

УДК 532.522.2

СТРУИ НИЗКОЙ ПЛОТНОСТИ ЗА ЗВУКОВЫМ СОПЛОМ
ПРИ БОЛЬШИХ ПЕРЕПАДАХ ДАВЛЕНИЯ

В. В. Волчков, А. В. Иванов, Н. И. Кисляков,
А. К. Ребров, В. А. Сухнев, Р. Г. Шарафутдинов

(Новосибирск)

На основании экспериментальных данных, полученных в газодинамических трубах низкой плотности с помощью электронно-пучковой диагностики и метода трубы Пито, рассматривается газодинамическая структура струй низкой плотности двухатомного газа за звуковым соплом при больших перепадах давления в условиях перехода от режимов сплошной среды к режимам разреженного газа. Показана автомодельность в распределении плотности и полного напора во всех сечениях струи по отношению давлений при постоянном значении комплекса $R_L = R_*/N^{1/2}$ (R_* — число Рейнольдса в критическом сечении сопла, N — отношение давлений торможения и в камере истечения).

На основании сравнения локальных чисел Рейнольдса для всех зон струи показано, что данный комплекс является моделирующим. Экспериментальные данные по изменению структуры струи приведены в зависимости от числа R_L в диапазоне $5 \div 600$. При числах $R_L > 100$ течение в струе можно рассматривать как сплошное; при $R_L < 5 \div 10$ течение соответствует режиму рассеивания; диапазон $5 \div 10 < R_L < 100$ соответствует переходному режиму. Указаны диапазоны автомодельности струи по R_* и N . На основании результатов измерений показано, что течение за диком Маха при $R_L > 200$ сохраняется дозвуковым на оси на расстоянии в несколько длин первого цикла. Переход к сверхзвуковой скорости на оси струи может иметь место при уменьшении чисел R_L благодаря эжекционному ускорению сверхзвуковым кольцевым сжатым слоем.

Описание оборудования и методики экспериментов содержится в работах [1-3]. В экспериментах были использованы звуковые сопла типа отверстия в тонкой стенке с отношением толщины стенки к диаметру отверстия, меньшим чем 0.05. Для числа Рейнольдса R_* , рассчитанного по параметрам на срезе сопла, выполнялось условие $R_* \geq 200$; при этом можно было пренебречь влиянием пограничного слоя в сопле и принять коэффициент расхода сопла равным единице [4]. В качестве рабочего газа использовался азот, воздух и углекислота при температуре торможения $T_0 \approx 300^\circ\text{K}$.

Из расчетов струй невязкого газа и экспериментальных исследований (см., например, [4-6]) известно, что при больших отношениях давления торможения p_0 к давлению в затопленном пространстве p_j характерные геометрические размеры L_i различных зон начального участка струи (диаметр висячего скачка, расстояние до диска Маха, толщина сжатого слоя за висячим скачком и др.) подчиняются зависимостям $L_i \sim d_* N^{1/2}$, где d_* — диаметр критического сечения сопла, $N = p_0/p_j$. Данная закономерность выполняется тем точнее, чем больше N . Так, согласно расчетам без учета вязкости [7] для заданного числа Маха на срезе сопла M и фиксированного отношения удельных теплоемкостей γ течение в затопленной струе в координатах $\xi = x/d_* N^{1/2}$, $\eta = y/d_* N^{1/2}$ асимптотически стремится к автомодельному при увеличении N . При этом, за исключением низкоэнтропийного слоя вблизи границы струи, стремятся к автомодельным и распределения газодинамических параметров. Это связано с формированием в зоне,

ограниченной висячим скачком, течения от пространственного источника, в котором вдоль линий тока скорость истекающего газа достигает своего предельного значения.

Для струи реального газа при низких плотностях данная картина течения осложняется эффектами вязкости и релаксационных процессов, связанных с внутренними степенями свободы. Кроме отношения давления N , числа Маха M и отношения теплоемкостей γ течение зависит от критериев Рейнольдса, Прандтля, Шмидта и температурного фактора T_0/T_j .

