

Физический смысл увеличения максимального переохлаждения ΔT с ростом давления p (или температуры в точке росы) заключается в следующем. Как видно из аналитического решения, скачок конденсации происходит в той точке, где выполняется условие $j_* = r$. Параметр r с увеличением давления падает, поскольку кластеры всё меньших размеров будут отвечать пределу высоких давлений. Величина j_* зависит от T и p , а в точке Вильсона (точке максимального переохлаждения) — только от p . Дифференцируя условие $j_* = r$ в точке Вильсона по p с учетом соотношения $dr/dp < 0$, можно получить, что $\partial\Delta T/\partial p > 0$.

Соответствующий бимодальности функции распределения кластеров по размерам максимум появляется в теории при $j_{*,cl} < r$. Его нельзя отождествить с подобным экстремумом, обнаруженным при численном решении уравнений модели Сцилларда [9], так как этот экстремум находится в точке $j = r$ (r слабо зависит от времени), тогда как описанный в [9] достаточно быстро уходит на бесконечность с течением времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Ю. И. Кластеры и малые частицы. — М.: Наука, 1986.
2. Богданов А. В., Горбачев Ю. Е., Дубровский Г. В. и др. Аналитическое исследование равновесных и квазистационарных решений квазихимической модели конденсации // Хим. физика. — 1989. — Т. 9, № 5.
3. Куснер Ю. С., Приходько В. Г., Симонова Г. В., Фирстов В. Е. О механизме гомогенной конденсации при быстром адиабатическом расширении газа // ЖТФ. — 1984. — Т. 54, № 9.
4. Иткин А. Л., Колесниченко Е. Г. О роли неравновесности в кинетике конденсации // ДАН СССР. — 1990. — Т. 311, № 3.
5. Горбунов В. Р., Пирумов У. Г., Рыжков Ю. А. Неравновесная конденсация в высокоскоростных потоках газа. — М.: Машиностроение, 1984.
6. Иткин А. Л., Колесниченко Е. Г. О причинах влияния газа-носителя на кинетику конденсации // Письма в ЖТФ. — 1989. — Т. 12, вып. 7.
7. Коробицын Б. А., Чуканов В. Н. Влияние концентрации газа-носителя на кинетику гомогенной нуклеации в пересыщенном паре // Тр. 9-й Всесоюз. конф. по ДРГ. — Свердловск. — 1988. — Т. 2.
8. Yamada I., Usui H., Takagi T. The formation and kinetics of ionized cluster beams // Z. Phys. D. — Atoms, Molecules and Clusters. — 1986. — N 3.
9. Биндер К. Кинетика расслоения фаз // Спиретика. — М.: Мир, 1984.

г. Москва

Поступила 24/II 1989 г.,
в окончательном варианте — 28/III 1990 г.

УДК 532.529

О. Вайн

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОДИФфуЗИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ТРЕНИЯ В МИКРОДИСПЕРСНЫХ ЖИДКОСТЯХ. ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИФфуЗИОННОГО СЛОЯ

1. **Введение.** В приближении концентрационного пограничного слоя приведено решение задачи о массообменном датчике трения для довольно общего класса профилей скорости. Обсуждается вопрос определения пристенных профилей скорости по данным измерений предельных диффузионных токов.

При электродиффузионном (ЭД) измерении трения в ньютоновских жидкостях [1] безразлично, как интерпретируются результаты: в виде касательных напряжений при стенке τ или соответствующих скоростей сдвига γ . По-другому обстоит дело при ЭД-измерениях в глинистых суспензиях, полимерных растворах и других микродисперсных жидкостях [2], у которых часто наблюдаются аномальные пристенные эффекты. С точки зрения конвективной диффузии это выражается в том, что профили скоростей в непосредственной близости от стенки нельзя считать линейными. В таких случаях необходимо при обработке первичных данных по предельным диффузионным токам понимать полный ток датчика I как некоторый функционал отклика, аргу-

ментами которого служат профиль скорости $v_x = u(z)$ внутри диффузионного слоя датчика и существенный параметр — длина датчика вдоль потока жидкости h . В этой связи одновременное измерение предельных диффузионных токов на совокупности датчиков разной длины оказалось самым эффективным способом ЭД-изучения тонкой структуры пристенного профиля скоростей в микродисперсных жидкостях [3, 4]. Допустим теперь, что ЭД-измерения такого рода проведены для жидкостей с известным и постоянным коэффициентом диффузии D применяемого ЭД-деполяризатора. С математической точки зрения вопрос об обработке данных состоит в следующем.

