

УДК 532.5, 533.6

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ВОКРУГ ТРЕХ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

Дж. Алинеджад

Отделение Сари Исламского университета Азад, Сари, Иран  
E-mail: Alinejad\_javad@iausari.ac.ir

С использованием сеточных уравнений Больцмана моделируется процесс теплообмена в течении за тремя эллиптическими или круглыми цилиндрами при изотермическом граничном условии. Также с использованием сеточных уравнений Больцмана и тепловой модели столкновения Бхатнагара — Гросса — Крука при  $30 \leq Re \leq 100$ ,  $Pr = 0,71$  моделируется двумерная вынужденная конвекция. Получены распределения давления, изотермы и линии тока, а для ряда случаев — вихревые дорожки. Показано, что полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными и численными данными.

Ключевые слова: метод сеточных уравнений Больцмана, изотермические цилиндры, вихревая дорожка, число Рейнольдса.

DOI: 10.15372/PMTF20160113

**Введение.** Решение задачи о вынужденной конвекции в течении жидкости за цилиндрами является важным направлением теоретических и прикладных исследований [1–3]. Изучение течений за телами с плохо обтекаемой формой составляет важный класс задач гидроаэромеханики. Одним из таких тел является эллиптический цилиндр, обтекание которого зависит от соотношения размеров и угла атаки [4]. (Заметим, что эллиптические цилиндры оказывают меньшее сопротивление течению и имеют более высокую скорость теплообмена, чем круглые цилиндры.) Используемый в последние десятилетия метод сеточных уравнений Больцмана показал, что с его помощью можно моделировать различные течения жидкости. Установлено, что для случая изотермических потоков жидкости данный метод является более точным, устойчивым и экономичным по сравнению с классическими вычислительными методами гидроаэродинамики [5]. Совместное использование метода сеточных уравнений Больцмана и тепловой модели предложено в работе [6]. Основным препятствием для использования метода сеточных уравнений Больцмана в технических приложениях является отсутствие адекватной модели для решения задач о теплопереносе жидкости. Чтобы вычислить макроскопическую температуру, применяется многоскоростной подход, заключающийся в расширении функции распределения [7, 8]. Однако этот подход требует громоздких вычислений вследствие численной неустойчивости и введения дополнительных дискретных скоростей. Альтернативный подход заключается в том, что скорость находится путем решения сеточных уравнений Больцмана, а температура — независимого макроскопического уравнения, связь которого с сеточными уравнениями Больцмана достигается путем добавления потенциала к уравнению для функции распределения [9, 10]. Результаты численного исследования поля течения и теплообмена в канале, содержащем три препятствия: два присоединенных к нижней стенке одно —

к верхней стенке, показали, что в этом случае переход из стационарного в нестационарное течение происходит при значениях числа Рейнольдса, меньших, чем в канале с препятствиями, присоединенными только к нижней стенке [11]. В [12] исследовалось стационарное течение вокруг двух круглых цилиндров с тандемным расположением при четырех значениях числа Прандтля ( $Pr = 0,1; 1,0; 10,0; 100,0$ ). В [13, 14] с использованием метода конечного объема и сеточных уравнений Больцмана проведено численное моделирование вынужденного конвективного несжимаемого течения и теплообмена в плоском горизонтальном канале для более чем двух изотермических тандемных цилиндров с квадратным сечением и показано влияние расстояния между двумя цилиндрами, числа Рейнольдса  $Re = 100 \div 1000$  и коэффициента загрузки рабочего сечения на характеристики поля течения и теплообмена. Данное исследование позволяет сравнить результаты, полученные с использованием сеточных уравнений Больцмана, с результатами, полученными с использованием уравнений Навье — Стокса и метода конечных элементов. Моделирование проводилось при  $Pr = 0,71$ ,  $30 \leq Re \leq 100$ .

**1. Метод сеточных уравнений Больцмана.** Метод сеточных уравнений Больцмана развивался как метод, альтернативный традиционным методам решения уравнений газодинамики [15–17].

1.1. *Управляющее уравнение.* Метод сеточных уравнений Больцмана создан на основе сеточных методов уравнений газовой динамики, может рассматриваться как явная дискретизация первого порядка уравнения Больцмана в фазовом пространстве и используется для моделирования течений жидкости [15, 18, 19] и теплообмена [20, 21]. В отличие от классического макроскопического подхода Навье — Стокса в методе сеточных уравнений Больцмана для моделирования течения жидкости применяется мезоскопическая модель [20]. Для описания макроскопических параметров течения жидкости, таких как скорость и давление, моделируется движение частиц жидкости. При этом область течения жидкости дискретизируется равномерными декартовыми ячейками, каждая из которых содержит фиксированное число функций распределения, описывающих некоторое количество частиц жидкости, перемещающихся в дискретных направлениях. Следовательно, модели различаются размерностью задачи и числом дискретных направлений скорости. В настоящей работе рассматриваются двумерное течение и двумерная квадратная решетка с девятью скоростями. Векторы скорости  $c_0, \dots, c_8$  для данной модели показаны на рис. 1. Для каждого вектора скорости сохраняется функция распределения. Скорости в модели (см. рис. 1) вычисляются по формулам

$$c_k = \begin{cases} (0, 0), & k = 0, \\ (\pm 1, 0)c, (0, \pm 1)c, & k = 1, 2, 3, 4, \\ (\pm 1, \pm 1)c, & k = 5, 6, 7, 8, \end{cases}$$

