

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева Н. Л., Черный Л. Т. Электризация аэрозольных частиц при движении в одномерном коронном разряде. — ПМТФ, 1982, № 4.
2. Разевик Д. В. Начальные напряжения газового разряда в электрических полях различной конфигурации. — Электричество, 1970, № 8.
3. Верещагин И. П., Левитов В. И., Мирзабекян Г. З., Пашин М. М. Основы электрогазодинамики дисперсных систем. М.: Энергия, 1974.
4. Ватажин А. Б., Грабовский В. И., Лихтер В. А., Шульгин В. И. Электрогазодинамические течения. М.: Наука, 1983.
5. Капцов Н. А. Электрические явления в газах и вакууме. 2-е изд. М.—Л.: Гостехиздат, 1950.
6. Тамм И. Е. Основы теории электричества. 8-е изд. М.: Наука, 1966.
7. Черный Л. Т. Одномерные течения униполярно заряженных электризующихся аэрозолей в ускоряющем электрическом поле. — ДАН СССР, 1983, т. 273, № 3.
8. Седов Л. И. Механика сплошной среды. 3-е изд. М.: Наука, 1976, т. 1, 2.
9. Воробьев П. В. Методика исследования эффективности работы устройств для зарядки аэрозолей. — В кн.: Докл. науч.-техн. конф. по итогам НИР за 1966—1967 г. М.: МЭИ, 1967.
10. Левин Л. М. Исследования по физике грубодисперсных аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР, 1964.
11. Беляев С. П., Никифорова Н. К., Смирнов В. В., Щелчков Г. И. Опτικο-электронные методы изучения аэрозолей. М.: Энергоиздат, 1981.

Поступила 6/IX 1983 г.

УДК 532.5.51+532.5.527

О СХОДСТВЕ ЭФФЕКТОВ ПЛОТНОСТНОЙ СТРАТИФИКАЦИИ И ВРАЩЕНИЯ

В. А. Владимиров

(Новосибирск)

Наличие сходства (аналогии) между свойствами вращающихся и стратифицированных по плотности течений жидкости впервые отмечено в 1916 г. Рэлеем [1]. С этого времени опубликован целый ряд работ, в которых такое сходство успешно использовалось при решении задач теории волн, теории устойчивости, описания вторичных режимов и турбулентности. Обзоры некоторых относящихся сюда достижений даны в [2, 3].

Хотя успехи в использовании аналогии для получения новых результатов существенны, общее понимание вопроса неудовлетворительно. Серьезным недостатком является разрозненность набора примеров, на которых аналогия продемонстрирована. Степень близости, на основе которой результаты из двух областей объявляются аналогичными, варьируется от тождественности до весьма отдаленного сходства. Классификация примеров аналогии на основе каких-либо общих принципов не существует. Неясными остаются границы применимости аналогии. Данная работа возникла при попытке ответить на эти вопросы.

С наиболее общей точки зрения аналогия эффектов стратификации и вращения — следствие известного положения механики, гласящего, что любая часть истинного ускорения объекта после перехода в соответствующую подвижную систему координат может рассматриваться как поле «массовых сил». Такой подход привлекателен своей простотой и универсальностью. Однако оказывается, что во всех случаях, кроме тривиальных, он является бесполезным вследствие зависимости поля «массовых сил» от скорости. Хорошим примером здесь служат уравнения движения жидкости, записанные во вращающейся системе координат. «Массовой силой» в них приходится объявлять силу Кориолиса. Ясно, что введение такого сорта «массовых сил» не может дать каких-либо оснований для перенесения известных результатов, относящихся к случаю однородного поля тяжести, в новую область.

В то же время существуют более тонкие и одновременно более плодотворные способы выявления аналогии. Единственный возможный в настоящее время путь для их объединения — математический. Движения вращающейся и стратифицированной жидкости объявляются аналогичными, если они управляются близкими по форме уравнениями. Степень близости должна быть такой, чтобы описание некоторого класса движений в одной области существенно помогло решению сходной задачи в другой. При таком подходе вопрос об аналогии сводится к проблеме классификации соответствующих дифференциальных уравнений. В общем виде эта задача чрезвычайно сложна. В работе дано несколько примеров, иллюстрирующих возможность продвижения по этому пути. Рассмотрено два существенно различающихся по жесткости предъявляемых требований уровня аналогии: 1) уровень сходства исходных нелинейных уравнений движения вращающейся и стратифицированной жидкости; 2) сходство линейар-

зованных уравнений движения или их следствий (например, спектральных задач для линейных волн и теории устойчивости).

Проведенное сравнение уравнений позволяет утверждать, что свойства движений вращающейся жидкости, вообще говоря, существенно сложнее, чем стратифицированной. Для того чтобы добиться совпадения (или существенного схождения) уравнений движения, приходится предполагать, что движения во вращающейся жидкости либо обладают высокой степенью симметрии, либо малы по амплитуде (либо то и другое вместе). Анализ содержащихся примеров направлен на выяснение границ применимости аналогии и изучение общих качественных свойств вращающихся потоков.

Эффекты твердотельного вращения. Рассматриваются неустановившиеся движения несжимаемой однородной по плотности вязкой жидкости во вращающейся с постоянной скоростью $\Omega/2$ системе координат. Уравнения движения записываются в виде [4]

$$(1) \quad D_0 \mathbf{u} + \Omega \times \mathbf{u} = -\nabla p^* + \nu \Delta \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, D_0 \equiv \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla,$$

где \mathbf{u} — вектор скорости; p^* — модифицированное давление, включающее в себя «центробежную добавку»; ∇ — вектор-градиент; Δ — оператор Лапласа; ν — коэффициент кинематической вязкости.