Анализ различных литературных данных и экспериментов данной работы показал, что при переходе к режимам разреженного газа характер течения в различных зонах начального участка струи существенно зависит от значения локального числа Рейнольдса R_i , построенного по характерным для каждой зоны значениям плотности ρ_i , скорости u_i , коэффициента вязкости μ_i и размера L_i . Рассмотрим последовательно этот критерий для зоны ядра струи, ограниченного висячим скачком и диском Маха (зоны 1), зоны слоя смешения за висячим скачком (зоны 2) и зоны за диском Маха (зоны 3). Закон изменения коэффициента вязкости с температурой примем в виде $\mu \sim T^\omega$.

В зоне 1 вблизи оси струи на большом удалении от среза сопла, где скорость u_1 близка к максимальной, для плотности имеет место зависимость [8]

$$\rho/\rho_0 = Bd_*^2/x^2 \quad (1.1)$$

Здесь ρ_0 — плотность в форкамере сопла, $B = B(\gamma, M)$. В качестве характерного размера этой зоны примем расстояние от среза сопла до диска Маха. Согласно работе [4]

$$L_1 = 0.67 d_* N^{1/2} \quad (1.2)$$

для числа Рейнольдса, построенного по местным значениям ρ_1 , u_1 , μ_1 и длине L_1 , находим

$$R_1 \sim M_1^{2\omega} R_* / N^{1/2} \quad (1.3)$$

где M_1 — число Маха в точке x . Заметим, что это число Рейнольдса характеризует продольные диссипативные эффекты в одномерном потоке. С другой стороны, введем также локальное число Кнудсена $K_M = l_M/x$, определенное по длине свободного пробега молекул в направлении движения газа $l_M = lM$ [9] (l — длина свободного пробега в лагранжевых координатах). Так как

$$R_1 \sim M_1^2 / K_M \quad (1.4)$$

а при низких значениях статической температуры $\omega \approx 1$ из сравнения (1.3) и (1.4) имеем

$$K_M \sim N^{1/2} / R_*$$

Комплекс $R_*/N^{1/2}$ удобен для использования при описании эффектов вязкости и теплопроводности [10, 11], а также релаксационных явлений в ядре струи. Так, согласно оценке, предложенной в работе [12], «замораживание» вращательных или поступательных степеней свободы молекул происходит на расстоянии от среза сопла, определяемом соотношением

$$(x_f/d_*)^{\omega+(2\gamma-1)(\omega-1)} \sim (ZK_*)^{-1} \quad (1.5)$$

в котором $K_* = l_*/d_*$ — число Кнудсена по условиям в критическом сечении, Z — число столкновений, необходимое для установления равновесия

по вращательным или поступательным степеням свободы. При $\omega = 1$

$$\xi_f = x_f/d_* N^{1/2} \sim R_*/ZN^{1/2} \quad (1.6)$$

т. е. при произвольном N , но фиксированном значении комплекса $R_*/N^{1/2}$ замораживание происходит в сходственных сечениях $\xi_f = \text{const}$.

В зоне 2 число Рейнольдса можно определить по расстоянию от сопла вдоль границы струи $R_{2s} = \rho_2 u_2 s/\mu_2$, где ρ_2 , u_2 и μ_2 — некоторые средние значения плотности, скорости и коэффициента вязкости в слое смешения в данном сечении. На достаточно большом удалении от сопла $s \approx x$. Воспользовавшись условием, согласно которому при $x/d_* \gg 1$ расход через сжатый слой составляет основную долю от полного расхода, находим среднее значение $\rho_2 u_2$ из уравнения неразрывности

$$\rho_2 u_2 \sim \rho_* u_* d_*^2 / D \Delta \quad (1.7)$$

где D и Δ — диаметр висячего скачка и толщина сжатого слоя за висячим скачком соответственно. Учитывая, что $D \sim d_* N^{1/2}$, $\Delta \sim d_* N^{1/2}$, получаем

$$R_{2x} \sim \mu_0 R_* / \mu_2 N^{1/2} \quad (1.8)$$

Для величины μ_2 можно взять значение, соответствующее средней температуре в слое смешения, равной, например, среднему арифметическому от температуры за висячим скачком T_s и температуры в затопленном пространстве T_j . При достаточно больших значениях N и x/d_* часто имеет место условие $T_s \ll T_j$. Тогда

$$R_{2x} \sim (T_0/T_j)^\omega R_* / N^{1/2} \quad (1.9)$$

При $T_0 = T_j$ в сходственных сечениях $R_{2x} \sim R_* / N^{1/2}$.

