УДК 593.3

ОСРЕДНЕНИЕ СЛОИСТОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ С МАЛОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ДИССИПАЦИЕЙ НА МЕЖСЛОЙНОЙ ГРАНИЦЕ

Ю. А. Боган

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Построены осредненные соотношения для слоистой среды при наличии динамической диссипации на межслойной границе для динамических задач продольного сдвига и двумерной теории упругости. Показано, что при малой диссипации осредненная краевая задача сингулярно возмущена. Исследован качественный характер вырождения краевой задачи.

Ключевые слова: теория упругости, продольный сдвиг, осреднение.

В работе [1] построены осредненные соотношения для упругой слоистой среды, когда на границе контакта слоев заданы нестандартные условия сопряжения, связывающие, например, касательное напряжение со скачком касательного перемещения при помощи некоторого неотрицательного коэффициента, который был назван коэффициентом трения. Было показано, что при малом коэффициенте трения осредненные краевые задачи сингулярно возмущены, и изучен ряд постановок предельных задач. В отличие от [1] в данной работе изучается ситуация, в которой на межслойной границе поставлено условие сопряжения, связывающее касательное напряжение и скачок касательной скорости. Ясно, что эта постановка имеет смысл только в динамической задаче теории упругости. Впервые условие сопряжения для композиционных материалов было поставлено в [2]. С механической точки зрения это условие сопряжения в некотором смысле моделирует распространение волн в среде при наличии внутренней диссипации на межслойной границе. Оказалось, что это условие сопряжения кардинально меняет ситуацию. Если в ситуации, рассмотренной в [1] (см. также [3]), осредненные соотношения соответствовали просто однородному анизотропному материалу, то в изучаемой в настоящей работе ситуации осреднение приводит к вязкоупругому материалу. Как и в [1], при малом коэффициенте трения происходит сингулярное вырождение краевой задачи и вязкоупругость исчезает из предельных соотношений. Исследованы задача о продольном сдвиге и двумерная задача теории упругости.

1. Продольный сдвиг. В монографии [4] изучалась задача о малых продольных колебаниях стержня при наличии диссипации в уравнении. В данном пункте рассматривается задача осреднения для слоистой анизотропной упругой среды в условиях продольного сдвига при наличии диссипации на границе контакта слоев. Уравнение колебаний примем в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(a_{11}\,\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_{12}\,\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big) - \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(a_{12}\,\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_{22}\,\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big) = f. \qquad (1.1)$$

Обозначим через L максимальный диаметр области Ω на плоскости (в направлении оси x_1) и положим $\varepsilon = L/N$, где натуральное число $N \gg 1$. Предполагается, что уравнение (1.1) равномерно гиперболично, слои располагаются ортогонально оси x_1, $x = (x_1, x_2)$, ячейка периодичности состоит из двух материалов и совпадает с отрезком $(0,1)$:

$$a_{ij}(\eta) = a_{ij}^1, \quad \eta \in (0,h), \qquad a_{ij}(\eta) = a_{ij}^2, \quad \eta \in (h,1), \qquad i,j = 1,2.$$

Коэффициенты $a_{ij} = a_{ij}(x_1/\varepsilon)$ $(i,j = 1,2)$ — измеримые ограниченные функции быстрой переменной $\eta = x_1/\varepsilon$, периодические с периодом 1, и существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что

$$\sum_{s,l=1}^{2} a_{sl}\xi_s\xi_l \geqslant \alpha(\xi_1^2 + \xi_2^2)$$

для любых вещественных ξ_i, $i = 1,2$. На границе контакта материалов внутри ячейки выполняется условие сопряжения, связывающее нормальное напряжение и скорость процесса:

$$a_{11}\,\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_{12}\,\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|_{\eta=h\pm 0} = \frac{k}{\varepsilon}\Big[\frac{\partial u}{\partial t}\Big](h). \tag{1.2}$$

Здесь квадратные скобки обозначают скачок функции при переходе через границу раздела материалов:

$$\Big[\frac{\partial u}{\partial t}\Big] = \frac{\partial u}{\partial t}(h+0) - \frac{\partial u}{\partial t}(h-0).$$

Для уравнения (1.1) с условиями сопряжения (1.2) поставим начально-краевую задачу в области $Q = (0,T)\times\Omega$:

$$u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \qquad u(x,t)\big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1.3}$$