где  $c = \Delta x / \Delta t$ ;  $k$  — номер направления скорости на решетке.

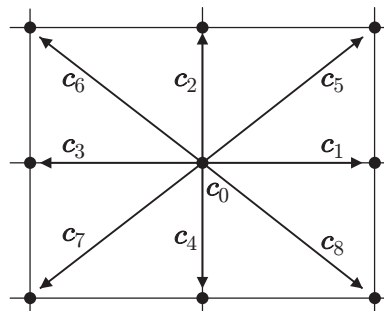


Рис. 1. Схема расчетной ячейки с девятью скоростями

В настоящей работе используется модель решетки для уравнения Больцмана из [20]. Функции распределения вычисляются путем решения сеточного уравнения Больцмана. В приближении Бхатнагара — Гросса — Крука уравнение Больцмана можно записать в виде [22]

$$f_k(x + \mathbf{c}_k \Delta t, t + \Delta t) = f_k(x, t) + \frac{\Delta t}{\tau} [f_k^{eq}(x, t) - f_k(x, t)],$$

где  $\Delta t$  — временной шаг;  $c_k$  — дискретная скорость в направлении  $k$ ;  $\tau$  — время релаксации;  $f_k^{eq}$  — равновесная функция распределения, соответствующая скорости  $\mathbf{c}_k$  и вычисляемая по формуле

$$f_k^{eq} = \omega_k \rho \left( 1 + \frac{\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u})^2}{c_s^4} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{u}^2}{c_s^2} \right), \quad (1)$$

$\omega_k = 4/9$  при  $k = 0$ ,  $\omega_k = 1/9$  при  $k = 1, 2, 3, 4$ ,  $\omega_k = 1/36$  при  $k = 5, 6, 7, 8$ ;  $c_s = c_k/\sqrt{3}$  — сеточная скорость звука. Макроскопические переменные жидкости — плотность и скорость — вычисляются как первые два момента функции распределения для каждой клетки [22]:

$$\rho = \sum_{k=0}^8 f_k, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^8 f_k \mathbf{c}_k. \quad (2)$$

Для поля температуры распределение  $g$  имеет вид

$$g_k(x + \mathbf{c}_k \Delta t, t + \Delta t) = g_k(x, t) + \frac{\Delta t}{\tau_g} [g_k^{eq}(x, t) - g_k(x, t)].$$

Соответствующие равновесные функции распределения для жидкости и твердого тела определяются следующим образом [18]:

$$g_k^{eq} = \omega_k T \left( 1 + \frac{\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} \right), \quad g_k^{eq} = \omega_k T.$$

Температурное поле вычисляется по формуле

$$T = \sum g_k.$$

1.2. *Случай криволинейной границы.* Рассмотрим геометрию участка произвольной криволинейной стенки (рис. 2). Для реализации условия непротекания необходимо задать функцию  $f(x_b, t)$ . Доля области жидкости  $\Delta$  в ячейке, которую пересекает граница, определяется по формуле

$$\Delta = \frac{\|x_f - x_w\|}{\|x_f - x_b\|}.$$

В соответствии со стандартным граничным условием прилипания  $\Delta = 0,5$  на граничной стенке. Вследствие криволинейности границ возможны значения  $\Delta = 0 \div 1$ . На рис. 2, б приведена схема отскока на поверхности при  $\Delta < 0,5$ . Отраженная функция распределения  $f_a(x, t + \Delta t)$  в  $x_f$  является неизвестной. При использовании сеточных уравнений Больцмана полагается, что за временной шаг частицы жидкости перемещаются на расстояние, равное длине одной клетки. Для того чтобы вычислить отраженную функцию распределения в узле  $x_f$ , применялась схема интерполяции [23]. Чтобы вычислить функцию распределения в области твердого тела  $f_a(x_b, t)$ , комбинировались граничные условия для отскока с интерполяциями, включающими коррекцию на половине сеточного интервала на границах.