В зоне 3 для числа Рейнольдса $R_3 = \rho_3 u_3 D_m / \mu_3$ в качестве характерного размера примем диаметр диска Маха D_m . Здесь при $N \gg 1$ имеют место условия

$$\mu_3 \sim \mu_*, \quad u_3 \approx u_*/u_{\max}, \quad \rho_3 \approx (\gamma + 1) B \rho_0 d_*^2 / (\gamma - 1) L^2$$

Используя выражение (1.2) и условие $D_m \sim d_* N^{1/2}$, получаем

$$R_3 \sim R_* / N^{1/2} \quad (1.10)$$

Изменение отношения толщины ударных волн к характерному размеру струи описывается в работах [3, 13] критериями $K_0 N^{1/2}$ и T_0/d_* ($p_0 p_j$)^{1/2} ($K_0 = l_0/d_*$ — число Кнудсена, l_0 — длина свободного пробега в камере торможения). Легко показать, что эти комплексы при $T_0 = T_j$ обратно пропорциональны $R_*/N^{1/2}$.

Таким образом, локальные числа Рейнольдса для рассмотренных зон и различных физических процессов оказываются пропорциональными $R_*/N^{1/2}$. Этот комплекс примем за определяющий критерий и в дальнейшем будем обозначать его через R_L .

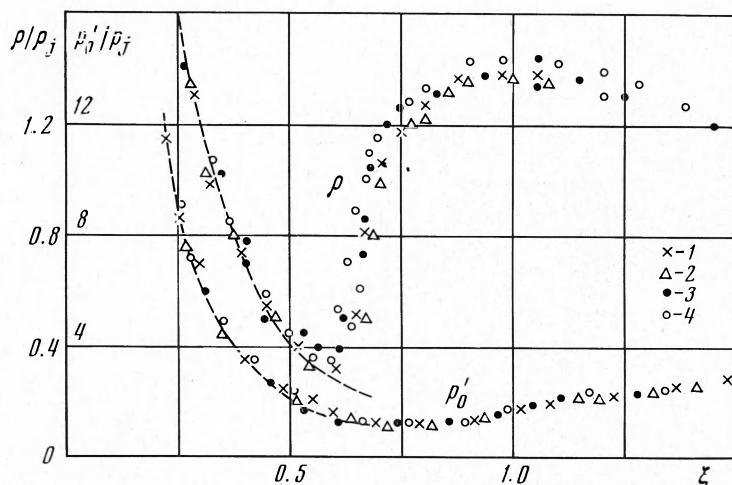
Согласно результатам работы [14] при $T_0 = T_j$ и $R_L \ll 10^3$ течение в слое смешения у границы струи ламинарное и в диапазоне $50 < R_L < 10^3$ при фиксированном значении R_L имеет место автомодельное изменение всех геометрических размеров начального участка струи по отношению $N = p_0/p_j$, когда $N \geq 100$.

Эксперименты данной работы преследовали следующие цели:

1) изучить структуру продольных и поперечных распределений газодинамических параметров на начальном участке струи и, в частности, проверить, подчиняются ли эти распределения автомодельному закону изменения в зависимости от p_0/p_j при $R_L = \text{const}$;

2) детально исследовать перестройку картины течения в струе при уменьшении R_L от 10^3 до значений, соответствующих режимам рассеяния [13], при которых местная длина свободного пробега молекул становится сравнимой с характерными размерами течения. При реализации этой программы были получены некоторые новые сведения о характере течения в области диска Маха.

2. Для проверки автомодельности по N распределений газодинамических параметров на начальном участке струи в ламинарном режиме течения были проведены серии опытов, в каждой из которых для случая $T_0 = T_j$ поддерживался постоянным критерий R_L при изменении в широком диапазоне критерия R_* и N ($R_* > 100$, $N > 100$). По данным измерений было



Фиг. 1

установлено, что в обобщенных координатах продольные и поперечные поля плотности ρ и давления полного напора p_0' действительно являются автомодельными по N при фиксированном значении R_L . При обработке выбирались такие координаты, чтобы осевые распределения ρ и p_0' в изэнтропическом ядре имели универсальный вид. Согласно выражению (1.1) для осевого распределения плотности

$$\frac{1}{\xi^2} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{N}{B} \equiv \frac{\rho}{\rho_j} \frac{T_0}{T_j} \frac{1}{B} \quad (2.1)$$

