УДК 539.3

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И ОЦЕНКИ ДЛЯ ЖЕСТКОСТЕЙ ТЕЛ С ПУСТОТАМИ

А. Г. Колпаков

Сибирская государственная академия телекоммуникаций и информатики, 630009 Новосибирск

Получены вариационные принципы и оценки (в том числе двусторонние) для жесткостей тел, содержащих периодические системы пор (пустот). Рассмотрение проводится на основе асимптотического метода усреднения.

Постановка задачи. Рассматриваются трехмерные композиты, пластины и балки. Под жесткостями понимаются усредненные упругие постоянные — для трехмерного композита, жесткости в плоскости и на изгиб — для пластины, жесткости на растяжение, изгиб, кручение — для балки. Для расчета жесткостей используются формулы, вытекающие из асимптотического метода [1]. Отметим, что тела с периодически расположенными пустотами чаще всего представляют собой пластины и балки.

Рассмотрим упругое тело периодической структуры с ячейкой периодичности (ЯП) P_ε (ε — характерный размер ячейки). При повторении ЯП по трем координатам имеем трехмерный композит, по двум — пластину, по одной координате — балку. Полученную таким образом область обозначим через Q_ε. Упругие постоянные тела a_{ijkl} являются функциями аргумента $\mathbf{x}/\varepsilon$, периодическими по x_1, x_2, x_3 — для композита, по x_1, x_2 — для пластины, по x_1 — для балки.

Рассмотрим в области Q_ε задачу теории упругости. Известно [1–5], что при $\varepsilon \to 0$ решение этой задачи стремится соответственно к решению задач теории упругости однородного тела [1–3], теории пластин [3, 4] или теории балок [3, 5]. Для получения жесткостных характеристик упомянутых предельных тел решается так называемая ячеечная задача (ЯЗ), которая для всех случаев может быть записана в виде

$$(a_{ijkl}(\mathbf{y})(N^M_{k,l} + f^M_{kl}(\mathbf{y})))_{,j} = 0 \quad \text{в } P_1; \tag{1.1}$$

$$a_{ijkl}(\mathbf{y})(N^M_{k,l} + f^M_{kl}(\mathbf{y}))n_j = 0 \quad \text{на } \gamma \cup \Gamma; \tag{1.2}$$

$$\mathbf{N}^M(\mathbf{y}) \ \text{периодична по } y_m \ (m \in D). \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$ — безразмерные переменные; $P_1 = \varepsilon^{-1}P_\varepsilon = \{\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon : \mathbf{x} \in P_\varepsilon\}$ — ЯП в безразмерных переменных; $\mathbf{n}$ — нормаль к $\gamma \cup \Gamma$ (рис. 1); M — мультииндекс ($D = \{1, 2, 3\}$ для трехмерных композитов, $D = \{1, 2\}$ для пластин, $D = \{1\}$ для балок).

Жесткостные характеристики вычисляются по формуле

$$A^M = \langle a_{ijkl}(\mathbf{y})(N^M_{i,j} + f^M_{ij}(\mathbf{y}))(N^M_{k,l} + f^M_{kl}(\mathbf{y}))\rangle, \tag{1.4}$$

где $\langle\ \rangle = \dfrac{1}{\operatorname{mes} S}\displaystyle\int_{P_1} d\mathbf{y}$ — среднее по ЯП в безразмерных координатах $\mathbf{y}$. Здесь $S = P_1 \cup Q_1$ для трехмерных композитов, S — проекция $P_1 \cup Q_1$ на плоскость Oy_1y_2 для пластин, на ось Oy_1 для балок.

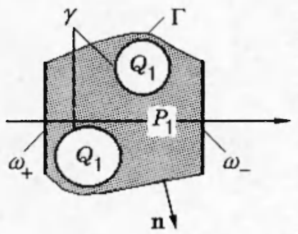

Рис. 1. Ячейка периодичности P_1 для балки:
Q_1 — пустоты, Γ — свободная поверхность; γ — границы пустот; ω_+, ω_- — смежные грани ЯП

Формула (1.2) для трехмерных композитов приведена в [1, 2], для пластин постоянной толщины — в [4], для цилиндрических балок — в [6]. В общем случае она выводится, как и в упомянутых работах, из ЯЗ (1.1). Формулы для усредненных характеристик [1–6] имеют вид

$$A^M = \langle(-1)^\mu y^\mu(a_{ijkl}(\mathbf{y})(-1)^\nu y^\nu + a_{ijmn}(\mathbf{y})N^{kl\nu}_{m,n}(\mathbf{y}))\rangle \tag{1.5}$$

($M = (ijkl\nu\mu)$, значения индексов см. в [1–6], в настоящей работе они не приводятся).