Пусть \mathbf{n} есть единичный вектор, задающий фиксированное (во вращающейся системе) направление и составляющий с вектором Ω угол θ ($0 \leq \theta \leq \pi$). Изучается класс решений (1), поля скорости которых не изменяются вдоль направления \mathbf{n} .

Сначала внимание будет ограничено случаем идеальной жидкости ($\nu = 0$). Вводится система декартовых координат x, y, z так, что ось x параллельна вектору \mathbf{n} , т. е. $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$. Для рассматриваемого класса движений поля скорости $\mathbf{u} = (u, v, w)$ и давления p^* не зависят от координаты x :

$$(2) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(y, z, t), p^* = p^*(y, z, t).$$

Вектор удвоенной угловой скорости $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$.

После введения формальных обозначений

$$(3) \quad \rho \equiv u + \Omega_3 z - \Omega_2 y, \mathbf{g} = (0, g_2, g_3) \equiv \mathbf{u} \times \Omega = (0, -\Omega_3, \Omega_2)$$

система уравнений (1) для движений (2) может быть преобразована к форме

$$(4) \quad Dv = -p_y + \rho g_2, Dw = -p_z + \rho g_3, D\rho = 0, v_y + w_z = 0, \\ D \equiv \partial/\partial t + v\partial/\partial y + w\partial/\partial z,$$

где $p \equiv p^* - \Omega_1 \psi + (1/2)(\Omega_3 y - \Omega_2 z)^2$; ψ — функция тока, для которой $v = -\psi_z$, $w = \psi_y$. Индексы из независимых переменных повсюду обозначают частные производные.

В терминах неизвестных функций ρ, ψ система (4) преобразуется к виду

$$(5) \quad D\Delta\psi = \rho_y g_3 - \rho_z g_2, D\rho = 0, D \equiv \partial/\partial t - \psi_z \partial/\partial y + \psi_y \partial/\partial z.$$

Для класса стационарных движений замена неизвестных $v \equiv \sqrt{\rho} v_c$, $w \equiv \sqrt{\rho} w_c$ приводит систему (4) к форме

$$(6) \quad \rho D_c v_c = -p_y + \rho g_2, \rho D_c w_c = -p_z + \rho g_3,$$

$$D_c \rho = 0, (v_c)_y + (w_c)_z = 0, D_c \equiv v_c \partial/\partial y + w_c \partial/\partial z.$$

Непосредственно видно, что величина ρ в (4) — (6) может формально трактоваться как плотность жидкости, а \mathbf{g} — как однородное поле тяжести. При этом система (6) совпадает с точными уравнениями движения стратифицированной жидкости, а (4), (5) — с их приближенным видом, известным как приближение Буссинеска [5]. Следует отметить, что в уравнениях (6) величины v_c, w_c не являются компонентами скорости. Однако если ограничиться только видом (6) и граничными условиями непротекания на твердых границах, то v_c и w_c могут формально трактоваться как таковые.

Форма уравнений (4) — (6) дает основание для перенесения как конкретных результатов, так и общих качественных представлений с хорошо изученного случая течений стратифицированной жидкости на движения из класса (2). Для упрощения дальнейших рассуждений, касающихся идеальной жидкости, оси координат y, z выбираются так, чтобы вектор Ω лежал в плоскости x, y . При этом $\Omega_z = 0$ и из (3) вытекает

$$(7) \quad \rho \equiv u + \Omega_2 z, \quad \mathbf{g} = (0, 0, \Omega_2), \quad \Omega_2 = \Omega \sin \theta, \quad \Omega \equiv |\Omega|.$$

Важными примерами являются следующие.

1. Течение (2) частного вида

$$(8) \quad u = u_0(z), \quad v \equiv 0, \quad w \equiv 0$$

в терминах (4) — (6) эквивалентно состоянию гидростатического равновесия с плотностью $\rho(z) = u_0(z) + \Omega_2 z$. «Архимедова» устойчивость (неустойчивость) этого равновесия определяется знаком выражения

$$(9) \quad F = F(\theta, \alpha) \equiv g \rho_z = \Omega^2 \sin \theta (\alpha + \sin \theta),$$

где $\alpha \equiv u_{0z}/\Omega$. Областью определения функции $F(\theta, \alpha)$ является полоса $0 \leq \theta \leq \pi, -\infty < \alpha < +\infty$ (см. фигуру). Равенство $F = 0$ имеет место на границах полосы $AA'(\theta = 0), BB'(\theta = \pi)$ и на кривой OCO' ($\alpha = -\sin \theta$). Области $F > 0$ и $F < 0$ расположены правее и левее кривой OCO' соответственно. Знакопеременность F означает, что все движения (8), по крайней мере локально, расщепляются на три качественно различные группы. При $F > 0$ имеется убывание, при $F < 0$ — нарастание «плотности» ρ «вверх». Равенство $F = 0$ соответствует нейтральной «стратификации» $\rho = \text{const}$. Если во всем течении $F > 0$, то в классе возмущений (2) поток устойчив, малые возмущения имеют вид внутренних волн. В противоположном случае $F < 0$ поток неустойчив, возмущения развиваются в «конвективные» движения.