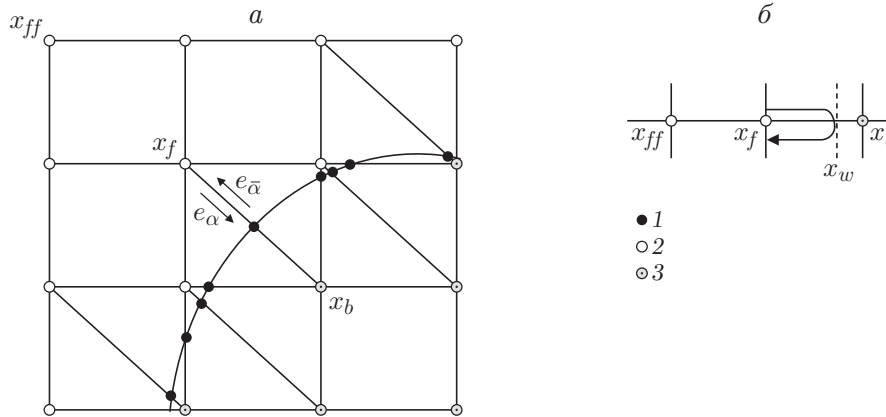


Рис. 2. Распределение узлов в окрестности криволинейной границы (*a*) и схема отскока с интерполяцией после столкновения (*б*):

1 — граничные узлы на границе  $x_w$ , 2 — граничные узлы в области течения жидкости  $x_f$ , 3 — граничные узлы в области твердого тела  $x_b$

Тогда разложение Чепмена — Энскога для постстолкновительной функции распределения принимает вид

$$\tilde{f}_{\alpha}(x_b, t + \Delta t) = (1 - \lambda)\tilde{f}_{\alpha}(x_f, t + \Delta t) + \lambda f_{\alpha}^0(x_b, t + \Delta t) - 2 \frac{3}{c^2} w_{\alpha} \rho(x_f, t + \Delta t) e_{\alpha} u_w,$$

где

$$f_{\alpha}^0(x_b, t + \Delta t) = f_{\alpha}^{eq}(x_f, t + \Delta t) + \frac{3}{c^2} w_{\alpha} \rho(x_f, t + \Delta t) e_{\alpha} (u_{bf} - u_f),$$

$$u_{bf} = u_{ff}, \quad \lambda = \frac{2\Delta - 1}{\tau_m - 2} \quad \text{при} \quad 0 < \Delta \leq \frac{1}{2},$$

$$u_{bf} = \left(1 - \frac{3}{2\Delta}\right)u_f + \frac{3}{2\Delta} u_w, \quad \lambda = \frac{2\Delta - 1}{\tau_m + 1/2} \quad \text{при} \quad \frac{1}{2} < \Delta \leq 1.$$

1.3. *Оценка силы сопротивления и теплообмена.* Теплообмен между горячими и холодными стенками определялся с использованием локального и среднего чисел Нуссельта:

$$\text{Nu}_l = -\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\text{wall}}, \quad \text{Nu}_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Nu}_l \, d\theta.$$

Коэффициент сопротивления и коэффициент давления определяются следующим образом:

$$C_D = \frac{F_D}{\rho U_{\infty}^2 D/2}, \quad C_P = \frac{P - P_{\infty}}{\rho U_{\infty}^2/2}.$$

1.4. *Алгоритм решения сеточных уравнений Больцмана.* На рис. 3 приведена схема вычислительной области. Треугольная система из цилиндров установлена в канале, имеющем ширину, достаточную для того, чтобы его стенки не оказывали значительного влияния на характеристики поля течения. Цилиндры полагались настолько длинными, чтобы можно было пренебречь концевыми эффектами. Температура стенок  $T_c$ , равная температуре поступающей жидкости  $T_{\infty}$ , является постоянной. Температура на поверхности цилиндров  $T_h$  также полагается постоянной, однако она выше температуры поступающей жидкости.

В данной работе применялось три вида граничных условий: на поверхности цилиндров и стенках канала поддерживалось условие отскока, на входе и выходе задавались постоянные скорость и давление. Граничные условия отскока имеют вид:

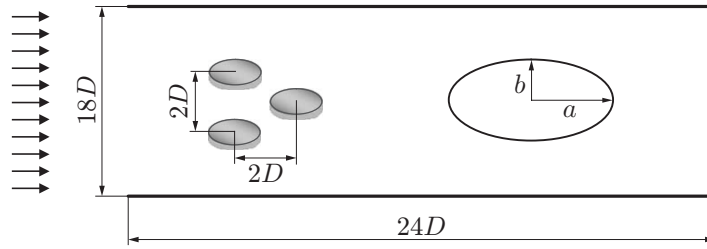
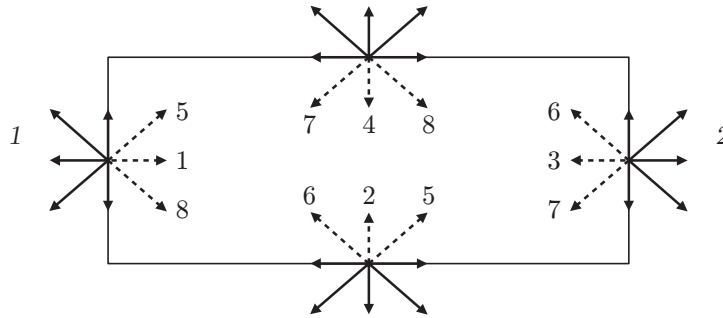