Используем формулу (1.2) как исходную. На упругие постоянные a_{ijkl} накладываются стандартные условия [7]: для всех $\mathbf{y} \in P_1$

$$|a_{ijkl}(\mathbf{y})| \leqslant C < \infty; \tag{1.6}$$

$$a_{ijkl}(\mathbf{y})e_{ij}e_{kl} \geqslant c|e_{ij}|^2 \quad \text{для любых} \quad e_{ij} = e_{ji}, \tag{1.7}$$

где $0 < c$, $C < \infty$ не зависят от $\mathbf{y}$ и e_{ij}.

2. Вариационные принципы и оценки для жесткостей. Для ЯЗ (1.1)–(1.3) вводится функционал Лагранжа

$$J_u(\mathbf{u}) = G(\Lambda\mathbf{u}), \tag{2.1}$$

где

$$G(p) = \frac{1}{2}\langle -a_{ijkl}(\mathbf{y})p_{ij}p_{kl} - 2a_{ijkl}(\mathbf{y})f^M_{ij}(\mathbf{y})p_{kl}\rangle; \tag{2.2}$$

$$(\Lambda\mathbf{u})_{ij} = u_{i,j}. \tag{2.3}$$

Функционал Лагранжа рассматривается на множестве возможных перемещений:

$$V = \{\mathbf{u} \in H^1(P_1)\colon \mathbf{u}(\mathbf{y}) \text{ периодична по } y_m \ (m \in D)\}. \tag{2.4}$$

Уравнения (1.1)–(1.3) являются уравнениями Эйлера вариационной задачи

$$J_u(\mathbf{u}) \to \max, \quad \mathbf{u} \in V. \tag{2.5}$$

Решения задач (1.1)–(1.3) и (2.5) при выполнении условий (1.6), (1.7) определены с точностью до перемещений, соответствующих перемещениям твердого тела [1–5], на множестве $V_0 = \{\mathbf{u} \in V\colon \langle\mathbf{u}\rangle = 0\}$ ($\langle\mathbf{u}_\gamma S_\gamma \mathbf{y}_{\bar\gamma}\rangle = 0$ для балки) их решения единственны и совпадают, в силу чего из (1.1), (1.4) и (2.1) вытекает равенство

$$A^M = \langle a_{ijkl}(\mathbf{y})f^M_{ij}(\mathbf{y})f^M_{kl}(\mathbf{y})\rangle - 2J_u(\mathbf{N}^M), \tag{2.6}$$

причем $J_u(\mathbf{N}^M) = \max\limits_{\mathbf{u}\in V} J_u(\mathbf{u})$.

Получим функционал Кастильяно. Для этого, следуя [8], введем пространство $H = \{L_2(P_1)\}^6$ и ему двойственно сопряженное H^*. Двойственной к (2.5) является задача [8]

$$h^*(p^*) \to \min, \quad p^* \in H^*, \tag{2.7}$$

где

$$h^*(p^*) = \sup_{\mathbf{u}\in V} \sup_{q\in H} [\langle \Lambda^* p^*, \mathbf{u}\rangle - \langle p^*, q\rangle - G(q)] = \sup_{\mathbf{u}\in V} [\langle \Lambda^* p^*, \mathbf{u}\rangle - G^*(p^*)]. \tag{2.8}$$

Здесь $G^*(p^*)$ — функционал, сопряженный с $G(p)$; Λ^*: $H^* \to H$ — оператор, сопряженный с Λ; $\langle\, ,\, \rangle$ — операция спаривания элементов из V^*, V.