На некотором диапазоне длин датчиков h известна функция $\delta = \delta(h)$, где средняя диффузионная толщина δ определена из первичных опытных результатов: $\delta = nFc_0DA/I$ (nF — молярный заряд электрохимической реакции, c_0 — исходная концентрация деполяризатора, A — площадь датчика). Требуется отыскать оператор $\delta(h) \rightarrow u(z)$, который преобразует данные по $\delta = \delta(h)$ в информацию о пристенном профиле скорости $u = u(z)$ (z — расстояние к поверхности датчика).

2. Задача о датчике трения. Несложно поставить задачу, для которой задача о построении оператора $\delta(h) \rightarrow u(z)$ является обратной. Она состоит в решении параболического уравнения

$$(2.1) \quad u(z) \partial_x c = D \partial_{zz}^2 c$$

с граничными условиями предельного тока на поверхности датчика:

$$(2.2) \quad c|_{z=0} = 0 \quad \text{для } (x, y) \in A;$$

условием инертности стенок, окружающих датчик:

$$(2.3) \quad \partial_z c|_{z=0} = 0 \quad \text{для } (x, y) \notin A,$$

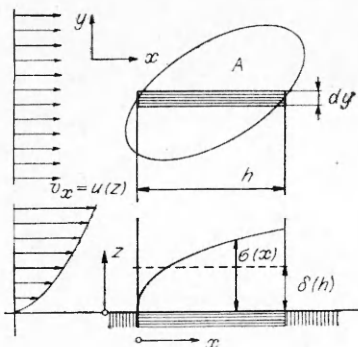
условием неисчерпаемости деполяризатора из раствора:

$$(2.4) \quad c \rightarrow c_0 \quad \text{для } z \rightarrow \infty.$$

Решением задачи будут трехмерное поле концентраций $c = c(z; x, y)$ и соответствующий полный ток $I = nF \int_A j(x, y) dx dy$, где j — локальная плотность диффузионного тока к поверхности датчика: $j = -D \partial_z c|_{z=0}$.

При расчете локальных плотностей тока исходную трехмерную задачу можно считать двумерной, так как трансверсальная координата является несущественным параметром в рассматриваемой параболической краевой задаче, в которой влиянием продольной и боковой диффузии пренебрегается. Постановка двумерной задачи видна из рисунка. Для элементарной полоски $h \times dy$ можно продольную координату x сдвинуть так, что ее начало совпадает на рассматриваемой пристенной линии тока ($y = \text{const}$) с передней кромкой датчика. Соответствующая двумерная краевая задача состоит из дифференциального уравнения (2.1) с граничными условиями (2.2), (2.4) на интервале $0 < x < h$ и с начальным условием $c \rightarrow c_0$ для $x \rightarrow 0$ при $z > 0$, заменяющим условия (2.3) и (2.4) для $x < 0$.

Из определенного поля концентраций можно вычислить локальную диффузионную толщину σ или локальную плотность диффузионного тока к стенке j : $j(x) = -D \partial_z c|_{z=0} = Dc_0/\sigma(x)$, а далее среднюю плотность $J(h)$ или среднюю диффузионную толщину $\delta(h)$ на элементарной полоске:



$$J(h) = h^{-1} \int_0^h j(x) dx = Dc_0 h^{-1} \times$$

$$\times \int_0^h \sigma^{-1}(x) dx = Dc_0/\delta(h).$$

Макроскопические средние величины $J(h)$, $\delta(h)$ можно для полосового датчика трения считать непосредственно определенными из первичных данных.