2. Несколько более общее, чем (8), течение

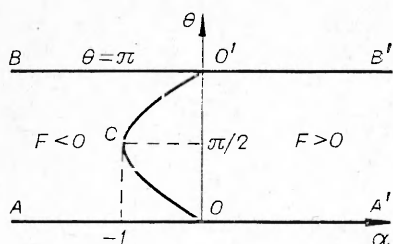
$$(10) \quad u = u_0(z), \quad v = v_0(z), \quad w \equiv 0$$

в терминах (3) — (6) эквивалентно параллельному потоку стратифицированной жидкости со сдвигом скорости. Теория устойчивости таких потоков глубоко разработана [2, 6]. Величина F здесь также играет ключевую роль, представляя собой квадрат частоты Брента — Вэйсяля. В частности, при $F < 0$ имеется течение со сдвигом скорости в условиях неустойчивого по Архимеду «плотностного расслоения».

3. Для более общих полей с $u_y \neq 0$ и $\rho_y \neq 0$, когда последнее означает, что «плотность» ρ изменяется поперек «ускорения силы тяжести» \mathbf{g} , гидростатическое равновесие существовать не может. Поэтому задание начальных данных с $u_y \neq 0, v = w = 0$ всегда будет приводить к нестационарному движению.

Тройственная роль вращения. Весьма распространенными являются качественные представления, согласно которым общее твердотельное вращение жидкости стабилизирующим образом воздействует на любые движения в ней. Под стабилизацией понимается вполне определенное качественное изменение свойств движений при переходе от случая $\Omega = 0$ к $\Omega \neq 0$. Обычно подразумеваются следующие два типа изменений: движения приобретают волновой характер (т. е. появляются внутренние колебательные движения с характерным набором собственных частот); происходит «усиление» свойств устойчивости течений.

Для движений из класса (2) таким представлениям можно придать наиболее ясную трактовку, согласно которой стабилизации соответствует $F > 0$, а дестабилизации $F < 0$. Из фигуры видно, что даже для столь узкого класса движений воздействие вращения может быть качественно



различным и однозначного ответа нет. В то же время представления о стабилизирующей роли вращения имеют под собой некоторую основу. Для пояснения полезно рассмотреть класс точных решений уравнений (4), выражающихся через одну произвольную комплексную функцию $f(y)$:

$$(11) \quad \rho = \Omega_2 [z + \operatorname{Re}(ife^{i\Omega_2 t})], \quad v \equiv \hat{v}, \quad w = \operatorname{Re}(fe^{i\Omega_2 t}), \quad p = \Omega_2^2 z^2.$$

Эти движения состоят в колебаниях «вверх» — «вниз» (вдоль направления g) плоскостей $y = \text{const}$ с частотой Ω_2 . Произвол $f(y)$ означает, что каждая плоскость колеблется независимо от других. В терминах (4) колебания (11) происходят под действием архимедовой силы около положения равновесной плотности. Если в (11) взять $f(y) = Ae^{iky}$, то получаются широко известные волны Бьеркнесов [4, 7, 8], постоянные A и k для которых имеют смысл комплексной амплитуды и волнового числа. Следует отметить, что на решениях (11) нелинейные члены уравнений движения (1), (4) тождественно равны нулю, так что (11) есть решение как точных уравнений движения, так и их линеаризованного варианта. Для линейной задачи волны Бьеркнесов играют фундаментальную роль, поскольку их набор образует полную систему функций, пригодную для представления решения задачи Коши с произвольными начальными данными.

Из сказанного вытекает, что решения (11) дают основания для вывода о стабилизирующем воздействии вращения на любые движения (1) бесконечно малой амплитуды. Впрочем, этот вывод почти очевиден заранее, поскольку движения с амплитудами $\alpha \rightarrow 0$ попадают на отрезок OO' оси $\alpha = 0$ (см. фигуру), на котором $F \geq 0$. На этот же отрезок попадают также все движения конечной амплитуды (11), однако их волновой характер уже не может являться основанием для общего вывода.

Особо выделенными оказались движения с $F = 0$, которым соответствует нейтральная стратификация по «плотности» ρ . Без ограничения общности для них в (4) можно положить $\rho = 0$. Сюда относятся все движения (1), поля которых не изменяются вдоль направления вектора Ω . На фигуре им соответствуют прямые $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Замечательным результатом здесь является отсутствие влияния общего вращения на движение. При одних и тех же начальных и граничных условиях течение одинаково во всех вращающихся системах отсчета. Этот результат был впервые получен Тейлором [9].

Таким образом, уже в рамках узкого класса движений (2) общее твердотельное вращение может играть три качественно различные роли, соответствующие стабилизации ($F > 0$), дестабилизации ($F < 0$) и полному отсутствию влияния на движения жидкости ($F = 0$). Столь разное воздействие вращения на различные движения — наиболее существенный фактор, ограничивающий сходство эффектов стратификации и вращения. Это ограничение имеет общий характер. В частности, оно есть в задаче устойчивости течений с винтовыми и круговыми линиями тока [10, 11].

Параллельные течения во вращающейся щели. Примером конкретной ситуации, изучение которой сводится к описанию движений (2), является линейная задача устойчивости течения одного направления в щели между двумя параллельными вращающимися плоскостями. Эта задача изучалась как самостоятельная [12], однако большое число утверждений здесь может быть получено простыми переобозначениями в известных результатах для параллельных течений стратифицированной жидкости [2, 6].

В системе координат x, y, z положения плоскостей задаются уравнениями $z = 0$ и $z = H$. Поле скорости основного течения имеет вид (8) с произвольной функцией $u_0(z)$ и является для (4) состоянием покоя с «плотностью» ρ (3), (7). Необходимое и достаточное условие его существования есть $g \times \nabla \rho = 0$. Отсюда следует $\Omega_3 u_{0z} = 0$, т. е. в соответствии с (7) $\Omega_3 = 0$.

