi_{(s)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{\text{Pe}_{(1)}}{2p_0^2} p_{(1)}^2\right) d\xi - \frac{\Delta T S_{h(1)}}{2} \xi_{(s)}^2 = \\ = \frac{T_*}{2k_{(2)} p_{(s)}^2} \left(-\frac{Q_g \mu_g R_g T_w}{\pi} \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{4\eta_{(1)}}\right) + K S_{h(1)} \xi_{(s)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

При выполнении условия (3.19) объемная область гидратообразования переходит во фронтальную поверхность. Действительно, из системы уравнений на первой границе (3.10) следует

$$\begin{aligned} (T_{(s)} - T_w) \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{4} - \frac{\text{Pe}_{(1)}}{2p_0^2} p_{(s)}^2\right) / \int_0^{\xi_{(s)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{\text{Pe}_{(1)}}{2p_0^2} p_{(1)}^2\right) d\xi - \\ - \frac{\Delta T (S_{h(1)} - S_{h(s)})}{2} \xi_{(s)}^2 = \\ = \frac{T_*}{2k_{(2)} p_{(s)}^2} \left(-\frac{Q_g \mu_g R_g T_w}{\pi} \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{4\eta_{(1)}}\right) + K (S_{h(1)} - S_{h(s)}) \xi_{(s)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Подставляя соотношение (3.19) в уравнение (3.20), получаем

$$\frac{\Delta T}{2} S_{h(s)} \xi_{(s)} = -\frac{T_*}{2k_{(2)} p_{(s)}^2} K S_{h(s)} \xi_{(s)}.$$

Единственным нетривиальным ($\xi_{(s)} \neq 0$) решением данного уравнения является решение

$$S_{h(s)} = 0.$$

Тогда из уравнения (3.14) с учетом (3.3) получаем

$$T_{(s)} = T_{(m)}, \quad p_{(s)} = p_{(m)},$$

а из уравнения (3.17) имеем

$$\xi_{(s)} = \xi_{(m)}.$$

Таким образом, при выполнении условия (3.19) протяженная область вырождается во фронтальную поверхность, что позволяет рассматривать полученное в п. 2 решение с фронтальной границей фазовых переходов в качестве предельного случая задачи с образованием гидрата в объемной области.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Истомин В. А.** Газовые гидраты в природных условиях / В. А. Истомин, В. С. Якушев. М.: Недра, 1992.
2. **Бык С. Ш.** Газовые гидраты / С. Ш. Бык, Ю. Ф. Макогон, В. И. Фомина. М.: Химия, 1980.
3. **Нигматулин Р. И., Шагапов В. Ш., Сыртланов В. Р.** Автомодельная задача о разложении газогидратов в пористой среде при депрессии и нагреве // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 3. С. 111–118.

4. **Максимов А. М., Цыпкин Г. Г.** О разложении газовых гидратов, сосуществующих с газом в пластах // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1990. № 5. С. 84–88.
5. **Васильев В. И., Попов В. В., Цыпкин Г. Г.** Численное исследование разложения газовых гидратов, сосуществующих с газом в природных пластах // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 4. С. 127–134.
6. **Гумеров Н. А.** Автомодельный рост газового гидрата, разделяющего газ и жидкость // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1992. № 5. С. 78–85.
7. **Лейбензон Л. С.** Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.: ОГИЗ, 1947.

*Поступила в редакцию 20/III 2007 г.,
в окончательном варианте — 4/VI 2007 г.*