($\partial\Omega$ — граница области Ω). Обозначим решение задачи (1.1)–(1.3) через $u^\varepsilon(x,t)$. Построим формальную асимптотику решения этой задачи методом осреднения Н. С. Бахвалова [4]. При введении быстрой переменной η уравнение (1.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - \Big(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial}{\partial \eta}\Big)\Big[a_{11}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial}{\partial \eta}\Big)u^\varepsilon + a_{12}\,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2}\Big] - \\ - \frac{\partial}{\partial x_2}\Big[a_{12}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial}{\partial \eta}\Big)u^\varepsilon + a_{22}\,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2}\Big] = f. \tag{1.4}$$

Будем искать решение краевой задачи в виде ряда по степеням ε:

$$u^\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u^n(x,\eta,t). \tag{1.5}$$

Для построения осредненного уравнения необходимо знать только первые три члена этого ряда. Подставляя (1.5) в (1.4), собирая члены при совпадающих степенях ε и приводя подобные, при степени ε^{-2} получим уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial \eta}\Big[a_{11}\,\frac{\partial u^0}{\partial \eta}\Big] = 0,$$

из которого следует, что $u^0 = u^0(x,t)$. При степени ε^{-1} получим уравнение и условие сопряжения

$$-\frac{\partial}{\partial \eta}\Big[a_{11}\,\frac{\partial u^1}{\partial \eta} + a_{11}\,\frac{\partial u^0}{\partial x_1} + a_{12}\,\frac{\partial u^0}{\partial x_2}\Big] - \frac{\partial}{\partial x_2}\Big[a_{12}\,\frac{\partial u^0}{\partial \eta}\Big] = 0; \tag{1.6}$$

$$a_{11}\,\frac{\partial u^1}{\partial\eta}+a_{11}\,\frac{\partial u^0}{\partial x_1}+a_{12}\,\frac{\partial u^0}{\partial x_2}\Big|_{\eta=\pm0}=k\Big[\frac{\partial u^1}{\partial t}\Big]. \tag{1.7}$$

Из соотношений (1.6), (1.7) следует, что функция $u^1(x,\eta,t)$ определяется единственным (с точностью до произвольной постоянной) образом. Из (1.5) следует, что

$$a_{11}\,\frac{\partial u^1}{\partial\eta}+a_{11}\,\frac{\partial u^0}{\partial x_1}+a_{12}\,\frac{\partial u^0}{\partial x_2}=\varphi(x,t).$$

Функция $\varphi(x,t)$ подлежит определению. Полагаем

$$\lambda_{11}=\int\limits_0^1\frac{ds}{a_{11}(s)},\qquad \lambda_{12}=\int\limits_0^1\frac{a_{12}(s)}{a_{11}(s)}\,ds,\qquad \mu=\int\limits_0^1\Big[a_{22}(s)-\frac{a_{12}^2(s)}{a_{11}(s)}\Big]\,ds.$$

Введем функцию

$$S(x,t)=\frac{\partial u^0}{\partial x_1}+\lambda_{12}\,\frac{\partial u^0}{\partial x_2}.$$

Тогда из (1.6) и условия сопряжения (1.2) получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $\varphi(x,t)$

$$\varphi(x,t)+k\lambda_{11}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}=k\,\frac{\partial S}{\partial t}. \tag{1.8}$$

Введя новую неизвестную функцию

$$\psi(x,t)=\lambda_{11}\varphi(x,t)-S(x,t),$$

уравнение (1.8) можно привести к виду

$$k\,\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\psi(x,t)+S}{\lambda_{11}}=0.$$

Решив его, получим, что с точностью до произвольной постоянной

$$\varphi(x,t)=\frac{1}{\lambda_{11}}\,S(x,t)-\frac{1}{k\lambda_{11}^2}\int\limits_0^t\exp\Big(-\frac{t-\tau}{k\lambda_{11}}\Big)S(x,\tau)\,d\tau. \tag{1.9}$$

Собирая члены при нулевой степени ε и используя равенство нулю среднего по периоду, получим осредненное уравнение для определения функции u^0

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\Big[\frac{1}{\lambda_{11}}\Big(\frac{\partial u^0}{\partial x_1}+\lambda_{12}\,\frac{\partial u^0}{\partial x_2}\Big)-\frac{1}{k\lambda_{11}^2}\int\limits_0^t\exp\Big(-\frac{t-\tau}{k\lambda_{11}}\Big)S(x,\tau)\,d\tau\Big]-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_2}\Big[\mu\,\frac{\partial u^0}{\partial x_2}+\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}}\,S(x,t)-\frac{\lambda_{12}}{k\lambda_{11}^2}\int\limits_0^t\exp\Big(-\frac{t-\tau}{k\lambda_{11}}\Big)S(x,\tau)\,d\tau\Big]+\frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2}=f. \tag{1.10}$$

