УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ О ДЕФОРМИРОВАНИИ И РАЗРУШЕНИИ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

И. Ю. Цвелодуб

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматриваются два типа физически нелинейных неоднородных сред: линейно-упругая плоскость с нелинейно-упругими эллиптическими включениями и линейно-вязкая плоскость с эллиптическими включениями из материала, обладающего свойствами нелинейной ползучести. Исследуются задачи о возможности выбора таких нагрузок на бесконечности, которые для любых двух включений обеспечивают требуемые величины главного касательного напряжения (в первом случае) или главной скорости сдвига (во втором). Получены условия существования решения этих задач для несжимаемых сред, находящихся в условиях плоской деформации.

Ключевые слова: эллиптические физически нелинейные включения, ползучесть, поврежлаемость, разрушение.

Настоящая работа является продолжением начатых ранее исследований [1–3], посвященных моделированию процессов деформирования и разрушения физически нелинейных неоднородных сред. Рассматриваются новые обратные задачи для линейно-упругой и линейно-вязкой плоскости, содержащей нелинейные (например, упругопластические или нелинейно-вязкие) эллиптические включения, в которых под действием нагрузок на бесконечности реализуется однородное напряженно-деформированное состояние (при условии, что расстояние между центрами любых двух включений существенно превышает их размеры [1]).

1. Линейно-упругая плоскость с нелинейно-упругими включениями. Рассмотрим изотропную упругую плоскость S, содержащую различные эллиптические физически нелинейные включения (ЭФНВ), удаленные друг от друга настолько, что взаимным влиянием каждого ЭФНВ на напряженно-деформированное состояние любого другого включения можно пренебречь. Выберем произвольным образом два включения, которые обозначим через S_k^*. С каждым из включений связана система координат $O_kx_{1k}x_{2k}$, в которой уравнение границы L_k, отделяющей S_k^* от S, имеет вид $x_{1k}^2a_{0k}^{-2} + x_{2k}^2b_{0k}^{-2} = 1$, $a_{0k} \geqslant b_{0k}$ $(k = 1, 2)$. Предположим, что рассматриваемая неоднородная среда является несжимаемой и находится в условиях плоской деформации под действием приложенных на бесконечности напряжений, главные значения которых обозначим через N_1 и N_2, а угол между первой главной осью и осью O_kx_{1k} — через α_k. Тогда в области S имеет место закон Гука [1]

$$4\mu\varepsilon_{22} = -4\mu\varepsilon_{11} = \sigma_{22} - \sigma_{11}, \qquad 2\mu\varepsilon_{12} = \sigma_{12},$$

где σ_{ij}, ε_{ij} — компоненты напряжений и деформаций в произвольной системе координат; μ — модуль сдвига. (Последний можно заменить на соответствующий оператор Воль-

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00643).

терра, тогда приведенные выше соотношения будут описывать линейную вязкоупругую несжимаемую среду при плоской деформации [1].)

Следуя [1], будем считать k-е ЭФНВ изотропным нелинейно-упругим (или подчиняющимся деформационной теории пластичности). Его определяющие уравнения в системе координат $O_kx_{1k}x_{2k}$ имеют вид

$$\begin{gathered}\varepsilon^*_{22k} = -\varepsilon^*_{11k} = F_k(\tau^*_k)(\sigma^*_{22k} - \sigma^*_{11k})/2,\\ \varepsilon^*_{12k} = F_k(\tau^*_k)\sigma^*_{12k}, \qquad 2\tau^*_k = [(\sigma^*_{22k} - \sigma^*_{11k})^2 + 4\sigma^{*2}_{12k}]^{1/2} \qquad (k = 1, 2),\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $F_k(\tau^*_k) > 0$ — заданная функция; τ^*_k — главное касательное напряжение.