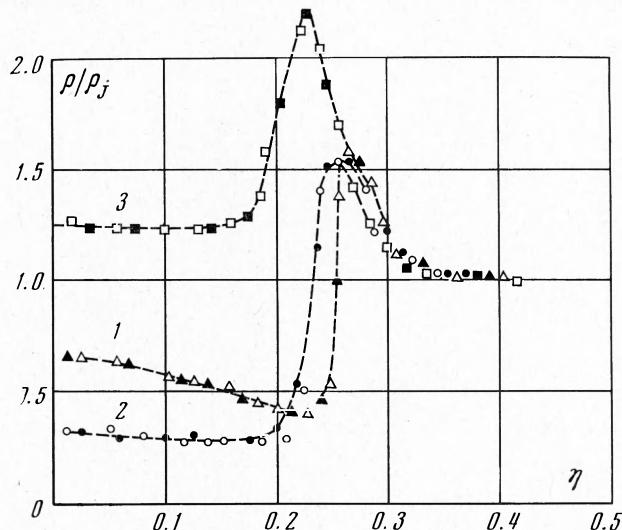
Для случая больших чисел M перед насадком полного напора $p_0' \approx \rho u_m^2$, откуда с учетом предыдущего

$$\frac{1}{\xi^2} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma B} \frac{p_0'}{p_j} \quad (2.2)$$

Таким образом, экспериментально измеренные распределения ρ и p_0' , построенные в виде зависимостей величин $\rho N (\rho_0 B)^{-1}$ и $p_0' (B p_j)^{-1}$ от координат ξ и η заведомо обобщаются в гиперзвуковой области. При фиксированных значениях M , γ и T_0/T_j в целях простоты и наглядности достаточно построить зависимости отношений ρ/ρ_j и p_0'/p_j от тех же координат ξ и η . На фиг. 1 представлены результаты измерений продольных осевых распределений плотности и полного напора в струе азота при $R_L = 140$. Обозначения на этой фигуре соответствуют следующим параметрам

опытов N и R_* соответственно: 1 — 5000 и 10 300; 2 — 900 и 4100; 3 — 360 и 2460; 4 — 100 и 1460. Пунктирные кривые отвечают осевым распределениям ρ и p_0' , соответствующим истечению в вакуум невязкого двухатомного газа.

На фиг. 2 в качестве примера показаны результаты измерения поперечных распределений плотности в струе азота при $R_L = 110$ в трех различных сечениях: 1 — $\xi = 0.38$, 2 — $\xi = 0.55$, 3 — $\xi = 0.75$. Здесь светлые точки соответствуют $N = 13\,500$, $R_* = 1260$, а темные — $N = 3040$, $R_* = 6030$. Аналогичные обобщения имеют место и для других значений R_L . На основании полученных экспериментальных данных можно утверждать,



Фиг. 2

что в случае ламинарного режима течения на начальном участке струи при фиксированных значениях T_0/T_j и R_L распределение плотности автоматично по N , если $N \geq 100$.

Следует отметить, что данный вывод качественно подтвержден сериями опытов на различных установках, отличающихся конфигурацией стенок барокамеры, расположением сопл, измерительной аппаратурой и расходными характеристиками (от 0.1 до 1 г/сек). Однако было также обнаружено, что между некоторыми результатами, полученными на различных установках, могут иметь место небольшие отличия в характеристических размерах струи (до 20%) и соответствующие отличия в распределениях газодинамических параметров. По-видимому, одна из причин этого связана с возникновением в окружающем струю пространстве различных по характеру и интенсивности слабых эжекционных потоков, которые могли воздействовать на саму струю непосредственно и приводить к ошибкам в определении фактической величины давления p_j и соответственно N , ξ и η .

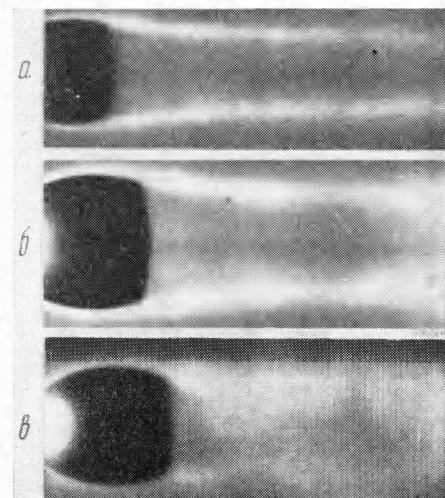
3. Значительное число экспериментов было проведено в целях изучения перестройки картины течения при уменьшении числа R_L . Их анализ существеннейшим образом облегчается благодаря описанной выше автомодельности.