Подставив в (1.10) явный вид функции $S(x,t)$, получим интегродифференциальное уравнение для определения функции $u^0(x,t)$ дивергентного вида

$$-\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}-\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2}=f, \tag{1.11}$$

где

$$\sigma_{11}=\frac{1}{\lambda_{11}}\Big(\frac{\partial u^0}{\partial x_1}+\lambda_{12}\,\frac{\partial u^0}{\partial x_2}\Big)-\frac{1}{k\lambda_{11}^2}\int\limits_0^t \exp\Big(-\frac{t-\tau}{k\lambda_{11}}\Big)\Big(\frac{\partial u^0}{\partial x_1}+\lambda_{12}\,\frac{\partial u^0}{\partial x_2}\Big)\,d\tau,$$

$$\sigma_{22}=\mu\,\frac{\partial u^0}{\partial x_2}+\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}}\Big(\frac{\partial u^0}{\partial x_1}+\lambda_{12}\,\frac{\partial u^0}{\partial x_2}\Big)-\frac{\lambda_{12}}{k\lambda_{11}^2}\int\limits_0^t \exp\Big(-\frac{t-\tau}{k\lambda_{11}}\Big)\Big(\frac{\partial u^0}{\partial x_1}+\lambda_{12}\,\frac{\partial u^0}{\partial x_2}\Big)\,d\tau.$$

Отметим, что последние соотношения следует рассматривать как определяющие для осредненной среды. Присоединив к уравнению (1.11) начальные и граничные условия

$$u(x,0)=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\qquad u(x,t)\big|_{\partial\Omega}=0, \tag{1.12}$$

получим осредненную краевую задачу. Полагаем

$$b_{11}=\frac{1}{\lambda_{11}},\qquad b_{12}=\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}},\qquad b_{22}=\mu+\frac{\lambda_{12}^2}{\lambda_{11}},\qquad g_k(t-\tau)=\frac{1}{k\lambda_{11}}\exp\Big(-\frac{t-\tau}{k\lambda_{11}}\Big).$$

Рассмотрим поведение решения задачи (1.11), (1.12) при малом k. Отметим, что на интервале $(0,t)$ функция

$$g_k(t-\tau)=\frac{1}{k\lambda_{11}}\exp\Big(-\frac{t-\tau}{k\lambda_{11}}\Big)$$

— это аппроксимация δ-функции при малом k, так как согласно теории обобщенных функций $g_k(t-\tau)\to\delta(t-\tau)$ при $k\to+0$. С точки зрения теории сингулярных возмущений это означает, что в начальный момент времени в решении начально-краевой задачи присутствует экспоненциально затухающий пограничный слой. При $k\to+0$ σ_{11} стремится к нулю, а σ_{22} — к $\mu\,\partial u/\partial x_2$ и вырожденное уравнение принимает вид

$$-\mu\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f. \tag{1.13}$$

Разумеется, начальные условия для уравнения (1.13) сохраняются. Таким образом, влияние вязкости в пределе исчезает и по пространственным переменным происходит понижение размерности. Уравнение (1.13) можно рассматривать как вырожденное гиперболическое. Это обстоятельство приводит к появлению особенностей решения начально-краевой задачи для уравнения (1.13). Это решение, вообще говоря, не имеет в области Ω интегрируемой с квадратом производной $\partial u/\partial x_1$.

2. Двумерная задача теории упругости. Для системы уравнений теории упругости поставим начально-краевую задачу в области $Q=(0,T)\times\Omega$:

$$u(x,0)=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\qquad u(x,t)\big|_{\partial\Omega}=0. \tag{2.1}$$

Здесь Ω — область на плоскости с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Предполагается, что массовые силы отличны от нуля. Обозначим решение задачи (2.1) через $u^\varepsilon(x,t)=(u_1^\varepsilon,u_2^\varepsilon)$. Для упрощения вычислений упругая среда предполагается ортотропной и обобщенный закон Гука принимается в виде

$$\sigma_{11}=a_{11}(\eta)e_{11}+a_{12}(\eta)e_{22},\qquad \sigma_{22}=a_{12}(\eta)e_{11}+a_{22}(\eta)e_{22},$$
$$\sigma_{12}=2a_{66}(\eta)e_{12},\qquad \eta=x_1/\varepsilon,\qquad e_{ij}=(u_{i,x_j}+u_{j,x_i})/2,\quad i,j=1,2.$$

