

В пределе $\delta \rightarrow 0$ кривизна границы в точке $x_1 = R - H$, $x_2 = 0$ обращается в бесконечность. Однако, согласно (3.3), это не приводит к возникновению в этой точке сингулярности поля давления. Так же как и в случае схлопывания кругового капилляра [20], с ростом кривизны границы увеличиваются капиллярные и вязкие напряжения, компенсируя друг друга, давление же остается ограниченным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса.— М.: Мир, 1976.
2. Френкель Я. И. Вязкое течение в кристаллических телах // ЖЭТФ.— 1946.— Т. 16, № 1.
3. Scherer G. W. Sintering of low-density glasses // J. Amer. Ceram. Soc.— 1984.— V. 60, N 5.
4. Воинов О. В. Асимптотика свободной поверхности вязкой жидкости при ползущем движении и зависимость краевого угла смачивания от скорости // ДАН СССР.— 1978.— Т. 243, № 6.
5. Зацепин А. Г., Костяной А. Г., Шапиро Г. И. Медленное растекание вязкой жидкости по горизонтальной поверхности // ДАН СССР.— 1982.— Т. 265, № 1.
6. Прахт У. Неявный метод расчета ползущего течения в приложении к задаче о континентальном дрейфе // Численные методы в механике жидкостей.— М.: Мир, 1973.
7. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика.— М.: Физматгиз, 1959.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости.— М.: Наука, 1978.
9. Ионеску Д. Г. Теория аналитических функций и гидродинамика // Приложения теории функций в механике сплошной среды. Т. 2. Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1965.
10. Антановский Л. К. Динамика межфазной границы под действием капиллярных сил. Квазистационарное плоскопараллельное движение // ПМТФ.— 1988.— № 3.
11. Антановский Л. К. Комплексное представление решений уравнений Навье — Стокса // ДАН СССР.— 1981.— Т. 261, № 4.
12. Porrer R. W. Plane Stokes flow driven by capillarity on free surface // J. Fluid Mech.— 1990.— V. 213.— P. 349.
13. Чивилихин С. А. Динамика свободной многосвязной поверхности вязкой жидкости // ДАН СССР.— 1990.— Т. 315, № 3.
14. Гринберг Г. Ф. О решении плоской задачи теории упругости и задачи об изгибе тонкой плиты с закрепленным контуром // ДАН СССР.— 1951.— Т. 76, № 5.
15. Векуа И. Н. Об одном методе решения основной бигармонической краевой задачи и задачи Дирихле // Некоторые проблемы математики и механики.— Л.: Наука, 1970.
16. Chivilikhin S. A., Tarakanow S. W., Tselowalnikova L. M. et al. Viscous flow of silica glass in lightguides fabrication // The first international soviet fibre optics conference, March 25—29, 1991.— Boston: Information Gatekeepers, Inc., 1991.— V. 1.
17. Суетин П. К. Ортогональные многочлены по двум переменным.— М.: Наука, 1988.
18. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1984.
19. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966.
20. Гегузин Я. Е. О спекании аморфных тел // ДАН СССР.— 1953.— Т. 92, № 92.

г. Санкт-Петербург

Поступила 11/XII 1989 г.,

в окончательном варианте — 28/VIII 1991 г.

УДК 532.516+541.24

С. В. Долгушев, М. И. Мучная

О РАСЧЕТЕ ВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНОЙ СМЕСИ ГАЗОВ В ГИПЕРЗВУКОВОМ СОПЛЕ

Течение в двумерном сопле заданной геометрии моделируется с помощью упрощенных уравнений Навье — Стокса. В отличие от [1], где исследовалось течение однокомпонентного газа, рассматривается смесь N_2 — CO — Ar — He . Учитываются колебательно-поступательная релакса-

ция и межмолекулярная передача колебательной энергии (процессы VT - и VV' -обмена). Определение переносных свойств смеси с помощью последовательности преобразований сводится в конечном счете к заданию только коэффициентов вязкости компонентов.

В основу физической модели течения положены следующие предположения: 1) газовая смесь всюду однородна по составу и ведет себя как термически совершенный газ; 2) химические превращения и диссоциация отсутствуют; 3) вращательные степени свободы молекул находятся в равновесии с поступательными; 4) каждая из колебательных мод является гармоническим осциллятором с больцмановским распределением по энергетическим уровням, характеризующимся своей температурой; 5) учитываются вязкость и теплопроводность, пренебрегается баро- и термодиффузией, потерями колебательной энергии через излучение.