Рассмотрим слагаемое $\langle \Lambda^* p^*, \mathbf{u}\rangle$. Его можно записать в виде

$$\langle p^*, \Lambda\mathbf{u}\rangle = \frac{1}{\operatorname{mes} S} \int\limits_{P_1} p^*_{ij} u_{i,j}\, d\mathbf{y} = \frac{1}{\operatorname{mes} S}\Big[-\int\limits_{P_1} p^*_{ij,j} u_i\, d\mathbf{y} + \int\limits_{\gamma\cup\Gamma} p^*_{ij} n_j u_i\, d\mathbf{y} + \int\limits_{\omega} p^*_{ij} n_j u_i\, d\mathbf{y}\Big]. \tag{2.9}$$

В (2.9) проведено интегрирование по частям. Если сумма интегралов в квадратных скобках в (2.9) не равна нулю, то верхняя грань (2.8) равна $+\infty$. Тогда (2.7) имеет минимум, не равный $+\infty$, если

$$p^*_{ij,j} = 0 \ \text{ в } \ P_1, \quad p^*_{ij} n_j = 0 \ \text{ на } \ \gamma \cup \Gamma, \tag{2.10}$$

что соответствует уравнению равновесия и краевым условиям в напряжениях.

Последний интеграл в (2.9) с учетом совпадения значений функции $\mathbf{u} \in V$ на гранях ω_+, ω_- можно записать в виде

$$\int\limits_{\omega_+} [p^*_{ij}] n_j u_i\, d\mathbf{y}, \tag{2.11}$$

где [ ] — разность значений функции на гранях ЯП ω_+ и ω_- (рис. 1). При выводе формулы (2.11) учтено, что нормали к этим граням противоположны. Для обращения в нуль интеграла (2.11) для любой $\mathbf{u} \in V$ необходимо выполнение условия периодичности для $p^*_{ij} n_j$.

Введем множество допустимых напряжений

$$\Sigma = \{\sigma_{ij} \in H\colon \sigma_{ij,j} = 0 \text{ в } P_1,\ \sigma_{ij} n_j = 0 \text{ на } \gamma\cup\Gamma,\ \sigma_{ij}(\mathbf{y}) \text{ периодичны по } y_m\ (m \in D)\}. \tag{2.12}$$

Отождествим пространство H с сопряженным с ним H^* (σ_{ij} отождествится с p_{ij}). Тогда (2.8) принимает вид

$$h^*(p^*) = -G^*(\sigma) + \chi_\Sigma(\sigma), \tag{2.13}$$

где χ_Σ — индикаторная функция множества Σ ($\chi_\Sigma(\sigma) = 0$, если $\sigma_{ij} \in \Sigma$; $\chi_\Sigma(\sigma) = +\infty$, если $\sigma_{ij} \notin \Sigma$). Введем функционал Кастильяно $J_\sigma(\sigma) = -G^*(\sigma)$. Тогда (2.7) с учетом (2.13) принимает вид

$$J_\sigma(\sigma) \to \min, \quad \sigma_{ij} \in \Sigma. \tag{2.14}$$

Для функций из V_0 справедливо неравенство Корна [1–6]. Тогда условия теоремы III [8, п. 4.1] выполнены на V_0, в силу чего получаем равенство $\max\limits_{\mathbf{u}\in V_0} J_u(\mathbf{u}) = \min\limits_{p^*\in H^*} h^*(p^*)$. Поскольку $J_u(\mathbf{u})$ не зависит от слагаемых, соответствующих перемещению твердого тела, имеет место равенство

$$\max_{\mathbf{u}\in V} J_u(\mathbf{u}) = \min_{p^*\in H^*} h^*(p^*),$$

которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\max_{\mathbf{u}\in V} J_u(\mathbf{u}) = \min_{\sigma_{ij}\in\Sigma} J_\sigma(\sigma). \tag{2.15}$$

Используя формулу (2.6), получаем из (2.15) равенства

$$A^M = \langle a_{ijkl}(\mathbf{y}) f^M_{ij}(\mathbf{y}) f^M_{kl}(\mathbf{y})\rangle - 2\max_{\mathbf{u}\in V} J_u(\mathbf{u}), \tag{2.16}$$

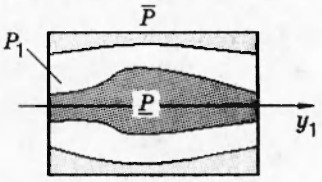

Рис. 2. Ячейки периодичности:
P_1 — исходная, $\overline{P}$ — описанная и $\underline{P}$ — вписанная

$$A^M = \langle a_{ijkl}(\mathbf{y}) f_{ij}^M(\mathbf{y}) f_{kl}^M(\mathbf{y})\rangle - 2 \min_{\sigma_{ij}\in\Sigma} J_\sigma(\sigma),$$

которые представляют собой два вариационных принципа (в перемещениях и напряжениях) для жесткостей.