В качестве примера на фиг. 3 приведены фотографии визуализации течения в струе азота для $R_L = 365, 280, 130$. Хорошо видны скачки уп-

лотнения «бочкообразной» структуры начального участка, граница струи и расположенный за диском Маха протяженный кольцевой слой плотного газа. Течение в этом кольцевом слое существенно вязкое, что качественно подтверждается заметным на глаз увеличением его толщины при уменьшении R_L .

Результаты количественных исследований перехода течения в струе от ламинарного режима течения сплошной среды к режимам разреженного газа приведены на фиг. 4 и 5. На фиг. 4, а и б даны измеренные поперечные распределения плотности соответственно в двух сечениях: а — $\xi = 0.6$ перед диском Маха, б — $\xi = 0.83$ за диском Маха. Кривые на этих фигурах соответствуют следующим значениям числа R_L : 1 — 440, 2 — 140, 3 — 70, 4 — 30, 5 — 85, 6 — 40.

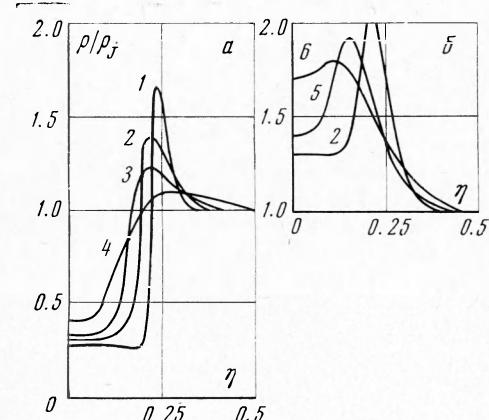
Фиг. 5 демонстрирует изменение продольных осевых распределений ρ (сплошные кривые) и p_0' (пунктирные) при уменьшении R_L от 600 до 10. Здесь кривые 1, 1а, 2, 3, 4, отвечают значениям R_L , соответственно равным 580, 365, 140, 65, 13. Каждая из кривых 1—4 для плотности получена путем осреднения автомодельных распределений, полученных в нескольких опытах при различных N , но фиксированном R_L , аналогичных показанной на фиг. 1. При малых значениях R_L в распределении параметров обнаружено нарушение автомодельности по N .



Фиг. 3

Вследствие влияния поправок к показаниям насадков полного напора нарушение автомодельности в распределении измеренных p_0' при малых R_L наступает при больших R_L , чем для плотности. Ввиду этого на фиг. 5 все кривые для распределений p_0' приведены только для одного значения $N = 5000$.

Результаты измерения плотности и полного напора показывают, что при $R_L \geq 200$ в зоне, ограниченной вязким кольцевым слоем, на

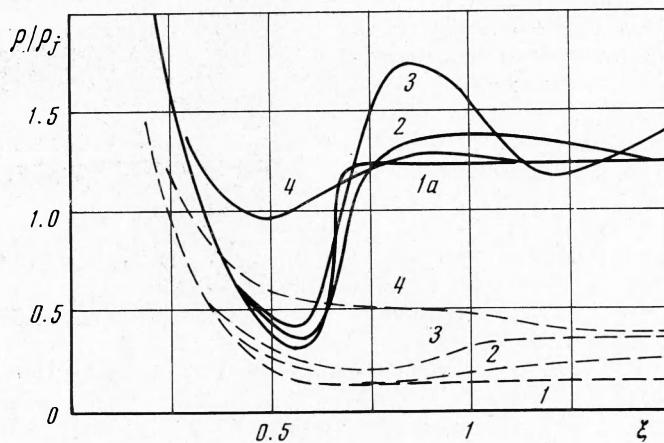


Фиг. 4

большом расстоянии за диском Маха (измерения проведены до $\xi = 2.5$) чередующиеся повышения и понижения ρ и p_0' не столь значительны, чтобы можно было говорить о переходе через скорость звука. Это приводит к выводу о возможности существования здесь достаточно протяженной (порядка нескольких L) области дозвукового течения. Определенное по измерениям плотности статическое давление в этой зоне вблизи оси струи составляет величину, примерно в 1.3 — 1.5 раза превышающую давление в затопленном пространстве. Кольцевое течение за диском Маха без циклической структуры регистрировалось также в экспериментах работы [17]. Данные

результаты указывают на то, что ряд гипотез [7, 15.] относительно характера течения за диском Маха, принимаемых для определения его местоположения, по-видимому, является спорным.