Эта физическая модель использовалась в [2] для расчета CO_2 -ГДЛ с помощью метода «узкого канала». В [2] за основу взяты уравнения, вывод которых сделан в [3]. В настоящей работе переносные свойства смеси описываются более последовательно, чем в других. Для этого используются результаты [4] с исключением из них всего, что выходит за рамки принятой здесь физической модели.

Запишем исходную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (r^v \rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (r^v \rho v)}{\partial r} &= 0, \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^v \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right), \\ \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{4}{3} \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^v \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right), \\ \rho u c_{pa} \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_{pa} \frac{\partial T}{\partial r} &= u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^v \lambda_a \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 - \rho (\Phi_1 + \Phi_2), \\ \rho u \frac{\partial E_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial E_i}{\partial r} &= \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^v D_i \frac{\partial E_i}{\partial r} \right) + \rho \Phi_i \quad (i=1, 2), \quad p = \rho \frac{R}{M_\Sigma} T. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \frac{E_i^0 - E_i}{\tau_i} - (-1)^i \xi_1 \xi_2 N \gamma \frac{R \theta_i}{M_\Sigma} \quad (i=1, 2); \quad N = \frac{\rho}{M_\Sigma} N_A; \quad \gamma = K \varphi \exp \left(-\frac{\theta_1}{T} \right); \\ \varphi &= \frac{E_2}{R \theta_2} \left(1 + \frac{E_1}{R \theta_1} \right) \exp \left(\frac{\theta_2}{T} \right) - \frac{E_1}{R \theta_1} \left(1 + \frac{E_2}{R \theta_2} \right) \exp \left(\frac{\theta_1}{T} \right); \end{aligned}$$

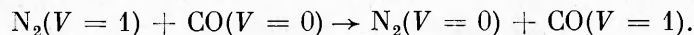
$v=0$ отвечает плоскому течению, $v=1$ — осесимметричному; координата x направлена вдоль оси сопла, а r — перпендикулярно к ней; u и v — продольная и поперечная компоненты скорости; ρ — плотность; p — давление; T — температура; E_i — колебательная энергия i -го компонента, отнесенная к единице массы смеси; E_i^0 соответствует термодинамическому равновесию; E_i связана со средним числом квантов в данном типе колебаний e_i и с колебательной температурой T_i соотношениями

$$E_i = \xi_i \frac{R}{M_\Sigma} e_i = \xi_i \frac{R}{M_\Sigma} \frac{1}{\exp(\theta_i/T_i) - 1};$$

μ — коэффициент динамической вязкости смеси; λ_a — коэффициент теплопроводности смеси; c_p — удельная теплоемкость смеси; индекс a означает, что в эти величины дают вклад активные, т. е. поступательные и

вращательные, степени свободы; $D_i^{-1} = \sum_{h=1}^I \xi_h D_{ih}^{-1}$ [4] (D_{ih} — бинарные коэффициенты диффузии, I — число компонентов смеси, в данном случае $I=4$); τ_i — время колебательной релаксации молекул i -го сорта в смеси; ξ_i — молярная концентрация i -го компонента; θ_i — характеристическая колебательная температура i -го компонента; R — универсальная газовая постоянная; $M_\Sigma = \sum_{i=1}^I \xi_i M_i$ — молекулярный вес смеси; M_i —

молекулярный вес i -го компонента; $i = 1, 2, 3, 4$ соответствует N_2, CO, Ar, He ; N_A — число Авогадро; \bar{k} — константа скорости VV' -обмена для реакции



Выражение для Φ_i , которое включает в себя скорости VT - и VV' -обмена, получено из теории колебательной релаксации бинарной смеси гармонических осцилляторов [5]. Оно выведено из формулы, определяющей скорость изменения среднего числа колебательных квантов, приходящихся на одну молекулу N_2 или CO .

Коэффициент динамической вязкости смеси берется согласно [6] в виде

$$\mu = \sum_{i=1}^I \mu_i \left(1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^I G_{ik} \frac{\xi_k}{\xi_i} \right)^{-1},$$

где

$$G_{ik} = \frac{[1 + (\mu_i/\mu_k)^{1/2} (M_k/M_i)^{1/4}]^2}{(2)^{3/2} [1 + (M_i/M_k)]^{1/2}}.$$

Формула для коэффициента теплопроводности смеси для активных степеней свободы также взята из [6]:

$$\lambda_a = \sum_{i=1}^I \lambda_{a_i} \left(1 + 1,065 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^I G'_{ik} \frac{\xi_k}{\xi_i} \right)^{-1}.$$