Рис. 3. Схема вычислительной области

Рис. 4. Функции распределения на границах области:  
1 — вход в канал, 2 — выход из канала

— на верхней стенке канала

$$f_7(x, t + \Delta t) = f_5(x, t), \quad f_4(x, t + \Delta t) = f_2(x, t), \quad f_8(x, t + \Delta t) = f_6(x, t);$$

— на нижней стенке канала

$$f_5(x, t + \Delta t) = f_7(x, t), \quad f_2(x, t + \Delta t) = f_4(x, t), \quad f_6(x, t + \Delta t) = f_8(x, t).$$

На входе в канал задавалась скорость  $u_{in}$  (рис. 4) и с использованием уравнения (2) вычислялись три функции распределения:

$$\begin{aligned} \rho_{in} &= f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8, \\ \rho_{in} u_{in} &= f_1 + f_5 + f_8 - f_3 - f_6 - f_7; \\ f_1 - f_1^{eq} &= f_3 - f_3^{eq}. \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, что соотношение (3) следует из условия равновесия на границе. Здесь  $f^{eq}$  вычисляется с помощью (1):

$$f_1^{eq} = \frac{1}{9} \rho_{in} \left( 1 + 3u_{in} + \frac{9}{2} u_{in}^2 - \frac{3}{2} u_{in}^2 \right); \quad (4)$$

$$f_3^{eq} = \frac{1}{9} \rho_{in} \left( 1 - 3u_{in} + \frac{9}{2} u_{in}^2 - \frac{3}{2} u_{in}^2 \right). \quad (5)$$

Подставляя уравнения (4), (5) в уравнение (3), получаем

$$f_1 = f_3 + (2/3) \rho_{in} u_{in}.$$

Решая полученные уравнения, находим остальные функции распределения:

$$\rho_{in} = \frac{(f_0 + f_2 + f_4) + 2(f_3 + f_7 + f_6)}{1 - u_{in}},$$

$$f_5 = f_7 - \frac{1}{2} (f_2 - f_4) + \frac{1}{6} \rho_{in} u_{in}, \quad f_8 = f_6 + \frac{1}{2} (f_2 - f_4) + \frac{1}{6} \rho_{in} u_{in}.$$

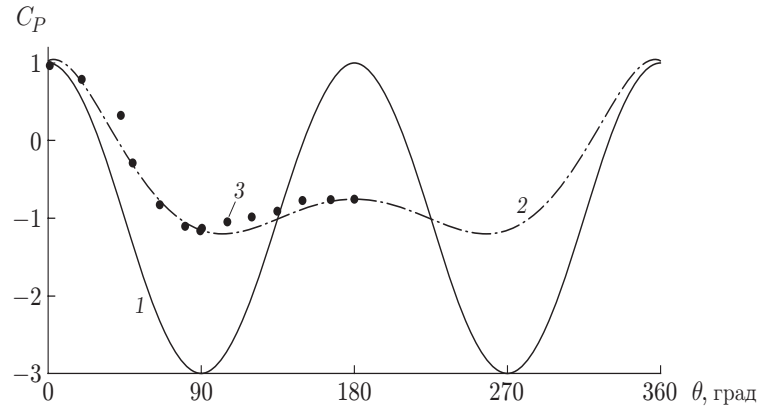


Рис. 5. Распределение коэффициента давления на поверхности круглого цилиндра: 1 — потенциальное течение, 2 — решение, полученное с использованием сеточных уравнений Больцмана ( $Re = 100$ ), 3 — экспериментальные данные [2] ( $Re = 100$ )

Таблица 1

Значения коэффициента сопротивления  $C_D$  для круглого цилиндра при  $Re = 100$

Работа	$C_D$	Работа	$C_D$
Данная работа	1,45	Работа [26]	1,40
Работа [24]	1,33	Работа [27]	1,47
Работа [25]	1,45	Работа [28]	1,43