Из результатов, представленных на фиг. 4 и 5, следует, что на участке между срезом сопла и диском Маха при $R_L > 100$ влияние вязкости проявляется в основном только в слое смешения за висячим скачком уплотнения. При этом диаметр висячего скачка, расстояние до диска Маха и расположение параметров в изэнтропическом ядре при $R_L \geq 200$ близки к рассчитанным по модели идеальной жидкости [7], а толщины скачков уплотнения пренебрежимо малы.



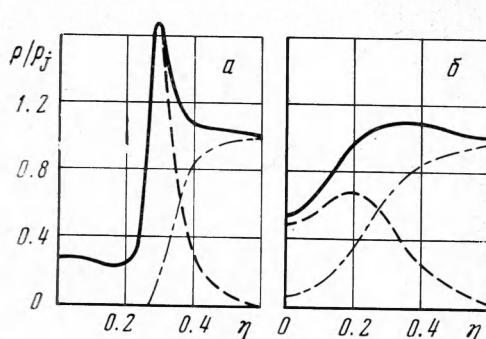
Фиг. 5

Сопоставление измеренных значений максимальной плотности в сжатом слое ρ_{\max} при $\xi = 0.6$, $R_L = 440$ и $R_L = 140$ (см. кривые 1 и 2 на фиг. 4, a) с рассчитанными величинами ρ_s за тонким висячим скачком показало, что $\rho_{\max} > \rho_s$. В то же время согласно изложенным ниже результатам экспериментов местоположение внутренней границы слоя смешения оказывается примерно соответствующим значению $\rho \approx \rho_{\max}$. На основании этого можно считать, что при $R_L > 100$ висячий скачок и слой смешения разделены друг от друга зоной невязкого течения.

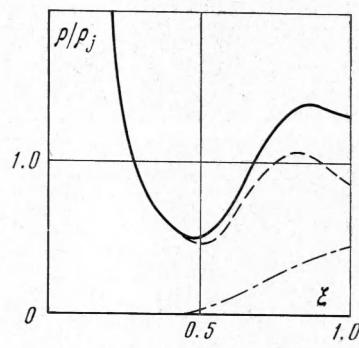
Для определения местоположения внутренней границы слоя смешения проводились измерения парциальных плотностей компонент в струе азота, истекающей из звукового сопла в затопленное пространство, содержащее смесь $N_2 + CO$. Окись углерода подавалась в барокамеру через специальный натекатель. Расходы N_2 и CO определялись по равновесным параметрам в критическом сечении и их диаметру. Результаты измерений попечных и продольных распределений представлены на фиг. 6 и 7. Здесь сплошными кривыми обозначена суммарная плотность смеси, пунктирными — плотность азота, а штрихпунктирными — плотность CO . Поперечные распределения на фиг. 6, a и b измерены в сечении $\xi = 0.55$ и соответствуют двум различным режимам: a — $R_L = 157$, $N = 8.85 \cdot 10^4$, b — $R_L = 20$, $N = 8.5 \cdot 10^4$. Параметры для осевого распределения (фиг. 7) соответствуют $R_L = 20$, $N = 8.5 \cdot 10^4$.

Из фиг. 6, a четко видно, что для случая $R_L = 157$ проникновение компоненты CO становится пренебрежимо малым при значениях координаты η , соответствующих значению $\rho = \rho_{\max}$ на кривой суммарной плотности, что дает право определить эту координату и положение внутренней границы слоя смешения.