Поскольку включения не влияют друг на друга, связи между напряжениями и деформациями в k-м ЭФНВ и на бесконечности (при условии, что вращение на бесконечности $\varepsilon^\infty = 0$) принимают следующий вид [1]:

$$\begin{gathered}\mu(m_{0k}\bar{C}^*_k + \bar{D}^*_k) = m_{0k}A^*_k + B^*_k - 2(m_{0k}\Gamma + \Gamma'_k),\\ \mu(\bar{C}^*_k + m_{0k}\bar{D}^*_k) = -(A^*_k + m_{0k}B^*_k) + 2\Gamma,\\ 2A^*_k = \sigma^*_{11k} + \sigma^*_{22k}, \qquad 2B^*_k = \sigma^*_{22k} - \sigma^*_{11k} + 2i\sigma^*_{12k},\\ C^*_k = \varepsilon^*_{11k} + \varepsilon^*_{22k} + 2i\varepsilon^*_k, \qquad D^*_k = \varepsilon^*_{11k} - \varepsilon^*_{22k} + 2i\varepsilon^*_{12k},\\ m_{0k} = (a_{0k} - b_{0k})/(a_{0k} + b_{0k}), \qquad 4\Gamma = N_1 + N_2,\\ \Gamma'_k = \Gamma'_0\,\mathrm{e}^{-2i\alpha_k}, \qquad 2\Gamma'_0 = N_2 - N_1 \qquad (k = 1, 2),\end{gathered} \tag{1.2}$$

где ε^*_k — величина вращения в S^*_k. Заметим, что напряженно-деформированное состояние в S^*_k является однородным, т. е. A^*_k, B^*_k, C^*_k, D^*_k не зависят от x_{1k}, x_{2k} $(k = 1, 2)$.

Сформулируем задачу, аналогичную рассмотренной в [1]: можно ли подобрать напряженно-деформированное состояние на бесконечности, т. е. значения главных напряжений N_1, N_2 и угол α_1 (при известном α_1 величина α_2 определяется однозначно, поскольку угол $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ между осями O_1x_{11} и O_2x_{12} фиксирован), так чтобы в каждом из двух выбранных ЭФНВ главное касательное напряжение принимало требуемое значение, т. е. чтобы выполнялись равенства $\tau^*_k = \tau_{0k}$ (τ_{0k} — заданные величины; $k = 1, 2$)?

В отличие от работы [1], в которой главные направления напряжений на бесконечности задавались, а ориентация включений (т. е. углы α_k, $k = 1, 2, \ldots$) варьировалась, в данной задаче ищутся главные направления для N_1 и N_2 (и их величины) при заданном угле α между осями симметрии двух ЭФНВ.

Покажем, что при некоторых ограничениях решение рассматриваемой задачи существует. Полагая, как в [1], $B^*_k = \tau_{0k}\,\mathrm{e}^{i\varphi_k}$, учитывая, что из (1.1) и (1.2) следуют равенства $C^*_k = 2i\varepsilon^*_k$, $\bar{D}^*_k = -2F_k(\tau^*_k)B^*_k$, и исключая из (1.2) величины A^*_k, ε^*_k, получим

$$\begin{gathered}2\Gamma'_0\cos 2\alpha_k = [(1 - m^2_{0k}) + \beta_k(1 + m^2_{0k})]\tau_{0k}\cos\varphi_k,\\ -2\Gamma'_0\sin 2\alpha_k = [(1 + m^2_{0k}) + \beta_k(1 - m^2_{0k})]\tau_{0k}\sin\varphi_k,\\ \beta_k = 2\mu F_k(\tau_{0k}) \quad (k = 1, 2), \qquad \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha.\end{gathered} \tag{1.3}$$

Соотношения (1.3) представляют собой систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных: Γ'_0, α_1, φ_1, φ_2. В [1] получены следующие необходимые условия, при которых система может иметь решения:

$$\begin{gathered}a_k - |b_k| \leqslant 2|\Gamma'_0| \leqslant a_k + |b_k|,\\ a_k \equiv (1 + \beta_k)\tau_{0k} > 0, \qquad b_k \equiv m^2_{0k}(1 - \beta_k)\tau_{0k}, \qquad a_k > |b_k|.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Эти условия следуют из того, что величина $\cos 2\varphi_k$, которую можно получить из (1.3), по модулю не может быть больше единицы.