На выходе из канала задавались мягкие граничные условия. Полагалось, что давление на выходе известно, т. е. известна плотность  $\rho_{out}$ . Вычислялись три неизвестные функции распределения:

$$u_x = -1 + \frac{(f_0 + f_2 + f_4) + 2(f_1 + f_5 + f_8)}{\rho_{out}},$$

$$f_3 = f_1 - \frac{2}{3} \rho_{out} u_x, \quad f_7 = f_5 + \frac{1}{2} (f_2 - f_4) - \frac{1}{6} \rho_{out} u_x, \quad f_6 = f_8 - \frac{1}{2} (f_2 - f_4) - \frac{1}{6} \rho_{out} u_x.$$

1.5. *Проверка правильности кода.* Численные расчеты проводились с использованием собственного кода, написанного на языке ФОРТРАН на основе сеточных уравнений Больцмана. Выполнялись численные исследования для течения за одним круглым цилиндром, помещенным в канал. Сравнение значений коэффициента давления и коэффициента сопротивления, полученных при значении числа Рейнольдса  $Re = 100$  в настоящей работе и в работах [24–28], показывает, что они хорошо согласуются (рис. 5, табл. 1).

**2. Результаты исследования и их обсуждение.** На рис. 6 показаны линии тока при различных числах Рейнольдса. Видно, что при очень малых значениях числа Рейнольдса ( $Re < 60$ ) линии тока стационарные и хорошо согласуются с экспериментальными данными. При  $Re > 60$  линии тока меняют положение вследствие нестационарности течения. Увеличение числа Рейнольдса приводит к уменьшению размера следа, что соответствует уменьшению сопротивления на поверхности цилиндра. При малых значениях числа Рейнольдса два вихря ниже по течению за цилиндром, расположенным на одинаковом расстоянии от стенок канала, остаются присоединенными к цилиндру. В случае круглого цилиндра размеры вихрей больше, чем в случае эллиптического, и увеличиваются с увеличением числа Рейнольдса. Когда число Рейнольдса увеличивалось до некоторого критического значения, линии тока на тыльной стороне цилиндра принимали волнообразную и синусообразную форму и образовывалась нестационарная вихревая дорожка. На