Здесь

$$G'_{ik} = \frac{[1 + (\lambda_{t_i}/\lambda_{t_k})^{1/2} (M_i/M_k)^{1/4}]^2}{(2)^{3/2} [1 + (M_i/M_k)]^{1/2}};$$

λ_t — коэффициент теплопроводности при возбуждении только поступательных степеней свободы. Используем для него соотношение [7] $\lambda_{t_i} = \frac{15}{4} \frac{R}{M_i} \mu_i$. Если подставим это выражение в предыдущую формулу, то получим

$$G'_{ik} = G_{ik}, \quad \lambda_a = \sum_{i=1}^I \lambda_{a_i} \left(1 + 1,065 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^I G_{ik} \frac{\xi_k}{\xi_i} \right)^{-1}.$$

Для одноатомных газов, какими являются Ar и He , $\lambda_{a_i} = \lambda_{t_i}$ ($i = 3, 4$). При возбуждении вращательных степеней свободы учитывается поправка Эйнена [7], и для N_2 и CO имеем $\lambda_{a_i} \simeq 5 \frac{R}{M_i} \mu_i$ ($i = 1, 2$).

В [8] приводится формула, которая позволяет вычислить коэффициенты бинарной диффузии через коэффициенты самодиффузии компонентов:

$$D_{ik} = \left(\frac{M_i + M_k}{2(M_i M_k)^{1/2}} \right)^{1/2} (D_{ii} D_{kk})^{1/2}.$$

Используем соотношение из [7], связывающее коэффициенты самодиффузии и вязкости:

$$\rho D_{ii} = \frac{6}{5} A^* \mu_i$$

(A^* — очень медленно меняющаяся функция от температуры, близкая к единице). Получаем, таким образом, что для определения переносных свойств газовой смеси достаточно знать коэффициенты вязкости ее компонентов. Эти коэффициенты в данной работе берутся из таблиц [8].

Удельная теплопроводность смеси

$$c_{pa} = \sum_{i=1}^I c_i c_{pa_i},$$

где $c_i = \frac{\rho_i}{\rho} = \frac{M_i}{M_{\Sigma}} \xi_i$; $c_{pa_i} = \frac{5}{2} \frac{R}{M_i}$ и $c_{pa_i} = \frac{7}{2} \frac{R}{M_i}$ соответственно для одноатомных молекул Ne и Ar и для двухатомных молекул N₂ и CO с замороженными колебательными уровнями.

Время колебательной релаксации τ_i молекул i -го сорта в смеси выразим согласно [9] через времена колебательной релаксации малой примеси молекул этого сорта в среде молекул сорта k :

$$\tau_i^{-1} = \sum_{k=1}^I \xi_k \tau_{ik}^{-1} \quad (i = 1, 2).$$

Величины τ_{ik} аппроксимируются выражением

$$\lg \left[p \tau_{ik} \left(1 - \exp \left(- \frac{\theta_i}{T} \right) \right) \right] = A_1 + A_2 T^{-1/3} + A_3 T^{-2/3}.$$

Эти формулы, как и коэффициенты для них, берутся из [10]. Константа скорости VV'-обмена $K = 0,136 \cdot 10^{-15,2+0,0865(T^{-1/3}-0,01)^2}$ см³/с и характеристические температуры $\theta_1 = 3352$ К, $\theta_2 = 3084$ К взяты из [11].

В этой постановке система уравнений решается точно таким же образом, что и в [1]. По составленной программе, написанной на языке Фортран, были рассчитаны два варианта для течения в коническом сопле с углом полураствора 10° и условиями в форкамере $p_0 = 15 \cdot 10^6$ Па и $T_0 = 1500$ К. В первом варианте массовые концентрации компонентов брались в таком соотношении: N₂ — 0,95, CO — 0,01, Ar — 0,03, Ne — 0,01. Расчет проводился для подтверждения преемственности данной программы исходной, рассчитывающей течение однокомпонентного газа. Результаты расчетов по обеим программам получились близкими. Во втором варианте состав смеси следующий: N₂ — 0,25, CO — 0,25, Ar — 0,25, Ne — 0,25. Результаты вполне реалистичны, т. е. допускают понятную качественную интерпретацию. Например, падение температуры и рост числа Маха M вдоль оси сопла происходят гораздо быстрее, чем в первом варианте, что можно объяснить большей концентрацией одноатомных компонентов в смеси, а следовательно, большим значением отношения удельных теплоемкостей $\kappa = c_p/c_v$.