Пусть u', v', w', p' — малые возмущения потока, удовлетворяющие линеаризованным на (8) уравнениям (1) и граничным условиям

$$(12) \quad w' = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = H.$$

Линейная задача устойчивости сводится к изучению свойств нормальных волн

$$(13) \quad [u', v', w', p'] = [U(z), V(z), W(z), P(z)]e^{i(kx+ly-\omega t)}.$$

Как основное течение (8), так и возмущения (13) не изменяются вдоль направления вектора $R\mathbf{n} = (l, -k, 0)$, $R^2 \equiv k^2 + l^2$, т. е. принадлежат классу (2). Поэтому изучение свойств (13) эквивалентно задаче устойчивости соответствующего течения стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска. Для преобразования (13) к виду (2) следует совершить поворот системы координат вокруг оси z , введя вместо x, y координаты x_1, y_1 так, чтобы ось x_1 была параллельна n , а ось y_1 — волновому вектору $\mathbf{k} = (k, l, 0)$. В новой системе координат $\mathbf{k} = (0, R, 0)$. Течению (8) в терминах (4), (7) будет соответствовать

$$(14) \quad \rho = (lu_0 + Sz)/R, v_1 = ku_0/R, w_0 \equiv 0, \mathbf{g} = (0, 0, S/R),$$

где $S \equiv \mathbf{k} \cdot \Omega$; v_1 есть y_1 -компонента скорости.

Уравнение для амплитуды $W(z)$ плоскопараллельного течения стратифицированной жидкости (14) имеет известную форму [2, 6]

$$(15) \quad \tau_1^2 (W_{zz} - R^2 W) - R\tau_1 v_{1zz} W - R^2 g_{\rho z} W = 0,$$

где $\tau_1 \equiv -\omega + Rv_1$; $g = S/R$. Подстановка (14) в (15) приводит к уравнению

$$(16) \quad \tau^2 (W_{zz} - R^2 W) - \tau k u_{0zz} W + R^2 F W = 0.$$

Приняты обозначения $\tau \equiv -\omega + ku_0$, $F \equiv -\rho_z g = S(S + lu_{0z})/R$. Величина F в терминах течения стратифицированной жидкости является квадратом частоты Брента — Вьяйсяля.

Решение спектральной задачи (16), (12) для всех k, l дает ответ на вопрос об устойчивости течения. Существование собственного значения ω с $\text{Im} \omega > 0$ означает неустойчивость. В частном случае $k = 0$ имеет место уже рассмотренная эквивалентность задаче устойчивости гидростатического равновесия. Устойчивость (неустойчивость) определяется знаком величины F . При $k \neq 0$ имеются менее сильные результаты. Достаточное условие устойчивости по числу Ричардсона (теорема Майлса — Ховарда [2, 6]) переписывается в форме

$$(17) \quad J \equiv -g\rho_z/(v_{1z})^2 = R^2 F/k^2 u_{0z}^2 \geq 1/4.$$

Прямым перенесением известных результатов [2, 6] может быть получен еще целый ряд утверждений о свойствах задачи (16), (12), включая спектральные оценки, условия устойчивости и неустойчивости и даже результаты для профилей $u_0(z)$ конкретного вида.

Однако следует особо подчеркнуть, что, несмотря на возможность буквального перенесения ряда результатов, задачи устойчивости вращающихся и стратифицированных течений качественно различаются. Это различие выражается в том, что зависимость величины $R^2 F$ в (16), (17) от k и l настолько существенна, что для любого заданного профиля $u_0(z)$ изменением k и l всегда можно добиться нарушения (17) и даже смены знака J и F . Такая ситуация уже разбиралась при обсуждении (9) и фигуры. Выделенным случаем здесь является $\Omega_1 = 0$. При этом знак выражения $R^2 F = l^2 \Omega_2 (\Omega_2 + u_{0z})$ не зависит от k и l .

Простейшим примером, допускающим точное решение, является задача устойчивости линейного профиля $u_0(z) = \kappa z$ с постоянной κ . Уравнение (16) принимает вид

$$(18) \quad \tau^2 (W_{zz} - R^2 W) + R^2 F W = 0,$$

где $\tau = -\omega + k\kappa z$; $R^2 F = S(S + l\kappa)$. Для (18) ставится краевая задача в полупространстве $0 \leq z < \infty$:

$$W(0) = 0, W(z) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty.$$

Величина $J = S(S + l\kappa)/(k\kappa)^2$ в данном случае не зависит от z . При $\Omega_1 \neq 0$ для любой фиксированной величины κ изменением k и l можно добиться любого значения J ($-\infty < J < +\infty$). Критерий (17) дает достаточное условие устойчивости только для гармоник k, l с $J \geq 1/4$.

После замены независимой переменной $\xi = R[z - (\omega/k\kappa)]$ из (18) следует уравнение

$$(19) \quad W_{\xi\xi} + \left\{ \left[\left(\frac{1}{4} - \nu^2 \right) / \xi^2 \right] - 1 \right\} W = 0,$$

где $\nu^2 \equiv (1/4) - J$. Решениями (19) служат функции $W = \sqrt{\xi} Z_\nu(i\xi)$, где Z_ν — произвольная цилиндрическая функция индекса ν .

Аргумент ξ изменяется в комплексной плоскости вдоль луча, выходящего из точки $\xi = -R\omega/k\kappa$ и уходящего на бесконечность ($\text{Re } \xi > 0$) параллельно действительной оси. Этот луч соответствует $0 \leq z < \infty$. Условие затухания на бесконечности отбирает из всех Z_ν функции Макдональда, так что $W = \sqrt{\xi} K_\nu(\xi)$. Теперь остается найти значения ξ , обращающие эту функцию в нуль. Каждый корень даст одно из значений комбинации $-R\omega/k\kappa$. Поскольку точка $\xi = 0$ является для $K_\nu(\xi)$ точкой ветвления, корни нужно искать на листе $|\arg \xi| < \pi$.