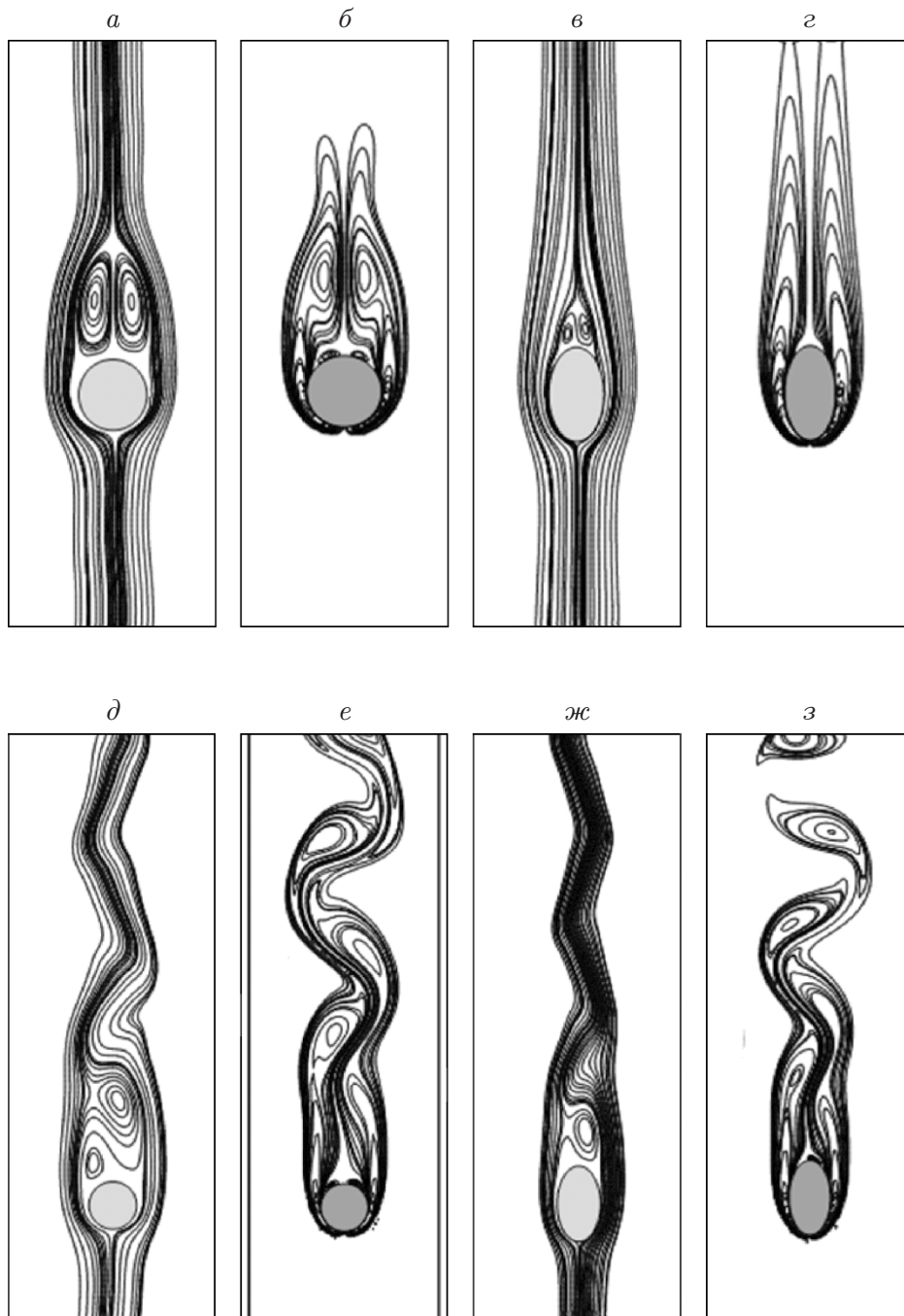


Рис. 6. Линии тока для стационарных течений за круглым (*a*, *б*, *д*, *е*) и эллиптическим (*в*, *г*, *ж*, *з*) цилиндрами при различных числах Рейнольдса: *a-г* —  $Re = 30$ , *д-з* —  $Re = 100$

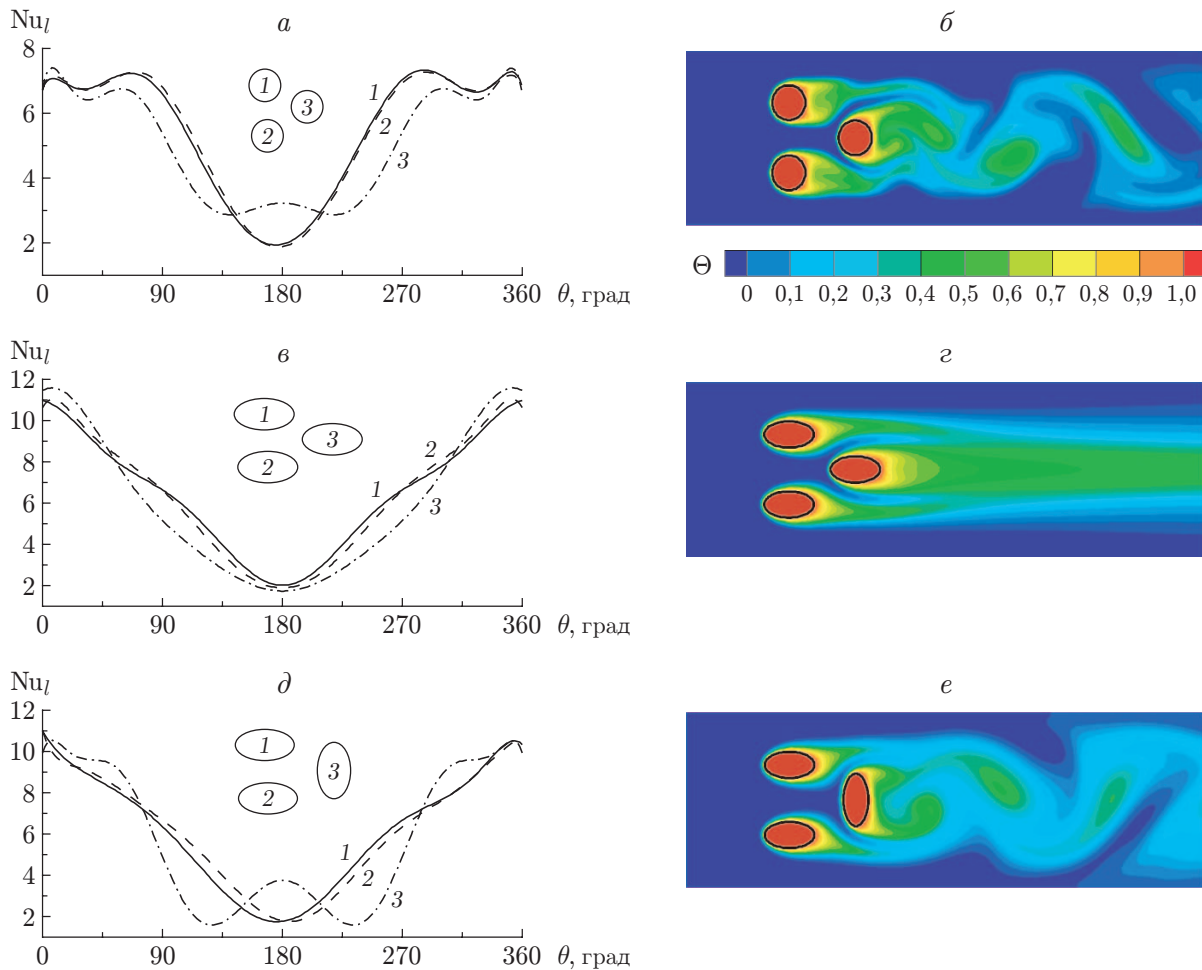


Рис. 7. Распределения локального числа Нуссельта (*a, в, д*) и изотермы (*б, г, e*) для различной формы и расположения цилиндров при  $Re = 50$ :  
*a, б* — круглые цилиндры, *в-е* — эллиптические цилиндры; 1-3 — номера цилиндров