Функции $a_{ij}(\eta)$ считаются измеримыми ограниченными функциями переменной η при обычном предположении положительной определенности матрицы коэффициентов упругости. Ячейка периодичности $(0,1)$ состоит, вообще говоря, из двух материалов, при этом

$$a_{ij}(\eta) = a_{ij}^1, \quad \eta \in (0,h), \qquad a_{ij}(\eta) = a_{ij}^2, \quad \eta \in (h,1), \qquad i,j = 1,2,6.$$

На межслойной границе поставлены условия сопряжения с диссипацией

$$\sigma_{12}^\varepsilon\big|_{\eta=h\pm 0} = \frac{k}{\varepsilon}\Big[\frac{u_2^\varepsilon}{\partial t}\Big], \qquad [\sigma_{11}^\varepsilon]\big|_{\eta=h\pm 0} = 0, \qquad [u_1^\varepsilon] = 0, \qquad k > 0, \quad 0 < h < 1.$$

Как обычно, при малом ε решение задачи представляется в виде ряда

$$u_k^\varepsilon = \sum_{n=0}^\infty \varepsilon^n u_k^n(x,y,\eta), \qquad k = 1,2.$$

Система уравнений движения имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} &= \rho\Big(\frac{x_1}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + f_1(x,t), \\ \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} &= \rho\Big(\frac{x_1}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + f_2(x,t), \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\rho(x_1/\varepsilon)$ — плотность материала. Как и в п. **1**, подставим вместо производной по x_1 полную производную $\partial/\partial x_1 + (1/\varepsilon)\,\partial/\partial\eta$ в систему уравнений (2.4) и соберем вместе члены с совпадающими степенями ε. При степени ε^{-2} получим соотношения

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\Big[a_{11}(\eta)\,\frac{\partial u_1^0}{\partial\eta}\Big] = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\eta}\Big[2a_{66}(\eta)\,\frac{\partial u_1^0}{\partial\eta}\Big] = 0,$$

из которых следует, что $u_k^0(x,t,\eta) = u_k^0(x,t)$ $(k = 1,2)$. Для определения u_1^1 получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\Big[a_{11}(\eta)\,\frac{\partial u_1^1}{\partial\eta} + a_{11}(\eta)\,\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + a_{12}(\eta)\,\frac{\partial u_2^0}{\partial x_2}\Big] + \frac{\partial}{\partial x_1}\Big[a_{11}(\eta)\,\frac{\partial u_1^0}{\partial\eta}\Big] + \frac{\partial}{\partial x_2}\Big[2a_{66}(\eta)\,\frac{\partial u_2^0}{\partial\eta}\Big] = 0.$$

Функция $u_1^1(x,t,\eta)$ однозначно находится из условия периодичности $u_1^1(x,t,0) = u_1^1(x,t,1)$, непрерывности ее на контактной границе

$$u_1^1(x,t,h+0) = u_1^1(x,t,h-0)$$

и из условия непрерывности напряжения σ_{11} при $h = 0$. Функция $u_2^1(x,t,\eta)$ определяется из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\Big[2a_{66}(\eta)\,\frac{\partial u_2^1}{\partial\eta} + 2a_{66}\,(\eta)\frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} + 2a_{66}(\eta)\,\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2}\Big] + \frac{\partial}{\partial x_1}\Big[2a_{66}(\eta)\,\frac{\partial u_2^0}{\partial\eta}\Big] = 0$$

и условий сопряжения

$$\Big(2a_{66}(\eta)\,\frac{\partial u_2^1}{\partial\eta} + 2a_{66}(\eta)\,\frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} + 2a_{66}(\eta)\,\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2}\Big)\Big|_{\eta=h\pm 0} = k_2\Big[\frac{\partial u_2^1}{\partial t}\Big].$$

Ясно, что функция $u_2^1(x,t,\eta)$ разрывна на интервале $(0,1)$. Аналогично тому как это сделано в п. **1**, полагаем

$$2a_{66}(\eta)\,\frac{\partial u_2^1}{\partial\eta} + 2a_{66}(\eta)\,\frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} + 2a_{66}(\eta)\,\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} = \varphi_1(x,t), \qquad S_1(x,t) = \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2}.$$

Опуская промежуточные вычисления, получим

$$\varphi_1(x,t) = \frac{1}{\lambda_{66}}\, S_1(x,t) - \frac{1}{k\lambda_{66}^2} \int\limits_0^t \exp\Big(-\frac{t-\tau}{k\lambda_{66}}\Big) S_1(x,\tau)\, d\tau.$$