Таким образом, структура спектра определяется известными свойствами корней функции Макдональда [13]. В зависимости от значения величины ν реализуется один из трех качественно различных случаев:

1) ν — чисто мнимая величина; $J > 1/4$. Согласно (17), это случай чисто вещественного спектра. И действительно, можно показать, что функция Макдональда чисто мнимого индекса имеет счетное количество нулей при ξ вещественном и положительном. При $J \rightarrow 1/4$ эти корни стягиваются к точке $\xi = 0$;

2) $0 < \nu < 3/2$; $-2 < J < 1/4$. Корней в этом диапазоне нет. Решения в виде (13) с соответствующими k и l отсутствуют;

3) $\nu > 3/2$; $J < -2$. Существуют, по меньшей мере, два комплексно-сопряженных корня с ненулевой мнимой частью. При $\nu = 3/2$ эти корни сливаются в один.

Из сказанного вытекает, что профиль $u_0(z) = \kappa z$ оказывается неустойчивым при любом значении величины κ , причем неустойчивость относится к тому же типу, который реализуется в параллельных потоках стратифицированной жидкости при нарастании плотности вверх. Исключением является уже упоминавшийся особый случай $\Omega_1 = 0$. Здесь $J = l^2 \Omega_2 (\Omega_2 + \kappa) / k^2 \kappa^2$, поэтому в силу сказанного выше поток устойчив при $\Omega_2 (\Omega_2 + \kappa) > 0$ и неустойчив при $\Omega_2 (\Omega_2 + \kappa) < 0$.

Случай ненулевой вязкости. Класс движений (2) в вязкой жидкости может быть несколько расширен путем включения в давление градиента по x : $-p_x^* \equiv q(t)$. Тогда

$$(20) \quad u = u(y, z, t), \quad p^* = p_0(y, z, t) - q(t)x.$$

Соответствующее обобщение уравнений (4) записывается в виде

$$(21) \quad D_1 v = -p_y + \rho g_2, \quad D_1 w = -p_z + \rho g_3, \\ D_1 \rho = q, \quad v_y + w_z = 0, \quad D_1 \equiv D - \nu(\partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2).$$

Вид (21) совпадает с уравнениями стратифицированной жидкости только при $q = 0$. К этому случаю относятся либо течения, происходящие за счет движения границ, либо нестационарные течения. При $q \neq 0$ поля (20) включают в себя, в частности, интересный класс напорных течений во вращающихся цилиндрических трубах с образующей цилиндра, параллельной оси x . Ограничений на форму сечения трубы и угол θ между вектором Ω и образующей не накладывается. Условие прилипания приводит к требованиям на стенках трубы:

$$(22) \quad \rho = \Omega_x z - \Omega_y y, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

После этого описание движения вязкой жидкости во вращающейся трубе сводится к задаче (21), (22) для двумерных течений стратифицированной по плотности жидкости. Последняя задача весьма необычна, поскольку в ней фигурируют источники «плотности» ρ и задаются значения ρ на границах. Более естественная интерпретация (21), (22) достигается посредством замены «плотности» ρ на «температуру» T (т. е. введением уравнения состояния $\rho = T$). В результате на границах окажется заданным распределение «температуры» T , а уравнения $D_1 T = q$ и $v_y + w_z = 0$ будут соответствовать наличию «источников тепла», изменяющих «температуру» и «плотность» без расширения (или сжатия) жидкости.

Для задачи (21), (22) очевидными как математически, так и физически являются следующие утверждения:

1) при $q = 0$ единственным стационарным решением является $\rho = \Omega_3 z - \Omega_3 y$, $v = w = 0$ (твердотельное вращение жидкости);

2) при $q = \text{const} \neq 0$ стационарных решений с $v = w = 0$ (отвечающих чисто продольному течению по трубе) не существует. Реализуются неоднократно наблюдавшиеся [14, 15] течения с поперечными циркуляциями. Физическая причина таких циркуляций в терминах (21) состоит в том, что «тяжелая» жидкость тонет, а «легкая» — всплывает.

В теории стратифицированных жидкостей и в теории конвекции постановка типа (21), (22) является искусственной и не рассматривалась. Поэтому наличие вязкости, вообще говоря, кладет предел плодотворному применению изучаемой аналогии. В то же время для задач устойчивости такого ограничения нет. Действительно, линеаризованные уравнения (21), (22) совпадают с соответствующей линейной задачей устойчивости вязкой стратифицированной жидкости с диффузией плотности.

Течения Экмана. Простейшим вариантом задачи (21), (22) является напорное течение в щели между двумя параллельными плоскостями. Система декартовых координат x, y, z вводится так, что положению плоскостей соответствует $z = 0$ и $z = H$. Градиент приложенного давления постоянен и направлен вдоль оси x : $p_x = -q = \text{const}$. В плоскости y, z область течения есть полоса $0 < z < H$. Вектор Ω_n есть проекция Ω на плоскость y, z . «Поле тяжести» $g = (0, -\Omega_3, \Omega_2)$ перпендикулярно к Ω_n . Соответствующее стационарное решение (21), (22) выписывается в явном виде.