При произвольных $\mathbf{u} \in V$, $\sigma_{ij} \in \Sigma$ из (2.16) получаем двустороннюю оценку

$$\langle a_{ijkl}(\mathbf{y}) f_{ij}^M(\mathbf{y}) f_{kl}^M(\mathbf{y})\rangle - 2J_u(\mathbf{u}) \geqslant A^M \geqslant \langle a_{ijkl}(\mathbf{y}) f_{ij}^M(\mathbf{y}) f_{kl}^M(\mathbf{y})\rangle - 2J_\sigma(\sigma). \tag{2.17}$$

Функционал $G^*(p^*)$ легко вычисляется [8]:

$$G^*(p^*) = -\frac{1}{2} a_{ijkl}^{-1}(\mathbf{y}) p_{ij}^* p_{kl}^* - f_{ij}^M(\mathbf{y}) p_{ij}^* - \frac{1}{2} a_{ijkl}(\mathbf{y}) f_{ij}^M(\mathbf{y}) f_{kl}^M(\mathbf{y}), \tag{2.18}$$

где a_{ijkl}^{-1} — тензор, обратный a_{ijkl}.

3. Оценки для жесткостей. Вписанная и описанная ячейки периодичности. Для материалов с пустотами можно ввести в рассмотрение вписанную $\underline{P}$ и описанную $\overline{P}$ ЯП: $\underline{P} \subset P_1 \subset \overline{P}$. При этом грани ЯП $\underline{P}$ и $\overline{P}$, пересекающиеся с ω_+, ω_-, должны быть конгруэнтны (рис. 2).

Вариационный принцип в перемещениях (2.16) может быть записан в виде

$$A^M = \min_{\mathbf{u}\in V} f(\mathbf{u}), \tag{3.1}$$

где

$$F(\mathbf{u}) = \langle a_{ijkl}(\mathbf{y})(u_{i,j} + f_{ij}^M(\mathbf{y}))(u_{k,l} + F_{kl}^M(\mathbf{y}))\rangle.$$

Равенство (3.1) следует из (2.1)–(2.3) с учетом известных симметрий упругих постоянных a_{ijkl} [7].

Введем множества возможных перемещений $\underline{V}$ и $\overline{V}$ заменой в (2.4) P_1 на $\underline{P}$ и $\overline{P}$ соответственно. Кроме того, определим все три функционала $\underline{F}(\mathbf{u})$, $F(\mathbf{u})$, $\overline{F}(\mathbf{u})$ на одном пространстве $\overline{V}$, полагая $a_{ijkl}(\mathbf{y}) = 0$ вне $\underline{V}$ для функционала $\underline{F}(\mathbf{u})$, и $a_{ijkl}(\mathbf{y}) = 0$ вне P_1 для $F(\mathbf{u})$. В силу условий (1.6), (1.7) для любой $\mathbf{u} \in \overline{V}$

$$\underline{F}(\mathbf{u}) \leqslant F(\mathbf{u}) \leqslant \overline{F}(\mathbf{u}) \cdot \tag{3.2}$$

$$\min_{\mathbf{u}\in \overline{V}} \underline{F}(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{u}\in \underline{V}} \underline{F}(\mathbf{u}), \quad \min_{\mathbf{u}\in \overline{V}} F(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{u}\in V} F(\mathbf{u}). \tag{3.3}$$

Взяв в (3.2) минимум по $\mathbf{u} \in \overline{V}$, пользуясь (3.3) и вариационным принципом (3.1), справедливым для каждой из ЯП $\underline{P}$, P_1, $\overline{P}$, получим

$$\underline{A}^M \leqslant A^M \leqslant \overline{A}^M \tag{3.4}$$

($\underline{A}^M$, $\overline{A}^M$ — жесткости конструкций, образованных на основе вписанной и описанной ЯП).

Формула (3.4) обобщает известный факт механики конечномерных конструкций, что добавление/удаление связи не уменьшает/не увеличивает жесткость.