3. Автономные решения, локально-автономные приближения. Подстановка новых переменных $c(z, x) = c_2 F(\xi, \sigma)$, $\xi = z/\sigma(x)$ сводит задачу к виду

$$(3.1) \quad F'' + \frac{d\sigma}{dDx} \sigma u(\sigma\xi) \xi F' = \frac{d\sigma}{dDx} \sigma^2 u(\sigma\xi) \partial_\sigma F;$$

$$(3.2) \quad F(0, \sigma) = 0, F(\infty, \sigma) = 1, F'(0, \sigma) = 1,$$

где F' , F'' — частные производные по ξ . Задача явно некорректна, поскольку отсутствуют начальные условия при $\sigma \rightarrow 0$, т. е. $x \rightarrow 0$. В таких случаях в теории пограничного слоя общепринято добавлять условие локальной автономности при $x \rightarrow 0$:

$$(3.3) \quad \partial_\sigma F(\xi, \sigma) \rightarrow 0 \quad \text{для } \sigma \rightarrow 0.$$

Вообще локально-автономное приближение состоит в пренебрежении членом с правой стороны уравнения (3.1), т. е. в предположении, что $\partial_\sigma F(\xi, \sigma) = 0$. С этим упрощением можно получить явное выражение поля концентрации

$$F'(\xi, \sigma) = \exp\left[-\frac{d\sigma}{dDx} \sigma \int_0^\xi u(\sigma t) t dt\right], \quad F(\xi, \sigma) = \int_0^\xi F'(s, \sigma) ds$$

с неявным интегродифференциальным уравнением для искомой диффузионной толщины:

$$(3.4a) \quad F(\infty, \sigma) = 1 = \int_0^\infty \exp\left[-\frac{d\sigma}{dDx} \sigma \int_0^s u(\sigma t) t dt\right] ds$$

или

$$(3.4b) \quad \sigma = \int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{xD} \frac{d \ln \sigma}{d \ln x} \int_0^z u(z_1) z_1 dz_1\right] dz.$$

В частном случае представления профилей скорости степенной функцией

$$(3.5) \quad u(z) = Bz^p,$$

рассматриваемого в [3, 4], можно из (3.4b) вывести представление функции $\sigma = \sigma(x)$ в неявном виде

$$(3.6) \quad xD = B(2+p)^{-2} \left[\frac{\sigma}{\Gamma} \left(\frac{3+p}{2+p} \right) \right]^{(2+p)}$$

и соответствующее представление для средней диффузионной толщины

$$(3.7) \quad \delta(h) = \frac{1+p}{2+p} \sigma(h) = \frac{1+p}{2+p} \Gamma \left(\frac{3+p}{2+p} \right) \left[\frac{(2+p)^2 hD}{B} \right]^{1/(2+p)}.$$

4. Точные неавтономные решения, принцип суперпозиции. Методом локальной автономности (3.4) находится точное решение только для степенных профилей скорости. В других случаях выгодно решать параболическую задачу (3.1)–(3.3) с неизвестной собственной функцией $\sigma = \sigma(x)$. Расчеты этого рода опубликованы для общего линейного профиля $u(z) = U + \gamma z$ в [5]. Получены были также результаты для класса профилей $u(z) = \sum B_p z^p$ для трех членов суммы: $0 \leq p_1 < p_2 < p_3 \leq 2$, $B_1 > 0$, $B_2 \neq 0$. Во всех случаях точность функций $\sigma = \sigma(x)$ оценивается 5–6 значащими цифрами для σ при определенном x . Результаты (с точностью до 3–4 значащих цифр для σ) оказалось возможным свести к неожиданно простым обобщающим выводам, представляемым следующим эмпирическим принципом суперпозиции.

Для класса профилей скорости $u = u(z)$, которые являются неубывающими функциями, зависимость $x = x(\sigma)$ представим в виде линейного функционала скорости с параметром σ :

$$Dx = \Phi[u(z); \sigma], \quad \Phi[B_1 u_1(z) + B_2 u_2(z); \sigma] = B_1 \Phi[u_1(z); \sigma] + B_2 \Phi[u_2(z); \sigma].$$

Полезность приведенного заключения состоит, например, в том, что для класса степенных профилей $u_p(z) = B_p z^p$ известно явное представление функционала Φ уравнением (3.6).