Для того чтобы неравенства (1.4) были справедливы при $k = 1, 2$, необходимо выполнение неравенства $\max\limits_{k=1,2}(a_k - |b_k|) \leqslant \min\limits_{k=1,2}(a_k + |b_k|)$. Перебор всех вариантов этого неравенства дает $a_1 - |b_1| \leqslant a_2 + |b_2|$ и $a_2 - |b_2| \leqslant a_1 + |b_1|$, что эквивалентно условию

$$|a_1 - a_2| \leqslant |b_1| + |b_2|. \tag{1.5}$$

Исключая из (1.3) величины φ_1 и φ_2, находим

$$(2\Gamma_0')^{-2} = \frac{\sin^2 2\alpha_1}{(a_1+b_1)^2} + \frac{\cos^2 2\alpha_1}{(a_1-b_1)^2} = \frac{\sin^2 2(\alpha_1+\alpha)}{(a_2+b_2)^2} + \frac{\cos^2 2(\alpha_1+\alpha)}{(a_2-b_2)^2}. \tag{1.6}$$

Из последнего равенства получим квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} 2\alpha_1$:

$$(A_2\cos^2 2\alpha + B_2\sin^2 2\alpha - A_1)\operatorname{tg}^2 2\alpha_1 + 2(A_2 - B_2)\sin 2\alpha\cos 2\alpha\operatorname{tg} 2\alpha_1 + \\ + A_2\sin^2 2\alpha + B_2\cos^2 2\alpha - B_1 = 0, \tag{1.7}$$

$$A_k = (a_k + b_k)^{-2}, \qquad B_k = (a_k - b_k)^{-2} \qquad (k = 1, 2),$$

для дискриминанта D которого имеем

$$D = A\sin^2 2\alpha + B, \quad A = (A_1 - B_1)(A_2 - B_2), \quad B = (A_1 - A_2)(B_2 - B_1). \tag{1.8}$$

Заметим, что для введенных согласно (1.7) и (1.8) функций A и B имеют место следующие условия эквивалентности (так как $a_k > |b_k|$, $k = 1, 2$):

$$A > 0 \quad (< 0) \quad \Longleftrightarrow \quad b_1b_2 > 0 \quad (< 0); \tag{1.9}$$

$$B \geqslant 0 \quad (\leqslant 0) \quad \Longleftrightarrow \quad |b_1 - b_2| - |a_1 - a_2| \geqslant 0 \quad (\leqslant 0); \tag{1.10}$$

$$B + A \geqslant 0 \quad (\leqslant 0) \quad \Longleftrightarrow \quad |b_1 + b_2| - |a_1 - a_2| \geqslant 0 \quad (\leqslant 0). \tag{1.11}$$

Уравнение (1.7) относительно $\operatorname{tg} 2\alpha_1$ будет иметь действительные корни, если $D \geqslant 0$. Это условие будет выполняться в следующих случаях:

1) если $A > 0$ и $B \geqslant 0$, т. е. если согласно (1.9), (1.10)

$$b_1b_2 > 0, \qquad |a_1 - a_2| \leqslant |b_1 - b_2| = ||b_1| - |b_2||$$

(при этом условие (1.5) будет выполнено, так как $||b_1| - |b_2|| \leqslant |b_1| + |b_2|$), или если $A < 0$, $B > 0$ и $A + B \geqslant 0$ (так как $D \geqslant A + B$), что в силу (1.9)–(1.11) эквивалентно неравенствам

$$b_1b_2 < 0, \qquad |a_1 - a_2| \leqslant |b_1 + b_2| = ||b_1| - |b_2||,$$

то при любом значении $\sin 2\alpha$;

2) если $A > 0$ и $B < 0$, т. е. $b_1b_2 > 0$ и $|a_1 - a_2| > |b_1 - b_2| = ||b_1| - |b_2||$, то при выполнении неравенства

$$\sin^2 2\alpha \geqslant -\frac{B}{A} = \frac{[(a_2+b_2)^2 - (a_1+b_1)^2][(a_2-b_2)^2 - (a_1-b_1)^2]}{16a_1b_1a_2b_2},$$

что возможно, если $-B/A \leqslant 1$, т. е. $A + B \geqslant 0$ или согласно (1.11) $|a_1 - a_2| \leqslant |b_1 + b_2| = |b_1| + |b_2|$, что совпадает с (1.5);

3) если $A < 0$, $B > 0$ и $A + B < 0$, т. е. $b_1b_2 < 0$,

$$||b_1| - |b_2|| = |b_1 + b_2| < |a_1 - a_2| < |b_1 - b_2| = |b_1| + |b_2|,$$

то при выполнении неравенств $\sin^2 2\alpha < -B/A < 1$.