Рассмотрим случай, когда ЯП P_1 разбита на две непересекающиеся ЯП P^1 и P^2, проекции S которых совпадают с проекцией P_1. Используем вариационный принцип в напряжениях. Введем множества допустимых напряжений Σ^1 и Σ^2 заменой P_1 на P^1 и P^2 в (2.12). Для допустимых напряжений, определенных на P^1, введем оператор продолжения

$$C\sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_{ij}(\mathbf{y}) & \text{при } \mathbf{y} \in P^1, \\ 0 & \text{при } \mathbf{y} \in P_1 \backslash P^1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Проверим, что $C\sigma_{ij} \in \Sigma$. Для этого достаточно установить, что $\sigma^c_{ij} = C\sigma_{ij}$ удовлетворяет равенству $\sigma^c_{ij,j} = 0$. Умножим σ^c_{ij} на $\varphi_{,j}$, где $\varphi(\mathbf{y})$ принадлежит множеству гладких финитных функций $\mathcal{D}(P_1)$ [9]. Интегрируя по частям с учетом того, что $\sigma_{ij}n_j = 0$ на γ, получим равенство

$$\int\limits_{P_1} \sigma^c_{ij}\varphi_{,j}\, d\mathbf{y} = -\int\limits_{P_1} \sigma_{ij,j}\varphi\, d\mathbf{y} + \int\limits_{\gamma} \sigma_{ij}n_j\varphi_i\, d\mathbf{y} \tag{3.6}$$

для любой $\varphi \in \mathcal{D}(P_1)$, из которого и следует приведенное утверждение.

Аналогично (3.5) вводится оператор продолжения из Σ^2 в Σ. Сохраним за ним то же обозначение C.

Аналогично (3.6) можно проверить, что $C\sigma^1_{ij} + C\sigma^2_{ij} \in \Sigma$ для любых $\sigma^1_{ij} \in \Sigma^1$, $\sigma^2_{ij} \in \Sigma^2$.

В силу $C\Sigma^1 + C\Sigma^2 \subset \Sigma$ (через $C\Sigma^i$ обозначен образ Σ^i при продолжении C) имеем

$$\max_{\sigma_{ij}\in\Sigma} J_\sigma(\sigma) \geqslant \max_{\substack{\sigma^1_{ij}\in\Sigma^1\\ \sigma^2_{ij}\in\Sigma^2}} J_\sigma(C\sigma^1_{ij} + C\sigma^2_{ij}) = \max_{\sigma^1_{ij}\in\Sigma^1} J^1(\sigma^1) + \max_{\sigma^2_{ij}\in\Sigma^2} J^2(\sigma^2), \tag{3.7}$$

где J^1, J^2 — сужение функционала J_σ на Σ^1, Σ^2 (P^1, P^2 — области интегрирования). Функционал J_σ на множестве $C\Sigma^1 + C\Sigma^2$ представим в виде суммы в силу определения (2.18) и того, что σ^1_{ij}, σ^2_{ij} имеют непересекающиеся носители (области, где они отличны от нуля). Также представим в виде суммы функционал $\langle a_{ijkl}(\mathbf{y})f^M_{ij}(\mathbf{y})f^M_{kl}(\mathbf{y})\rangle$.

Согласно (3.7) и вариационному принципу в напряжениях (2.16), получаем

$$A^M = \langle a_{ijkl}(\mathbf{y})f^M_{ij}(\mathbf{y})f^M_{kl}(\mathbf{y})\rangle - 2\max_{\sigma_{ij}\in\Sigma} J_\sigma(\sigma) \leqslant \langle a_{ijkl}(\mathbf{y})f^M_{ij}(\mathbf{y})f^M_{kl}(\mathbf{y})\rangle_1 -$$
$$- 2\max_{\sigma^1_{ij}\in\Sigma^1} J^1(\sigma^1) + \langle a_{ijkl}(\mathbf{y})f^M_{ij}(\mathbf{y})f^M_{kl}(\mathbf{y})\rangle_2 - 2\max_{\sigma^2_{ij}\in\Sigma^2} J^2(\sigma^2), \tag{3.8}$$

где $\langle\ \rangle_1$, $\langle\ \rangle_2$ — среднее по ЯП P^1, P^2.