Собирая члены при нулевой степени ε, получим осредненные уравнения. Обозначим осредненные напряжения через τ_{ij}^k $(i,j=1,2)$. Уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial \tau_{11}^k}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1(x,t)}{\partial x_2} = \bar\rho\, \frac{\partial^2 u_1^k}{\partial t^2} + f_1(x,t),$$

$$\frac{\partial \varphi_1(x,t)}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}^k}{\partial x_2} = \bar\rho\, \frac{\partial^2 u_2^k}{\partial t^2} + f_2(x,t).$$

Здесь $\bar\rho$ — среднее по периоду от плотности материала; u_i^k $(i=1,2)$ — перемещения в осредненной задаче. Напряжения в осредненной задаче имеют вид

$$\tau_{11}^k(x,t) = \frac{1}{\lambda_{11}}\, \frac{\partial u_1^k}{\partial x_1} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}}\, \frac{\partial u_2^k}{\partial x_2}; \tag{2.3}$$

$$\tau_{12}^k(x,t) = \frac{1}{\lambda_{66}}\, S_1(x,t) - \frac{1}{k\lambda_{66}^2} \int\limits_0^t \exp\Big(-\frac{t-\tau}{k\lambda_{66}}\Big) S_1(x,\tau)\, d\tau; \tag{2.4}$$

$$\tau_{22}^k(x,t) = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}}\, \frac{\partial u_1^k}{\partial x_1} + \Big(\mu + \frac{\lambda_{12}^2}{\lambda_{11}}\Big) \frac{\partial u_2^k}{\partial x_2}. \tag{2.5}$$

Здесь

$$\lambda_{11} = \int\limits_0^1 \frac{1}{a_{11}(s)}\, ds, \qquad \lambda_{12} = \int\limits_0^1 \frac{a_{12}(s)}{a_{11}(s)}\, ds,$$

$$\mu = \int\limits_0^1 \Big(a_{22}(s) - \frac{a_{12}(s)^2}{a_{11}(s)}\Big)\, ds, \qquad \lambda_{66} = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \frac{1}{a_{66}(s)}\, ds.$$

Структура формул (2.3)–(2.5) ясна: напряжения в осредненной задаче представляют собой сумму осредненных напряжений, соответствующих стационарной задаче, и вязкоупругих слагаемых. Положительная определенность матрицы упругих постоянных в стационарной задаче очевидна. Отметим, что вязкоупругое слагаемое присутствует только в формуле (2.4) для касательного напряжения.

Рассмотрим поведение решения начально-краевой задачи для системы уравнений движения при малом k. При $k \to +0$ касательное напряжение τ_{12}^k стремится к нулю, вязкоупругая составляющая в уравнениях движения исчезает и уравнения движения записываются следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{1}{\lambda_{11}} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\Big) = \bar\rho\, \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + f_1(x,t),\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}}\, \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \Big(\mu + \frac{\lambda_{12}^2}{\lambda_{11}}\Big) \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\Big) = \bar\rho\, \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + f_2(x,t)\end{gathered} \tag{2.6}$$

(v_1, v_2 — вектор перемещений при $k=0$). В (2.6) отсутствуют производные v_1 по x_2 и v_2 по x_1, также отсутствует касательное напряжение τ_{12}. Как и в п. **1**, это вырожденная система уравнений. Как показано в [1], система уравнений в стационарном случае — это гиперболическая система с двумя двукратными семействами характеристик $x_1 = \text{const}$, $x_2 = \text{const}$, причем ее характеристическая форма неотрицательна.

Заключение. В работе рассмотрен весьма упрощенный (по сравнению с общей периодической задачей) случай слоистой среды. Показано, что наличие диссипации в динамических задачах приводит к изменению уравнения состояния. При малой диссипации вязкоупругость в пределе исчезает, но предельные уравнения содержат вырождение по пространственным переменным. Ясно, что эта ситуация имеет место и в общей периодической задаче осреднения, а в задаче на ячейке можно получить сингулярное возмущение по временно́й координате, так как касательное напряжение при этом будет удовлетворять соотношениям типа (1.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боган Ю. А.** Стационарные краевые задачи теории упругости с малой вязкостью // Сиб. журн. вычисл. математики. 1999. Т. 2, № 1. С. 13–20.
2. **Santosa F., Symes W. W.** A model for a composite with anisotropic dissipation by homogenization // Intern. J. Solids Struct. 1989. V. 25, N 4. P. 381–392.
3. **Lene F.** Probleme d’homogeneisation avec glissement visquex // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1981. T. 292, N 23. P. 1003–1006.
4. **Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.** Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.

Поступила в редакцию 24/X 2003 г.