Поскольку поле g имеет ненулевую касательную к плоскостям составляющую, то естественно ожидать наличие течения со скольжением слоев

$$(23) \quad v = v(z), \quad w \equiv 0, \quad \rho = -\Omega_3 y + \Omega_2 z + u(z),$$

которое представляет собой движение жидкости «вниз» под действием «силы тяжести». В поперечном направлении (вдоль оси z) «сила тяжести» уравновешена градиентом давления. Подстановка (23) в (21), (22) приводит к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \nu u_{zz} + \Omega_3 v + q &= 0, \quad \nu v_{zz} + \Omega_3 u = 0, \\ u = v &= 0 \quad \text{при } z = 0, \quad z = H. \end{aligned}$$

Решение этой задачи довольно громоздко и выписываться не будет. Его вид упрощается при $H \rightarrow \infty$:

$$(24) \quad u = \frac{q}{\Omega_3} e^{-kz} \sin kz, \quad v = -\frac{q}{\Omega_3} (1 - e^{-kz} \cos kz).$$

Здесь $k \equiv \sqrt{\Omega_3/2\nu}$. Представления (23), (24) показывают, что компонента скорости u , направленная вдоль градиента давления, быстро затухает по мере удаления от стенки, в то же время поперечная компонента v нарастает. В результате основной поток жидкости (в достаточно широком канале) оказывается направленным поперек приложенного градиента давления.

Таким образом, формулировка уравнений (1) в терминах (21), (22) позволяет составить наглядное представление о механике течения Экмана. Это течение оказывается эквивалентным движению стратифицированной жидкости в щели между двумя наклоненными (к полю тяжести) плоскостями. Одновременно могут быть сформулированы содержательные гипотезы о свойствах устойчивости такого течения. Именно знак величины $\rho_z g_3$ указывает на увеличение или уменьшение «плотности» вдоль поперечной к пластинкам составляющей g . Для (24) получается

$$(25) \quad \rho_z g_3 = \Omega_2 (\Omega_2 - u_z) = \Omega_2^2 \left[1 - \frac{kq}{\Omega_2 \Omega_3} e^{-kz} (\cos kz - \sin kz) \right].$$

Для $q/\Omega_2 \Omega_3 > 0$ наименьшее значение (25) достигается при $z = 0$. Поэтому при достаточно больших перепадах давления ($q > \Omega_2 \Omega_3 / k \equiv \Omega_2 \sqrt{2\nu \Omega_3}$) возникает слой жидкости, в котором «плотность» нарастает «вверх» и возможна «конвективная» неустойчивость.

Эффекты нетвердотельного вращения. Выше при изучении эффектов твердотельного вращения проводилось искусственное разделение между вращением жидкости как целого и ее внутренними движениями. Изучалось воздействие первого движения на последние. Такой подход является весьма специальным. Естественный следующий шаг состоит в изучении эффектов вращения, отличающегося от твердотельного, без разделения движения на какие-либо части. В качестве примера такого более общего подхода будет рассмотрен класс движений с винтовой симметрией.

Вводится цилиндрическая система координат φ, r, z , компоненты вектора скорости в которой суть u, v, w соответственно. Исходная система уравнений движения имеет вид

$$(26) \quad \begin{aligned} Du + uv/r &= -p_\varphi / r \rho_1, \quad Dv - u^2/r = -p_r / \rho_1, \\ Dw &= -p_z / \rho_1, \quad v_r + v/r + u_\varphi / r + w_z = 0, \quad D\rho_1 = 0, \\ D &\equiv \partial/\partial t + v\partial/\partial r + (u/r)\partial/\partial\varphi + w\partial/\partial z, \end{aligned}$$

где ρ_1 — плотность жидкости. Пусть сначала $\rho_1 \equiv 1$. Изучаемые движения с винтовой симметрией характеризуются тем, что отвечающие им решения (26) есть функции трех независимых переменных t, r и $\mu \equiv a\varphi - bz$. Здесь a — любое натуральное, b — любое вещественное числа.

Используя обозначения $\rho \equiv (bru + aw)^2$, $\lambda \equiv au - brw$, $R \equiv a^2 + b^2 r^2$, $g \equiv b^2 r / R^2$, $K \equiv 2ab / R^2$, можно уравнения (26) для движений с винтовой симметрией преобразовать к виду

$$(27) \quad \begin{aligned} D_\mu(r\lambda/R) + K\sqrt{\rho}v &= -p_\mu, \quad D_\mu v - K\sqrt{\rho}\lambda - \\ &- (a\lambda/R)^2/r = -p_r + \rho g, \\ D_\mu \rho &= 0, \quad v_r + v/r + \lambda_\mu/r = 0, \quad D_\mu \equiv \partial/\partial t + \\ &+ v\partial/\partial r + (\lambda/r)\partial/\partial\mu. \end{aligned}$$

Эта система похожа на уравнения движения стратифицированной жидкости. Сходство заключается в существовании динамического аналога плотности ρ , сохраняющейся в каждой жидкой частице, и в виде силы ρg в правой части второго уравнения. В то же время имеются существенные отличия, основное из которых состоит в наличии членов с множителем K . Структура этих членов напоминает кориолисову силу. Сразу возникает вопрос, можно ли систему (27) считать аналогичной уравнениям движения стратифицированной жидкости. Ответ на него сводится к определению степени сходства, которую можно объявлять аналогией.