Из (3.8) в силу вариационного принципа (2.16), примененного к ячейкам периодичности P^1 и P^2, получим неравенство

$$A^M \geqslant A^1 + A^2. \tag{3.9}$$

Записав неравенство (3.9) для вписанной и описанной ячеек, получим

$$\overline{A}^M \leqslant A^M + \overline{\delta}, \quad \underline{A}^M \leqslant A^M - \underline{\delta}, \tag{3.10}$$

где $\overline{\delta}$ и $\underline{\delta}$ вычисляются по формуле $\langle a_{ijkl}(\mathbf{y})f^M_{ij}(\mathbf{y})f^M_{kl}(\mathbf{y})\rangle_\Delta - 2\max\limits_{\sigma_{ij}\in\Sigma(\Delta)} J_\sigma(\sigma)$, в которой $\Delta = \overline{P}\backslash P_1$ для $\overline{\delta}$, $\Delta = P_1\backslash\underline{P}$ для $\underline{\delta}$.

При этом $\underline{\delta}(\overline{\delta})$ есть жесткость конструкции Δ, равная разности между P_1 и вписанной (описанной) конструкциями.

Из (3.10) следует, что жесткость составной конструкции не меньше чем сумма жесткостей ее составных частей.

Оценка типа Фойгхта (оценка сверху). Возьмем допустимые перемещения вида $\mathbf{u} = 0$. Из (2.17) получим

$$A^M \leqslant \langle a_{ijkl}(\mathbf{y}) f_{ij}^M(\mathbf{y}) f_{kl}^M(\mathbf{y}) \rangle. \tag{3.11}$$

Оценка типа Рейса (оценка снизу). Пусть y_m $(m \in D)$ — переменные, по которым имеет место периодичность. Пусть y_f — дополнительная к ним переменная (таковой нет для трехмерных композитов, для пластин это y_3, для балки это y_2 или y_3). Считаем, что ЯП плоская (для пластины) или цилиндрическая (для балки). Тогда допустимыми будут напряжения вида

$$\sigma_{ij} = C_{ij} y_f^n \tag{3.12}$$

(C_{ij} — произвольные постоянные для трехмерного композита; $C_{i3} = C_{3i} = 0$ — для пластины и $C_{11} \neq 0$ — только для балки; n — произвольное целое число для пластин и балок, $n = 0$ для трехмерных композитов).

Оценку (2.17) снизу с учетом (2.18) можно записать в виде

$$A^M \geqslant \langle -a_{ijkl}^{-1}(\mathbf{y}) \sigma_{ij} \sigma_{kl} + 2 f_{kl}^M(\mathbf{y}) \sigma_{kl} \rangle. \tag{3.13}$$

Правую часть неравенства (3.13) с учетом (3.12) запишем:

$$-C_{ij} C_{kl} \langle a_{ijkl}^{-1}(\mathbf{y}) y_f^{2n} \rangle + C_{kl} \langle f_{kl}^M(\mathbf{y}) y_f^n \rangle. \tag{3.14}$$

На C_{ij} нет ограничений. Проведем безусловную максимизацию (3.14) по C_{ij}. Уравнение Эйлера для (3.14) имеет вид

$$-C_{kl} \langle a_{ijkl}^{-1}(\mathbf{y}) y_f^{2n} \rangle + \langle f_{ij}^M(\mathbf{y}) y_f^n \rangle = 0.$$

Его решение есть

$$C_{ij} = \langle a_{ijkl}^{-1}(\mathbf{y}) y_f^{2n} \rangle^{-1} \langle f_{kl}^M(\mathbf{y}) y_f^n \rangle \tag{3.15}$$

(-1 означает обращение тензора соответствующей размерности).

Подстановка (3.15) в (3.14) дает

$$A^M \geqslant \langle a_{ijkl}^{-1}(\mathbf{y}) y_f^{2n} \rangle^{-1} \langle f_{ij}^M(\mathbf{y}) y_f^n \rangle \langle f_{kl}^M(\mathbf{y}) y_f^n \rangle. \tag{3.16}$$

4. Примеры оценок. Приведем вид функции $f_{ij}^M(\mathbf{y})$ и значения мультииндекса M, определяющие конкретные структуры — трехмерные композиты, пластины, балки.