Перестройку описанной картины течения при уменьшении числа R_L можно проследить по сериям кривых на фиг. 4 и 5. Здесь можно видеть постепенное утолщение висячего скачка, диска Маха и слоя смешения. При этом диаметр висячего скачка уменьшается, тогда как положение диска Маха остается практически неизменным. При $R_L < 100$ максимальное значение плотности в сжатом слое, измеренное в экспериментах, становится ниже расчетного за тонким косым скачком, что указывает на слияние зон скачка и слоя смешения. Сжатый слой становится полностью вязким, а его утолщение при уменьшении R_L вместе с утолщением диска Маха приводит к сокращению поперечных и продольных размеров ядра струи. Одновременно происходит существенное изменение характера течения за диском Маха. Из фиг. 4, б видно, как утолщение кольцевого вязкого слоя приводит к тому, что течение за диском Маха становится полностью вязким. Смыкание слоя смешения на оси приводит к повышению



Фиг. 6



Фиг. 7

измеряемых плотности и полного напора, и, как следует из рассмотрения продольных распределений ρ и p_0' , представленных на фиг. 5, это повышение распространяется в направлении против потока при уменьшении R_L пока не достигнет зоны диска Маха. При $R_L \approx 100$ смыкание вязкого слоя на оси происходит уже непосредственно за диском Маха, который при $R_L \approx 100$ нельзя считать изолированной прямой ударной волной. Утолщение вязкого слоя приводит также к увеличению его эжектирующего влияния на течение вблизи оси, вследствие чего в зоне за диском Маха может возникнуть область со сверхзвуковой скоростью.

При снижении числа R_L до величины порядка $5 \div 10$, когда ударные волны по плотности вырождаются и течение в струе становится практически полностью вязким, имеет место переход к так называемому режиму рассеяния [13]. Здесь длина свободного пробега молекул затопленного пространства становится соизмеримой с поперечными размерами сжатого слоя, вследствие чего проникновение молекул в ядро струи начинает приобретать свободно-молекулярный характер. Этот эффект при $R_L = 20$ показан на фиг. 6, б и 7.

Описанная перестройка картины течения при переходе к малым значениям R_L качественно иллюстрируется на фиг. 8 серией фотографий визуализации истечения струи при $N \approx 3000$ и $R_L = 155, 77, 40, 20$.

В предельном случае $R_L \rightarrow 0$ имеет место истечение в вакуум.

4. Выше отмечено, что при малых значениях числа R_L было обнаружено нарушение автомодельности по N в распределении параметров. Полученные в работе результаты позволяют указать причины этих нарушений.

Прежде всего отметим, что автомодельность распределений параметров по N на начальном участке носит приближенный характер и вы-

полняется тем лучше, чем больше N и чем большее расстояние рассматриваемого сечения от среза сопла. На небольших расстояниях от среза, где скорость истекающего газа еще заметно меньше предельной и закон распределения плотности отличается от закона (1.1), соответствующего течению от фиктивного источника, имеют место заметные отклонения от автомодельности.

Как показано выше, уменьшение числа R_L приводит к сокращению размеров ядра струи, связанному с утолщением вязкого сжатого слоя и диска Маха. При снижении R_L возможно наступление таких условий,

когда утолщающиеся вязкие зоны разрушают невязкое течение в ядре до того, как в нем будет сформирован гиперзвуковой поток.

Можно дать приближенную оценку границы нарушения автомодельности. Для этого предположим, что возмущение течения в ядре связано с утолщением диска Маха. Учет утолщения вязкого сжатого слоя практически не изменяет получающейся в итоге оценки.

Из результатов экспериментов данной работы, а также экспериментов по исследованию сферического расширения газа в окружающее пространство [16] следует, что толщины τ диска Маха и сферической ударной волны хорошо описываются выражением

$$\tau/L \approx 20/(20 + R_L) \quad (4.1)$$

Считая, что размазывание ударной волны в основном происходит вверх по потоку от континуального положения, получаем для размера x_1 невозмущенного течения в ядре следующую оценку:

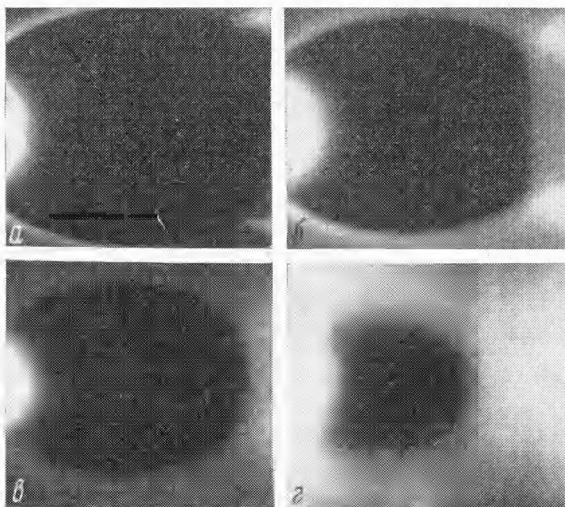
$$x_1/d_* \approx 0.67 N^{1/2}/(1 + 20/R_L) \quad (4.2)$$