Приведем результаты расчетов в плоском сопле, контур которого задавался с помощью логарифмической функции и изображен на рис. 1 (линия R). Рассчитывалось течение смеси: N₂ — 0,1, CO — 0,4, Ar — 0,5, Ne — 0. Условия в форкамере: $p_0 = 15 \cdot 10^6$ Па, $T_0 = 3500$ К, относительная температура стенки $T_w/T_0 = 0,1$. На рис. 1 приведено распределение M на оси для смеси (линия 1), а также для течения в этом сопле N₂ и Ar (линии 2 и 3). При расчете последних вариантов массовые концентрации остальных компонентов в программе занулялись. Расстояние x отсчитывается от критического сечения и обезразмерено на его полувысоту.

На рис. 2 представлены профили M в трех сечениях сопла: $x = 200, 1000, 3000$ (линии 1—3). Поперечная координата обезразмерена на местное значение полувысоты r_w , на оси ординат $r = 0$ соответствует оси, $r = 1$ — стенке сопла. Профили M изображены сплошной линией для течения

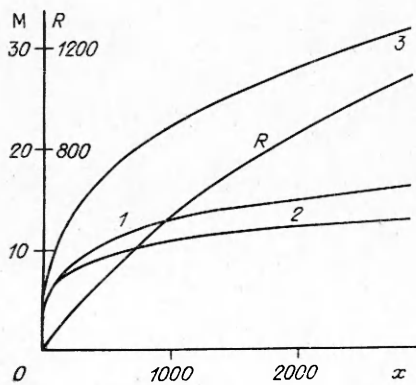


Рис. 1

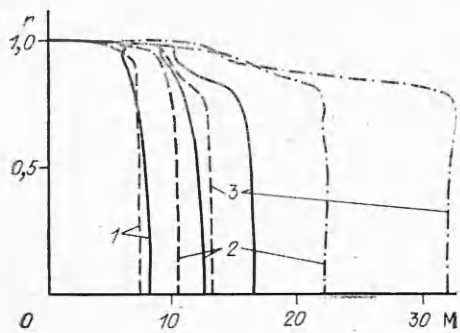


Рис. 2

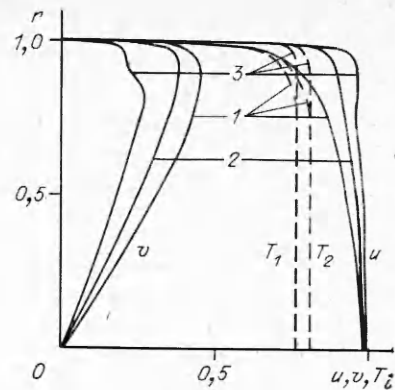


Рис. 3

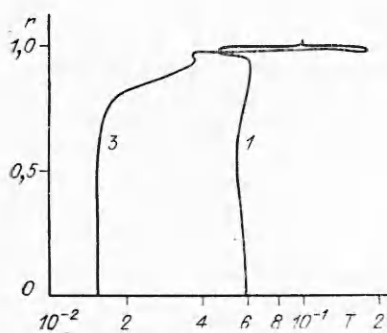


Рис. 4

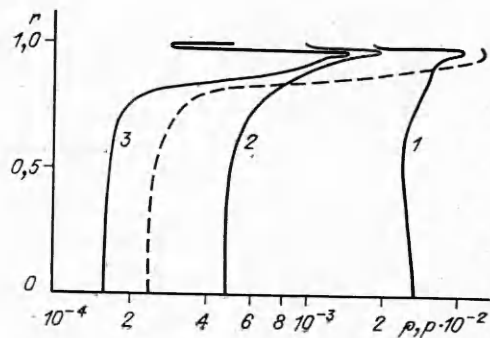


Рис. 5

смеси, штриховой — для N_2 , штрихиунктирной — для Ag . Видно, что все три варианта, заметно отличаясь в количественном отношении, имеют качественное сходство. Это, во-первых, наличие равномерного по сечению невязкого ядра, занимающего большую часть области течения, во-вторых, проявление немонотонности в пограничном слое. Рассмотрим картину подробнее на примере течения смеси, поведение параметров для чистых газов имеет аналогичный характер.

На рис. 3 приведены профили продольной и поперечной компонент скорости, обезразмеренных на величину $\sqrt{2c_p T_0}$. Остальные величины, приведенные на графиках, отнесены к их значениям в форкамере. Профили продольной компоненты скорости имеют очень наполненный вид, пограничный слой тонок. Толщина вытеснения, насчитываемая в программе, не превышает 2 % полувьсоты на протяжении всей длины сопла. Поперечная компонента скорости по порядку величины сравнима с продольной. Максимум ее расположен ближе к стенке на расстоянии $0,1r_w$ при $x = 200$ и 1000 (линии 1 и 2) и сдвигается на $0,2r_w$ от стенки при $x = 3000$ (линия 3). Наибольшее значение v принимает на начальном участке сопла, где угол полураскрытия составляет 34° , и постепенно уменьшается к выходу, где этот угол равен 13° . Штриховые кривые — профили колебательной температуры азота T_1 и окиси углерода T_2 в сечениях $x = 200, 3000$. Колебательные температуры сразу же замораживаются по всему соплу, за исключением пристеночной области, где идет неравновесный процесс, обусловленный заданием на стенке сопла условия равновесия. На выходе замороженное течение заполняет практически все сечение.