Таким образом, если

$$|a_1 - a_2| \leqslant ||b_1| - |b_2||, \tag{1.12}$$

то $D \geqslant 0$ независимо от $\operatorname{sign}(b_1b_2)$.

Если

$$||b_1| - |b_2|| < |a_1 - a_2| < |b_1| + |b_2|, \tag{1.13}$$

то $D \geqslant 0$ при $\sin^2 2\alpha \geqslant -B/A$ (для $A > 0$) или при $\sin^2 2\alpha \leqslant -B/A$ (для $A < 0$).

По найденным значениям α_1 из (1.6) определяется величина $|\Gamma_0'|$, а из (1.3) — углы φ_k $(k = 1, 2)$. Как показано в [1], при выполнении неравенства

$$[\tau\beta_k(\tau)]' \geqslant 0 \qquad (k = 1, 2) \tag{1.14}$$

(штрих означает дифференцирование по τ), вытекающего из условия устойчивости для определяющих уравнений (1.1), и при заданных Γ_0' и α_k будут единственным образом определяться τ_k и φ_k $(-\pi \leqslant \varphi_k \leqslant \pi)$, т. е. найденным из решения рассмотренной выше задачи величинам Γ_0' и α_k будут соответствовать только значения $\tau_k^* = \tau_{0k}$ $(k = 1, 2)$.

Укажем некоторые частные случаи, когда решение уравнения (1.7) относительно α_1 будет существовать. Предположим, что оба ЭФНВ имеют одинаковые свойства, т. е. в (1.1) $F_k = F$ $(k = 1, 2)$, и требуется, чтобы величина главного касательного напряжения в них была одной и той же: $\tau_{01} = \tau_{02}$. В этом случае $a_1 = a_2$ и неравенство (1.12) выполняется как при $m_{01} = m_{02}$, так и при $m_{01} \neq m_{02}$, следовательно, решение существует при любом α, т. е. при любой ориентации включений относительно друг друга.

Если $\tau_{01} \neq \tau_{02}$, $m_{01} = m_{02} = m_0$, то неравенство (1.12) будет нарушено. Действительно, при выполнении неравенства (1.14) обе функции $[1 + \beta(\tau) \pm m_0^2(1 - \beta(\tau))]\tau$, где $\beta(\tau) = 2\mu F(\tau)$, являются возрастающими, поэтому при $\tau_{01} > \tau_{02}$ имеем $a_1 > a_2$, $a_1 \pm b_1 > a_2 \pm b_2$, откуда $a_1 - a_2 > b_2 - b_1$, $a_1 - a_2 > b_1 - b_2$, т. е. $|a_1 - a_2| = a_1 - a_2 > |b_1 - b_2| \geqslant ||b_1| - |b_2||$. Аналогично при $\tau_{02} > \tau_{01}$ получим $|a_1 - a_2| > ||b_1| - |b_2||$. Таким образом, в этом случае решение для α_1 будет существовать при выполнении второго неравенства (1.13) и указанных выше ограничениях на величину α.

2. Линейно-вязкая плоскость с нелинейно-вязкими включениями. Сформулируем задачу, аналогичную рассмотренной выше, для изотропной линейно-вязкой плоскости с эллиптическими нелинейно-вязкими включениями (ЭНВВ), расстояния между центрами которых велики по сравнению с их размерами. Упругими деформациями такой неоднородной среды пренебрегаем и считаем ее несжимаемой и находящейся в условиях плоской деформации. Тогда в вязкой области S получим соотношения, аналогичные соотношениям закона Гука (см. п. **1**):

$$4\mu\eta_{22} = -4\mu\eta_{11} = \sigma_{22} - \sigma_{11}, \qquad 2\mu\eta_{12} = \sigma_{12},$$

где η_{ij} — компоненты скоростей деформаций; μ — коэффициент вязкости.