рис. 6 показаны линии тока для течения за круглым и эллиптическим цилиндрами при различных числах Рейнольдса. При увеличении числа Рейнольдса размеры вихрей, по-видимому, также увеличивались. На рис. 6 видно, что при  $Re = 100$  вихри сходят, образуя вихревую дорожку Кармана.

На рис. 7 приведены распределения локального числа Нуссельта по поверхности цилиндра и изотермы при  $Re = 50$ . В окрестности цилиндра ниже по течению поток ускоряется, линии тока приобретают волнообразную форму и нестационарная вихревая дорожка становится более четко видимой. На рис. 7,*a, в, д* видно, что максимальное число Нуссельта для каждого цилиндра находится в точке торможения потока. При фиксированном числе Рейнольдса максимальное значение скорости локального теплообмена на поверхности эллиптических цилиндров значительно больше, чем на поверхности круглых цилиндров. Средние значения числа Нуссельта для различных случаев расположения цилиндров представлены в табл. 2. Видно, что для цилиндров, расположенных ниже по течению, значение  $Nu_m$  меньше. Для круглых цилиндров значения числа Нуссельта меньше, чем для цилиндров любой другой геометрии, рассматриваемой в настоящей работе, наличие ниже по течению вертикально расположенного эллиптического цилиндра приводит к увеличению скорости теплоотдачи горячего цилиндра.



Таблица 2

Средние значения числа Нуссельта для различных случаев расположения цилиндров

Расположение цилиндров	$Nu_m$		
	Цилиндр 1	Цилиндр 2	Цилиндр 3
Рис. 7,а	6,30	6,39	5,81
Рис. 7,б	5,65	5,66	5,15
Рис. 7,в	6,24	6,29	6,08

**3. Выводы.** Численно исследованы течение и теплообмен вблизи треугольной системы из трех изотермических цилиндров с различной конфигурацией. Для решения задач о теплообмене развит двумерный метод сеточных уравнений Больцмана, отличающийся от других методов вычислительной гидродинамики более простой процедурой вычисления параметров, возможностью использования для описания течений в областях с границами сложной формы. Гибкость метода подтверждают полученные с его использованием значения таких параметров, как коэффициент давления и коэффициент сопротивления, которые хорошо согласуются с результатами, полученными ранее.

На основе проведенного исследования можно сделать следующие выводы.

Использование метода сеточных уравнений Больцмана позволяет описать особенности течения за цилиндром.

Максимальная скорость теплообмена в треугольной системе достигается в точке торможения потока на поверхности цилиндра.

Среднее значение числа Нуссельта для цилиндров, расположенных выше по течению, больше среднего значения числа Нуссельта для цилиндров, расположенных ниже по течению.

На поверхности эллиптических цилиндров локальные скорости теплообмена значительно больше, чем на поверхности круглых цилиндров.

Наличие эллиптического цилиндра, расположенного вертикально ниже по течению, вызывает увеличение скорости теплоотдачи горячего цилиндра.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Mittal R., Balachandar S.** Direct numerical simulation of flow past elliptic cylinders // J. Comput. Phys. 1996. V. 124. P. 351–367.
2. **Sharman B., Lien F. S., Davidson L., Norberg C.** Numerical predictions of low Reynolds number flows over two tandem circular cylinders // Intern. J. Numer. Methods Fluids. 2005. V. 47. P. 423–447.
3. **Arumuga Perumal D., Kumar G. V. S., Dass A. K.** Lattice Boltzmann simulation of viscous flow past elliptical cylinder // J. CFD Lett. 2012. V. 4. P. 127–139.
4. **Shintani K., Umemura A., Takano A.** Low-Reynolds-number flow past an elliptic cylinder // J. Fluid Mech. 1983. V. 136. P. 277–289.
5. **Higuera F. J., Jimenez J.** Boltzmann approach to lattice gas simulation // Europhys. Lett. 1989. V. 9. P. 663–668.
6. **Massaioli F., Benzi R., Succi S.** Exponential tails in two-dimensional Rayleigh — Be'nard convection // Europhys. Lett. 1993. V. 21. P. 305–310.
7. **Chen Y., Ohashi H., Akiyama M. A.** Thermal lattice Bhatnagar — Gross — Krook model without nonlinear deviations in macro dynamic equations // Phys. Rev. E. 1994. V. 50. P. 2776–2783.
8. **Pavlo P., Vahala G., Vahala L., Soe M.** Linear-stability analysis of thermo-lattice Boltzmann models // J. Comput. Phys. 1998. V. 139. P. 79–91.