На рис. 4 приведены профили поступательной температуры, на рис. 5 — профили плотности (обозначения, как и на рис. 2, 3) и профиль давления в сечении $x = 3000$ (штриховая линия). Видно, что температурный пограничный слой больше скоростного и на выходе составляет

свыше 20 %. Резкие перепады параметров внутри этого слоя свидетельствуют о том, что в нем образуется структура, которую интерпретируем как висячий скачок, идущий вдоль стенки на всем протяжении сопла.

Анализ полученных результатов подводит к выводу, который касается методической стороны проблемы. Упрощенные уравнения Навье — Стокса, которые здесь используются для расчета течения, получены из полных уравнений в предположении малости отношения v/u . Но мы, применяя упрощенную модель, получили, что это отношение не так уж мало в сопле с большими углами полураствора. И так как толщина вытеснения мала, то, казалось бы, для такого сопла более приемлем подход, заключающийся в последовательном расчете невязкого ядра и пограничного слоя. Но с помощью этого традиционного способа нельзя получить образование скачка уплотнения внутри пограничного слоя, что, по-видимому, сумел «ухватить» используемый метод. Нам кажется, что модель упрощенных уравнений Навье — Стокса, хотя и не без погрешностей, все же адекватно передает картину течения.

В заключение отметим, что алгоритм допускает расширение для проведения расчетов течения других составов смесей в рамках модели много-температурной релаксации.

Авторы выражают признательность В. Н. Ветлуцкому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мучная М. И. Исследование течений в гиперзвуковых соплах в рамках упрощенных уравнений Навье — Стокса // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1986. — № 6.
2. Mitra N. K., Fiebig M. Effect of vibrational wall accommodation on small signal gain in $\text{CO}_2\text{-N}_2\text{-H}_2\text{O}$ gasdynamic laser (GDL) // 10th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, 1976: Proc.— Princeton, 1977.— (Progress in Astronaut. and Aeronaut.; V. 51, pt II).
3. Лунькин Ю. П., Колешко С. Б. Колебательно-диссоциационная релаксация в многокомпонентной смеси вязких теплопроводных газов // Тр./ЛГУ.— 1967.— № 280.
4. Тирский Г. А. Полуфеноменологический вывод уравнений гидродинамики многокомпонентных смесей газов с возбужденными внутренними степенями свободы // Механика. Современные проблемы.— М.: Ин-т механики МГУ, 1987.
5. Гордиев Б. Ф., Осипов А. И., Шелепин Л. А. Кинетические процессы в газах и молекулярные лазеры.— М.: Наука, 1980.
6. Дорренс У. Х. Гиперзвуковые течения вязкого газа.— М.: Мир, 1966.
7. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей.— М.: ИЛ, 1961.
8. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей.— М.: Наука, 1972.
9. Агафонов В. П., Вертушкин В. К., Гладков А. А., Полянский О. Ю. Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике.— М.: Машиностроение, 1972.
10. Ачасов О. В., Рагозин Д. С. Константы колебательного энергообмена в лазерно-активных средах CO_2 -ГДЛ с добавками O_2 , H_2 , H_2O и CO .— Минск, 1986.— (Препр./АН БССР, Ин-т тепло- и массообмена; № 16).
11. Британ А. Б., Левин В. А., Старик А. М., Хмелевский А. Н. К выбору расчетной модели течения в соплах высокотемпературных ГДЛ на продуктах горения // Квантовая электроника.— 1986.— Т. 13, № 1.

г. Новосибирск

Поступила 1/VIII 1991 г.

УДК 532.516

Ю. Я. Трифонов

ВЛИЯНИЕ КРИВИЗНЫ СТЕНОК ПРИ ВОЛНОВОМ СТЕКАНИИ ТОНКОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматриваются различные волновые режимы стекания тонкого слоя вязкой жидкости вдоль внешней и внутренней поверхностей вертикального цилиндра. На основе интегрального метода из уравнений Навье — Стокса выведена более простая система эволюционных уравне-