В качестве меры заметного отклонения от автомодельности примем 10%-ное отличие скорости перед ударной волной от максимально достижимого значения по параметрам торможения. Тогда с точностью до 10% можно считать, что автомодельность имеет место при $x_1/d_* > 5$. Сопоставляя это с последним выражением, находим соответствующий каждому значению R_L диапазон N , в котором автомодельность распределения параметров по величине N должна выполняться

$$N > 100 (1 + 20/R_L)^2 \quad (4.3)$$

Из полученного выражения (4.3) следует, что с уменьшением числа R_L нарушение автомодельности имеет место при все более высоких значениях величины N . Этот вывод подтверждается приведенными выше экспериментальными данными.

Поступила 25 X 1972



Фиг. 8

ЛИТЕРАТУРА

1. Ребров А. К., Чекмарев С. Ф., Шарапутдинов Р. Г. Влияние разреженности на структуру свободной струи азота. ПМТФ, 1971, № 1.
2. Сухнев В. А. Об определении поправок к показаниям насадков полного напора в сверхзвуковом потоке разреженного газа. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 5.
3. Волчков В. В., Иванов А. В. Толщина и внутренняя структура прямого скачка уплотнения, образующегося при истечении сильно недорасширенной струи в пространство с малой плотностью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.
4. Ashkenas H. Z., Sherman F. S. The structure and utilization of supersonic free jets in low density wind tunnels. In: Rarefied Gas Dynamics, vol. 2, New York — London, Acad. Press., 1966.
5. Crist S., Sherman R. M., Glass D. R. Study of the highly underexpanded sonic jet. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 1. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 4.)
6. Авдуевский В. С., Иванов А. В., Карпман И. М., Трасковский В. Д., Юделович М. Я. Течение в сверхзвуковой вязкой недорасширенной струе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
7. Аверников Г. И., Ашратов Э. А., Волконская Т. Г., Дьяконов Ю. Н., Егорова М. И., Мельников Д. А., Росляков Г. С., Усков В. И. Сверхзвуковые струи идеального газа, ч. 1, 2. М., Изд-во МГУ, 1970.
8. Sibulkin M., Callahan W. Far-field approximation for a nozzle exhausting into a vacuum. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 6. (Рус. перев. Ракетная техника и космонавтика, 1963, № 6.)
9. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
10. Gusev V. N., Zhukova A. V. The flow of a viscous heat-conducting compressible fluids into a constant pressure medium. In: Rarefied Gas Dynamics, vol. 1, New York — London, Acad. Press., 1969.
11. Ребров А. К., Чекмарев С. Ф. Сферическое истечение вязкого теплопроводного газа в затопленное пространство. ПМТФ, 1971, № 3.
12. Knuth E. L. Supersonic molecular beams. Appl. Mech. Rev., 1964, vol. 17, No. 10.
13. Muntz E. P., Hamel B. B., McGuire B. L. Some characteristics of exhaust plume rarefaction. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 9. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1970, т. 8, № 9.)
14. Авдуевский В. С., Иванов А. В., Карпман И. М., Трасковский В. Д., Юделович М. Я. Влияние вязкости на течение в начальном участке сильно недорасширенной струи. Докл. АН СССР, 1971, т. 197, № 1.
15. Adamson T. C., Jr., Nicholls J. A. On the structure of jets from highly underexpanded nozzles into still air. J. Aero/Space Sci., 1959, vol. 26, No. 1.
16. Бочкирев А. А., Ребров А. К., Чекмарев С. Ф. О гиперзвуковом сферическом расширении газа со стационарной ударной волной. ПМТФ, 1969, № 5.
17. Dupreugat G., Giat M. Etude de jet en atmosphère raréfieé visualisation et mesure de densité. C. r. Acad. Sci., 1970, vol. 270, No. 24.