9. **Crouse B., Krafczyk M., Kuhner S., et al.** Indoor air flow analysis based on lattice Boltzmann methods // *Energy Build.* 2002. V. 34. P. 941–949.
10. **D’Orazio A., Corcione M., Cielata G. P.** Application to natural convection enclosed flows of a lattice Boltzmann BGK model coupled with a general purpose thermal boundary condition // *Intern. J. Thermal Sci.* 2004. V. 43. P. 575–586.
11. **Korichi A., Oufier L.** Numerical heat transfer in a rectangular channel with mounted obstacles on the upper and lower walls // *Intern. J. Thermal Sci.* 2005. V. 44. P. 644–655.
12. **Juncu G.** A numerical study of momentum and forced convection heat transfer around two tandem circular cylinders at low Reynolds numbers. Pt 2. Forced convection heat transfer // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2007. V. 50. P. 3799–3808.
13. **Farhadi M., Sedighi K., Madani M. M.** Convective cooling of tandem heated squares in a channel // *J. Mech. Engng Sci.* 2009. V. 223. P. 965–978.
14. **Mohammadi Pirouz M., Farhadi M., Sedighi K., et al.** Lattice Boltzmann simulation of conjugate heat transfer in a rectangular channel with wall-mounted obstacles // *J. Sci. Iranica B.* 2011. V. 18. P. 213–222.
15. **Chopard B., Luthi P. O.** Lattice Boltzmann computations and applications to physics // *Theoret. Comput. Phys.* 1999. V. 217. P. 115–130.
16. **Nourgaliev R. R., Dinh T. N., Theofanous T. G., Joseph D.** The lattice Boltzmann equation method: theoretical interpretation, numerics and implications // *Intern. J. Multiphase Flow.* 2003. V. 29. P. 117–169.
17. **Yu D., Mei R., Luo L. S., Shyy W.** Viscous flow computations with the method of lattice Boltzmann equation // *Progr. Aerospace Sci.* 2003. V. 39. P. 329–367.
18. **Mohammad A. A.** Applied lattice Boltzmann method for transport phenomena momentum heat mass transfer. Calgary: Univ. Calgary Press, 2007.
19. **Aghajani D. M., Farhadi M., Sedighi K.** Effect of heater location on heat transfer and entropy generation in the cavity using the lattice Boltzmann method // *Heat Transfer Res.* 2009. V. 40. P. 521–536.
20. **Mezrhab A., Jami M., Abid C., et al.** Lattice Boltzmann modeling of natural convection in an inclined square enclosure with partitions attached to its cold wall // *Intern. J. Heat Fluid Flow.* 2006. V. 27. P. 456–465.
21. **He X., Luo L. S.** Lattice Boltzmann model for the incompressible Navier — Stokes equations // *J. Statist. Phys.* 1997. V. 88. P. 927–944.
22. **Thürey N., Rüde U.** Stable free surface flows with the lattice Boltzmann method on adaptively coarsened grids // *Comput. Visual. Sci.* 2009. V. 12. P. 247–263.
23. **Guo Z. L., Zheng Ch., Shi B. C.** An extrapolation method for boundary conditions in lattice Boltzmann method // *Phys. Fluids.* 2002. V. 14, N 6. P. 2007–2010.
24. **Park J., Kwon K., Choi H.** Numerical solutions of flow past a circular cylinder at Reynolds number up to 160 // *KSME Intern. J.* 1998. V. 12. P. 1200.
25. **Sucker D., Brauer H.** Fluidodynamik bei der angestromten Zylindern // *Wärme- und Stoffübertrag.* 1975. Bd 8. S. 149.
26. **Khan W. A., Culham J. R., Yovanovich M. M.** Fluid flow around and heat transfer from elliptical cylinders: Analytical approach // *J. Thermophys. Heat Transfer.* 2005. V. 19. P. 178–185.
27. **Hoffman J.** Efficient computation of mean drag for the subcritical flow past a circular cylinder using General Galerkin G2 // *Intern. J. Numer. Methods Fluids.* 2009. V. 59, N 11. P. 1241–1258.
28. **Von Wieselsberger C.** Neuere Feststellungen über die Gesetze des Flüssigkeits und Luftwiderstands // *Phys. Z.* 1921. Bd 22. S. 321–328.