Определяющие уравнения для k-го ЭНВВ в системе координат $O_k x_{1k} x_{2k}$, связанной с его осями симметрии, выберем в виде [2, 3]

$$\eta_{22k}^* = -\eta_{11k}^* = \frac{H_k^*}{2\tau_k^*}\,\frac{\sigma_{22k}^* - \sigma_{11k}^*}{2}, \qquad \eta_{12k}^* = \frac{H_k^*}{2\tau_k^*}\,\sigma_{12k}^*,$$
$$H_k^* = \frac{B_{1k}\tau_k^{*n_k}}{(1-\omega_k)^{q_k}}, \qquad \dot\omega_k = \frac{B_{2k}\tau_k^{*p_k}}{(1-\omega_k)^{q_k}}, \tag{2.1}$$
$$H_k^* = [(\eta_{22k}^* - \eta_{11k}^*)^2 + 4\eta_{12k}^{*2}]^{1/2} \qquad (k = 1, 2),$$

где η_{ijk}^* — компоненты скоростей деформаций включения; H_k^* — главная скорость сдвига; ω_k $(0 \leqslant \omega_k \leqslant 1)$ — параметр поврежденности ($\omega_k = 0$ для недеформированного состояния и $\omega_k = 1$ в момент разрушения); B_{1k}, B_{2k}, n_k, p_k, q_k — положительные постоянные; точка означает дифференцирование по времени t; остальные обозначения те же, что в п. **1**.

Соотношения (2.1) можно обратить [2]:

$$\frac{\sigma^*_{22k}-\sigma^*_{11k}}{2}=\frac{2\tau^*_k}{H^*_k}\,\eta^*_{22k},\qquad \sigma^*_{12k}=\frac{2\tau^*_k}{H^*_k}\,\eta^*_{12k},\qquad \dot\omega_k=B_{0k}H_k^{*\gamma_k}(1-\omega_k)^{æ_k},$$
$$B_{0k}=B_{2k}B_{1k}^{-\gamma_k},\qquad \gamma_k=p_k/n_k,\qquad æ_k=q_k(\gamma_k-1). \tag{2.2}$$

Соотношения (2.1), (2.2) описывают процессы изотермического деформирования в условиях ползучести и разрушения хрупких и вязких материалов.

Связи между напряжениями и деформациями в k-м ЭНВВ и на бесконечности будут иметь вид (1.2), где ε^*_{ijk} следует заменить на η^*_{ijk} $(i,j=1,2)$, ε^*_k — на $\dot\varepsilon^*_k$, а под μ следует понимать коэффициент вязкости.

Задача формулируется следующим образом: можно ли подобрать напряженно-деформированное состояние на бесконечности, т. е. напряжения N_1 и N_2 и угол α_1, так чтобы в каждом из двух выбранных включений главная скорость сдвига принимала требуемое значение, т. е. $H^*_k=H_{0k}(t)$, где $H_{0k}(t)$ $(k=1,2)$ — заданные функции времени? При $t=0$ ЭНВВ находились в недеформированном состоянии, поэтому $\omega_k|_{t=0}=0$ $(k=1,2)$.

Из (1.2) с учетом указанных выше изменений и из (2.2) следуют равенства $|\bar D^*_k|=H^*_k$, $C^*_k=2i\dot\varepsilon^*_k$, $B^*_k=-\tau^*_kH_k^{*-1}\bar D^*_k$. Полагая $\bar D^*_k=H_{0k}\,\mathrm{e}^{i\varphi_k}$, по аналогии с (1.3) получим [3]

$$-2\Gamma'_0\cos2\alpha_k=[(1-m^2_{0k})\tau^*_k+\mu(1+m^2_{0k})H_{0k}]\cos\varphi_k,$$
$$2\Gamma'_0\sin2\alpha_k=[(1+m^2_{0k})\tau^*_k+\mu(1-m^2_{0k})H_{0k}]\sin\varphi_k, \tag{2.3}$$
$$\tau^*_k=[B_{1k}^{-1}H_{0k}(1-\omega_k)^{q_k}]^{1/n_k}\quad(k=1,2),\qquad \alpha_2=\alpha_1+\alpha.$$