5. Локализация функционала для средних диффузионных толщин. Уравнение (3.7) запишем в виде $B(\alpha\delta)^p = u(\alpha\delta) = \psi(p, \alpha)hD/\delta^2$, где $\psi(p, \alpha) = \alpha^p (2+p)^2 \left[\frac{1+p}{2+p} \Gamma\left(\frac{3+p}{2+p}\right) \right]^{2+p}$.

При частном выборе $\alpha = 0,414$ значение ψ удовлетворяет условию $\psi(0, \alpha) = \psi(1, \alpha) = 0,785$, для $0 \leq p \leq 1$ сохраняет почти постоянное значение $0,78 < \psi < 0,83$. В результате для класса степенных профилей скорости при $0 \leq p \leq 1$ проверена эмпирическая формула

$$(5.1) \quad u(z)|_{z=0,4\delta} = 0,8hD/\delta^2,$$

согласно которой средний диффузионный ток датчика трения зависит от локального значения скорости на расстоянии $z = 0,4\delta$ до стенки.

В рамках приведенной точности (до $\pm 5\%$) формула (5.1) применима для более общего класса профилей скорости. В частности, для линейного профиля скорости $u(z) = U + \gamma z$ из принципа суперпозиции вытекают следующие представления:

$$Dh/\sigma^2 = \frac{U}{4\Gamma^2(3/2)}(1+b), \quad \delta = \frac{1}{2}\sigma(1+b)/(1+0,75b),$$

причем $b = 0,49\gamma\sigma/U$ и $\sigma = \sigma(h)$, $\delta = \delta(h)$. Отношение $u(0,4\delta)\delta^2/(0,8hD) = (1+0,56b)(1+b)/(1+0,75b)^2$ не отклоняется от единицы более чем на 2%.

6. Выводы. Принцип локализации, который здесь приведен для полосового датчика, сохраняет силу с теми же численными коэффициентами также для других форм датчика. В частности, для кругового датчика радиусом R формула (5.1) справедлива при подстановке $h = 1,64R$. Формулу (5.1) можно считать эмпирическим представлением обратного оператора $\delta(h) \mapsto u(z)$ в задаче о датчике трения. Учитывая ее, интерпретируем степенное представление профиля скоростей (3.5) следующим образом:

$$(6.1) \quad p = \frac{d \ln u}{d \ln z} \Big|_{z=0,4\delta} = \frac{d \ln h}{d \ln \delta} - 2;$$

$$(6.2) \quad B = (u(z)/z^p) \Big|_{z=0,4\delta} = \frac{0,8hD}{0,41^p \delta^{2+p}}.$$

Формулы (5.1), (6.1), (6.2) можно непосредственно применять при обработке электродиффузионных данных для микродисперсных жидкостей, у которых наблюдаются эффекты пристенного скольжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Накоряков В. Е., Бурдуков А. П., Капшинский О. Н., Гешев П. И. Электродиффузионный метод исследования локальной структуры турбулентных течений. — Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1986.
2. Покрываило Н. А., Вайн О., Ковалевская Н. Д. Электродиффузионная диагностика течений в суспензиях и полимерных растворах. — Минск: Наука и техника, 1988.
3. Wein O., Mitschka P., Tovchigrechko V. V. et al. Diagnostics of slip effects in non-Newtonian media via electrochemically driven transient convective diffusion // Chem. Eng. Commun.— 1985.— V. 32.— P. 153.
4. Wein O., Tovchigrechko V. V., Pokryvaylo N. A. Wall effects in non-Newtonian fluids // Progress and Trends in Rheology II, Suppl. to Rheol. Acta.— 1988.— V. 26.— P. 332.
5. Wein O., Kucera P. On the convective diffusion under partial slip at wall // Collect. Czech. Chem. Commun.— 1989.— V. 54.— P. 967.

г. Прага

Поступила 6/II 1990 г.