В двух частных случаях ответ очевиден. Так, $a = 0$ соответствует классу вращательно-симметричных движений, для которых (27) сводится к форме

$$(28) \quad \begin{aligned} Dv &= -p_r + \rho g, \quad Dw = -p_z, \quad D\rho = 0, \quad v_r + v/r + \\ &+ w_z = 0, \quad D \equiv \partial/\partial t + v\partial/\partial r + w\partial/\partial z, \end{aligned}$$

где $g = 1/r^3$; $\rho = (ru)^2$; без ограничения общности выбрано $b = -1$. Система (28) совпадает с уравнениями стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска с направленным по радиусу полем массовых сил. Поэтому выводы о степени сходства эффектов стратификации и вращения для вращательно-симметричных движений практически повторяют результаты для (4)–(6). Аналогом величины F (9) в (28) является

$$F_1 = \varepsilon_{117} = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (ru)^2 = 2u\Omega/r,$$

где $\bar{\Omega}$ — осевая компонента вектора завихренности $\Omega \equiv u_r + u/r$. Условие $F_1 > 0$, означающее «архимедову» устойчивость состояния покоя ($v \equiv 0, w \equiv 0$), широко известно под названием критерия устойчивости Рэлея [1, 4, 7]. При $a = 1, b = 0$ движения, описываемые (27), являются плоскими, не зависящими от координаты z . Член с массовой силой rg для них равен нулю. Эти движения уже рассматривались в качестве случая $F = 0$ в (4), (9).

В общем случае произвольных a и b полезно выписать выражения для завихренности. Пусть η, ω_1, ω_2 есть компоненты вихря по направлениям радиуса, $\mu = \text{const}$ и по направлению, перпендикулярному к ним. Справедливы представления

$$(29) \quad \omega_1 = \sqrt{R}(\omega_0 + K\sigma), \quad \omega_2 = -\sigma_r/\sqrt{R}, \quad \eta = \sigma_\mu/r,$$

$$\omega_0 = (1/r)[(r\lambda/R)_r - v_\mu], \quad \sigma \equiv \sqrt{\rho}.$$

Из первых двух уравнений (27) после исключения давления вытекает соотношение

$$(30) \quad D_\mu \omega_0 + \left(v_0 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) K \sqrt{\rho} + \frac{v^2}{R^2} \rho_\mu = 0,$$

являющееся аналогом (5).

Особенно интересен вопрос о качественной роли величины ρ в (27), (30). Исследование общего случая здесь весьма сложно. В то же время существование при $\rho \neq \text{const}$ волновых движений (вещественных собственных частот) в линейном приближении широко известно. Что же касается свойств движений в точной постановке (27), то можно увидеть, что, по крайней мере, потоки с $\rho = \text{const}$ очень похожи на не возвращающиеся течения однородной жидкости. Тут следует отметить, что течения с $\rho = \text{const}$ в силу уравнения $D_\mu \rho = 0$ образуют самостоятельный класс. Поскольку величина $\sigma \equiv \sqrt{\rho}$ определена с точностью до постоянной, то случай $\rho = \text{const}$ сводится к $\rho = 0$ после перехода в соответствующую систему отсчета, движущуюся с постоянной скоростью вдоль оси z . Уравнения (27), (30) показывают, что потоки с $\sigma = 0$ эквивалентны уже обсуждавшимся с $b = 0$. В частности, уравнение (30) при $\rho = 0$ вырождается в условие типа сохранения завихренности в каждой жидкой частице. При этом, согласно (29), потоки с $\rho = 0$ имеют единственную ненулевую компоненту завихренности ω_1 .

Вывод из изложенного в этом пункте можно сформулировать в виде двух положений. Во-первых, наличие винтовой симметрии (в отличие от движений (2)) не позволяет свести описание движений вращающейся жидкости к стратифицированной. Тем не менее уравнения (27), (30) для движений с винтовой симметрией весьма похожи на уравнения стратифицированной жидкости. Во-вторых, величина ρ в (27), (30) играет роль плотности в более широком смысле: при $\rho = \text{const}$ внутренние волновые движения отсутствуют, в то время как при $\rho \neq \text{const}$ они, вообще говоря, есть.

Ослабление требований к аналогии. Пусть теперь в (26) истинная плотность $\rho_1 \neq \text{const}$. Точным решением (26) является течение с винтовыми линиями тока:

$$(31) \quad u = u_0(r), \quad v \equiv 0, \quad w = w_0(r), \quad \rho_1 = \rho_0(r).$$

Рассматриваются возмущения малой амплитуды, удовлетворяющие системе линеаризованных на (31) уравнений (26). Задача сводится к изучению возмущений в виде нормальных волн:

$$(32) \quad v'(r, \varphi, z, t) = \operatorname{Re} V(r) e^{i(kz + m\varphi - \omega t)}.$$

Здесь $V(r)$ — комплексная амплитудная функция. После подстановки представлений типа (32) для возмущений u', v', w', p', ρ_1 в (26) и ряда преобразований может быть получено уравнение для одной функции $\psi(r) \equiv rV(r)$ [10]:

$$(33) \quad \tau^2 \left[\psi_{rr} + \left(\frac{1}{r} - \beta - \beta_1 \right) \psi_r - R\psi \right] + R\bar{F}_2\psi + \left\{ \frac{m}{r} [-\Omega_r + (\beta + \beta_1)\Omega] - k \left[\frac{1}{r} (rw_{0r})_r - (\beta + \beta_1) w_{0r} \right] \right\} \tau\psi = 0,$$

где $\tau \equiv -\omega + m(u_0/r) + kw_0$; $R \equiv k^2 + (m^2/r^2)$; $\rho \equiv (m^2 + k^2r^2)^{-1}$; $\beta \equiv -\rho_r/\rho$; $\beta_1 \equiv -\rho_{1r}/\rho_1$; $\Omega \equiv u_{0r} + u_0/r$; $F_2 \equiv \beta G + \beta_1 G_1$; $G \equiv u_0 (\Omega - mw_{0r}/kr)$; $G_1 \equiv u_0^2/r$. Замечательным свойством уравнения (33) является то, что величины, связанные со стратификацией и вращением, входят в коэффициенты симметричным образом. Формально введенные величины ρ , G входят в уравнение так же, как плотность ρ_1 и центробежное «поле тяжести» G_1 . Обобщением частоты плавучести (Брента — Вьясяля) [2, 6] в (33) является величина $\sqrt{F_2}$.