Для трехмерного композита [1–3, 9]

$$f_{ij}^M(\mathbf{y}) = \delta_{ik}\delta_{jl}, \quad M = (ijij), \; i,j = 1, 2, 3.$$

Используя эти формулы и (3.10), (3.16), приходим к классическим функционалам Лагранжа и Кастильяно, а также оценкам Фойгхта и Рейса для усредненных упругих постоянных A_{ijij}

$$\langle a_{ijij}(\mathbf{y}) \rangle \geqslant A_{ijij} \geqslant \langle a_{ijij}^{-1}(\mathbf{y}) \rangle^{-1}. \tag{4.1}$$

Оценка для усредненных коэффициентов эллиптических уравнений, аналогичная (4.1), приводилась в [10].

Функции f_{ij}^M для пластины имеют вид [3, 4, 9]:

— для жесткостей на растяжение/сжатие $f_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{y}) = \delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}$, $M = (\alpha\beta\alpha\beta 0)$,

— для жесткостей на изгиб/кручение

$$f_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{y}) = -\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} y_3, \quad M = (\alpha\beta\alpha\beta 2), \quad \alpha, \beta = 1, 2; \quad i,j = 1, 2, 3.$$

Используя эти формулы, приходим к оценкам для жесткостей пластины:
на растяжение/сжатие $\langle a_{\alpha\beta\alpha\beta}(\mathbf{y})\rangle \geqslant A^0_{\alpha\beta\alpha\beta} \geqslant \langle a^{-1}_{\alpha\beta\alpha\beta}(\mathbf{y})\rangle^{-1}$,
на изгиб/кручение $\langle a_{\alpha\beta\alpha\beta}(\mathbf{y})y_3^2\rangle \geqslant A^2_{\alpha\beta\alpha\beta} \geqslant \langle y_3^2\rangle^2\langle a^{-1}_{\alpha\beta\alpha\beta}(\mathbf{y})y_3^2\rangle^{-1}$.

Функции f^M_{ij} для балки имеют вид [9]:
на растяжение/сжатие $f^M_{ij}(\mathbf{y}) = \delta_{i1}\delta_{j1}$, $M = (0)$,
на изгиб $f^M_{ij}(\mathbf{y}) = -\delta_{i1}\delta_{j1}y_\alpha$, $M = (\alpha)$,
на кручение $f^M_{ij}(\mathbf{y}) = S_\gamma y_{\tilde\gamma}\delta_{i1}\delta_{j1}$, $M = (b)$ $(i,j = 1, 2, 3;\ \gamma = 2, 3;\ \tilde\gamma = 2$, если $\gamma = 3$; $\tilde\gamma = 3$, если $\gamma = 2$; $S_2 = 1$, $S_3 = -1)$.

Используя эти формулы, получаем двусторонние оценки для жесткостей балки:
на растяжение $\langle a_{1111}(\mathbf{y})\rangle \geqslant A^0 \geqslant 1/\langle 1/a_{1111}(\mathbf{y})\rangle$;
на изгиб $\langle a_{1111}(\mathbf{y})y_\alpha^2\rangle \geqslant A^\alpha \geqslant \langle y_\alpha^2\rangle^2/\langle y_\alpha^2/a_{1111}(\mathbf{y})\rangle$;
на кручение $\langle a_{1\gamma1\gamma}(\mathbf{y})y_{\tilde\gamma}^2\rangle \geqslant A^b \geqslant \langle y_2^2 + y_3^2\rangle^2/\langle (y_2^2 + y_3^2)/a_{1\gamma1\gamma}(\mathbf{y})\rangle$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.** Asymptotic Analysis for Periodic Structures. Amsterdam: North-Holland, 1968.
2. **Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.** Усреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1982.
3. **Аннин Б. Д., Каламкаров А. Л., Колпаков А. Г., Партон В. З.** Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1993.
4. **Caillerie D.** Thin elastic and periodic plates // Math. Meth. in the Appl. Sci. 1984. N 6. P. 159–191.
5. **Колпаков А. Г.** К вычислению характеристик тонких упругих стержней периодического строения // Прикл. математика и механика. 1991. Вып. 3. С. 440–448.
6. **Колпаков А. Г.** Жесткости упругих цилиндрических балок // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 2. С. 102–109.
7. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
8. **Экланд И., Темам Р.** Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
9. **Kalamkarov A. L., Kolpakov A. G.** Analysis, Design and Optimization of Composite Structures. Chichester, N. Y., etc.: Wiley, 1997.
10. **Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.** О G-сходимости параболических операторов // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, № 1. С. 11–58.

Поступила в редакцию 24/XII 1996 г.