Система (2.3) относительно неизвестных величин Γ'_0, α_1, φ_1, φ_2 будет иметь решение только при выполнении неравенств (1.4), в которых следует положить

$$a_k=\tau^*_k+\mu H_{0k},\qquad b_k=m^2_{0k}(\tau^*_k-\mu H_{0k}). \tag{2.4}$$

Величины τ^*_k, входящие в (2.3) и (2.4), при заданных функциях $H_{0k}(t)$ находятся после определения параметров поврежденности ω_k интегрированием третьей группы уравнений (2.2) при начальных условиях $\omega_k|_{t=0}=0$ $(k=1,2)$.

Далее, повторяя выкладки из п. **1**, можно получить формулы (1.5)–(1.13), в которых a_k и b_k будут определяться согласно (2.4). В частности, при выполнении (1.12) решение для α_1 будет существовать при любом угле α между осями симметрии включений; если же имеют место неравенства (1.13), то на величину α налагаются указанные выше ограничения.

В [3] показано, что при задании $\Gamma'_0=\Gamma'_0(t)$ и $\alpha_k=\alpha_k(t)$ из (2.2) и (2.3) будут единственным образом определяться функции $H^*_k=H^*_k(t)$ и $\varphi_k=\varphi_k(t)$ $(-\pi\leqslant\varphi_k\leqslant\pi)$, т. е. найденным из решения сформулированной в данном пункте задачи величинам Γ'_0 и α_k будут соответствовать только значения $H^*_k=H_{0k}$.

Рассмотренной задаче можно дать иную трактовку: можно ли подобрать напряженное состояние на бесконечности, так чтобы $H^*_k=H_{0k}(t)$ и, следовательно, k-е включение разрушалось за заданное время t^*_k $(k=1,2)$? Действительно, указанные величины связаны равенством [2, 3]

$$(1-æ_k)B_{0k}\int\limits_0^{t^*_k}H_k^{*\gamma_k}\,dt=1\qquad(æ_k<1),$$

которое следует из третьей группы уравнений (2.2) и условий $\omega_k|_{t=0}=0$, $\omega_k|_{t=t^*_k}=1$ $(k=1,2)$.

В частности, при $H_k^* = \text{const}$ имеем

$$t_k^{*-1} = (1 - æ_k) B_{0k} H_k^{*\gamma_k}.$$

Таким образом, можно ставить задачу об оптимальном разрушении двух ЭНВВ, т. е. о разрушении за заданное время t_k^*.

В заключение сделаем одно замечание. В работе [3] сформулирована задача, аналогичная рассмотренной выше, для k включений с фиксированной ориентацией относительно друг друга, причем не исключался случай $k > 2$. Однако в данной постановке это невозможно, поскольку, как показано выше, при задании H_{0k}, α для четырех неизвестных величин Γ_0, α_1, φ_k $(k = 1, 2)$ имеет место замкнутая система четырех уравнений, состоящая из двух первых равенств (2.3), где $\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha$; $k = 1, 2$. Добавление к этой системе пары уравнений, соответствующих, например, значению $k = 3$, приведет к ее переопределенности (шесть уравнений для пяти неизвестных Γ_0, α_1, φ_k $(k = 1, 2, 3)$, поскольку α_2, α_3 будут выражаться через α_1), что ставит ограничения на ориентацию других включений, т. е. на углы α_k при $k \geqslant 3$. Легко установить, что в общем случае получается $2k$ уравнений для $2 + k$ неизвестных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Цвелодуб И. Ю.** Обратная задача о деформировании физически нелинейной неоднородной среды // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 3. С. 125–128.
2. **Цвелодуб И. Ю.** Об оптимальных путях деформирования и разрушения в условиях ползучести // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1999. № 2. С. 108–114.
3. **Цвелодуб И. Ю.** Об одной задаче оптимального разрушения неоднородной нелинейновязкой среды // Динамика сплошной среды / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2001. Вып. 119. С. 128–131.

Поступила в редакцию 18/XII 2002 г.