Граничные условия непротекания для течения между коаксиальными круговыми цилиндрами радиусов R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) имеют вид

$$(34) \quad \psi(R_1) = \psi(R_2) = 0.$$

Задача (33), (34) является спектральной на определение собственных значений ω и собственных функций $\psi(r)$. Наличие собственного значения с $\operatorname{Im}\omega > 0$ означает неустойчивость потока.

Для задачи (33), (34) справедливо утверждение, обобщающее известную теорему Майлса — Ховарда [2, 6]. Достаточное условие устойчивости (вещественности спектра ω) — выполнение неравенства [10, 16]

$$J \equiv \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) F_2 \left[kw_{0r} + m \left(\frac{u_0}{r} \right)_r \right]^2 \geq 1/4,$$

где J — обобщение числа Ричардсона.

Следует подчеркнуть, что в отличие от ρ_1 и G_1 их аналоги ρ и G оказались зависящими от вида возмущения. Поэтому аналогия имеет место только для каждой фиксированной пары волновых чисел k, m . Ситуация здесь напоминает уже обсуждавшуюся (14).

Наиболее сильный результат получается для вращательно-симметричных возмущений ($m = 0$). В этом случае из (33) следует эквивалентность воздействия на возмущения стратификации и вращения, под которой понимается возможность замены вращения плотностным расслоением (и наоборот) без изменения вида уравнения. Это утверждение является частным случаем приведения полных нелинейных уравнений движения к форме (28). В общем случае такой эквивалентности нет, и на основании (33) можно говорить только о сходстве воздействий на возмущения стратификации и вращения. При этом зависимость G от k и m настолько существенна, что одни и те же поля $u_0(r), w_0(r)$ для различных возмущений соответствуют различным знакам G (ср. с (9), (14), (17)).

Как течения (34), так и возмущения (32) принадлежат классу движений с винтовой симметрией (см. предыдущий пункт). Однако между формами демонстрации аналогии (27) и (33) имеется существенная разница. В частности, величины ρ и G в (33) не совпадают с ρ и g в (27). Единственная цель, преследовавшаяся при введении ρ и G в (33), состояла в достижении наибольшей симметрии в виде уравнения (33). При переписывании (33) в терминах обозначений (27) столь сильной симметрии достигнуть не

удается. В то же время видно, что формы аналогии (27) и (33) качественно близки. Так, схожими являются аналоги частот плавучести ρ, g в (27) и βG в (33). В частности, $\rho \equiv 0$ в (27) эквивалентно $G \equiv 0$ в (33).

Таким образом, ослабленный по жесткости предъявляемых требований подход (33) позволяет найти более плодотворные варианты аналогии. Целый ряд конкретных результатов, полученных на основе (33), приведен в [10, 11, 17, 18].

В заключение следует отметить, что все рассмотренные выше движения вращающейся жидкости обладают высокой степенью симметрии. Чрезвычайно интересный вопрос о том, насколько далеко распространяется область применимости аналогии на вихревые движения более общего вида, остается открытым. Попыткой ответа на этот вопрос является работа [19], в которой обобщается так называемая теорема Тейлора — Праудмена, имеющая близким аналогом известный эффект блокирования в стратифицированной жидкости [2]. К сожалению, такое обобщение получено только для узких классов вихревых потоков.

Автор выражает благодарность Л. В. Овсянникову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958.
2. Yih C. S. Stratified Flows. N. Y.: Acad. Press, 1980.
3. Veronis G. The analogy between rotating and stratified fluids.— Ann. Rev. Fluid Mech., 1970, v. 2.
4. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоиздат, 1975.
5. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1980.
6. Drazin P. G., Howard L. N. Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid.— Adv. Appl. Mech., 1966, v. 9.
7. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961.
8. Phillips O. M. The energy transfer in rotating fluids by reflection of inertial waves.— Phys. Fluids, 1963, v. 6, p. 513.
9. Taylor G. I. Motion of solids in fluids when the flow is not irrotational.— Proc. Roy. Soc., 1917, A, v. 43, p. 99.
10. Владимиров В. А., Тарасов В. Ф. Об упругости закрученных потоков.— ДАН СССР, 1980, т. 253, № 3.
11. Владимиров В. А. Устойчивость течения типа смерча.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 42. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1979.
12. Johnston J. A. The stability of shearing motion in a rotating fluid.— J. Fluid Mech., 1963, v. 17, N 3.
13. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949.
14. Кузьминский А. В., Смирнов Е. М., Юркин С. В. Продольно ориентированные ячеистые структуры типа вихрей Тейлора — Гёртлера на стороне повышенного давления вращающихся каналов.— ПМТФ, 1983, № 6.
15. Смирнов Е. М., Юркин С. В. О течении жидкости по вращающемуся каналу квадратного поперечного сечения.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 6.
16. Howard L. N., Gupta A. S. On the hydrodynamic and hydromagnetic stability of swirling flows.— J. Fluid Mech., 1962, v. 14, N 3.
17. Владимиров В. А. Устойчивость течений идеальной жидкости с круговыми линиями тока.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 42. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1979.
18. Никулин В. В. Об устойчивости закрученных потоков идеальной жидкости.— ПМТФ, 1981, № 3.
19. Владимиров В. А. Аналогии теоремы Тейлора—Праудмена в течениях со сдвигом скорости.— ПМТФ, 1980, № 6.

Поступила 22/III 1984 г.