

УДК 519.6

Численные стохастические модели поверхности морского волнения и гигантских океанических волн*

К.В. Литвенко¹, С.М. Пригарин^{1,2}

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

²Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090
E-mails: litchristina@gmail.com (Литвенко К.В.), sergeim.prigarin@gmail.com (Пригарин С.М.)

Литвенко К.В., Пригарин С.М. Численные стохастические модели поверхности морского волнения и гигантских океанических волн // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 4. — С. 349–361.

Работа посвящена численному моделированию пространственно-временной стохастической структуры поверхности морского волнения и гигантских океанических волн-убийц. Численные алгоритмы строятся на основе условных спектральных моделей случайных полей и моделей временных рядов с использованием данных наблюдений. Изучаются оценки частоты возникновения гигантских волн на основе теории выбросов случайных процессов и полей.

Ключевые слова: численное моделирование случайных полей, условные спектральные модели, временные ряды, поверхность морского волнения, гигантские океанические волны.

Litvenko K.V., Prigarin S.M. Numerical stochastic models of the sea surface undulation and extreme ocean waves // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2014. — Vol. 17, № 4. — P. 349–361.

The paper deals with simulation of the time-space stochastic structure of the sea surface undulation and extreme ocean waves. Numerical algorithms are constructed on the basis of conditional spectral models and models of time series adapting data of observations. Estimates for frequencies of extreme waves appearance are studied on the basis of the theory of random processes and fields.

Key words: simulation of random fields, conditional spectral models, time series, sea surface undulation, extreme ocean waves (freak-waves, rogue waves).

Введение

Гигантские волны, известные как “блуждающие волны” или “волны-убийцы”, представляют собой мало изученное природное явление, существование которого долгое время ставилось под сомнение из-за отсутствия достоверных сведений. В отличие от цунами, одиночные гигантские волны высотой 20, 30 и более метров, значительно превышающие высоту окружающих волн, внезапно появляются и исчезают вдали от берега без видимых причин, иногда при относительно слабом ветре и волнении. Одна из первых записей гигантской волны была сделана измерительными приборами на нефтяной платформе “Драупнер” 1 января 1995 года у побережья Норвегии. Эту волну часто называют “новогодней”. Высота новогодней волны составила 25.6 м при средней высоте окружающего

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 11-01-00641, № 12-05-00169), Программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Фундаментальные проблемы математического моделирования” и государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ-5111.2014.1).

волнения около 12 м. В настоящее время ведутся интенсивные экспериментальные и теоретические исследования гигантских волн (см., напр., сайт научного проекта MaxWave, монографии [1, 2] и множество других работ). Специалисты предлагают разнообразные гипотезы для объяснения феномена гигантских “волн-убийц”. В качестве причин образования экстремально высоких волн рассматривают, в частности, дисперсионное сжатие волновых пакетов, геометрическое фокусирование волн, нелинейную модуляционную неустойчивость, взаимодействие волнения с течениями и атмосферными потоками и т. д. (см., напр., [2]). Однако общепринятой теории возникновения “волн-убийц” в настоящее время не существует. В нашей работе предполагается, что морское волнение может быть описано с помощью математических моделей стохастических процессов и полей, а гигантские волны соответствуют редким выбросам случайных функций. Для построения временных рядов, описывающих возвышение водной поверхности в одной точке, в нашей работе используются схемы авторегрессии и скользящего среднего. Для описания возникновения гигантских волн в пространстве используются условные спектральные модели случайных полей, предложенные в [3]. При этом предполагается, что поверхность морского волнения достаточно хорошо описывается пространственно-временным гауссовским случайным полем стационарным по времени и однородным в пространстве. Численные модели морской поверхности, основанные на этом предположении, использовались, в частности, для решения ряда прикладных задач методом Монте-Карло [4–7]. Кроме спектра случайного поля, для моделирования гигантской волны необходима дополнительная информация о профиле волны, т. е. должны быть заданы значения поля возвышений морской поверхности в некоторых точках в заданные моменты времени. В численных экспериментах, результаты которых представлены в данной работе, фиксировался экстремально высокий уровень поверхности в точках на гребне волны. Условные спектральные модели позволяют численно моделировать множество независимых пространственно-временных реализаций морской поверхности, проходящих через заданные точки, и, таким образом, исследовать характерные особенности развития и распространения гигантских волн. В частности, несколько неожиданным результатом проведенных вычислительных экспериментов оказалось появление групп из трех гигантских волн в то время как экстремальный уровень волнения фиксировался лишь в одной точке. Такой тип гигантских волн хорошо известен по наблюдениям и носит название “три сестры”.

В работе представлены стохастические алгоритмы, использованные для имитации морского волнения и экстремально высоких волн, приводятся результаты моделирования, а также изучаются оценки частоты возникновения гигантских волн на основе теории выбросов случайных процессов и полей.

1. Стохастические спектральные модели поверхности морского волнения

Экспериментальные данные о статистических свойствах ветрового волнения водной поверхности свидетельствуют о том, что оно с высокой точностью может быть описано однородным гауссовским случайным полем возвышений относительно среднего уровня [8, 9]. Один из общих подходов к разработке численных алгоритмов моделирования однородных гауссовских полей основан на использовании спектрального разложения. Среди множества публикаций, посвященных этому подходу, отметим наиболее ранние работы [10–13], работы [14, 15], в которых было предложено комбинировать разбиение спектрального пространства с рандомизацией спектра, работы [16, 17], а также монографии

[18, 19], где можно найти дополнительную информацию и ссылки.

Рассмотрим вещественное однородное гауссовское случайное поле $w(x)$, $x \in R^k$, с нулевым средним, единичной дисперсией и корреляционной функцией $R(x) = Ew(x+y)w(y)$. Спектральные представления случайного поля и его корреляционной функции можно записать в виде:

$$w(x) = \int_P \cos \langle x, \lambda \rangle \xi(d\lambda) + \int_P \sin \langle x, \lambda \rangle \eta(d\lambda), \quad R(x) = \int_P \cos \langle x, \lambda \rangle \nu(d\lambda). \quad (1)$$

где $\xi(d\lambda)$, $\eta(d\lambda)$ — вещественные ортогональные стохастические гауссовские меры на “спектральном пространстве” P (т. е. P — измеримое множество в R^k такое, что $P \cap -P = \{0\}$), $\nu(d\lambda)$ — спектральная мера случайного поля $w(x)$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в R^k .

Основная идея, лежащая в основе методов построения спектральных моделей, состоит в том, чтобы в качестве численной модели случайного поля $w(x)$ использовать некоторую аппроксимацию стохастического интеграла в (1). В частности, спектральную модель можно построить следующим образом. Зафиксируем некоторое разбиение спектрального пространства $P = \sum_{j=1}^n Q_j$, $Q_j \cap Q_i = \emptyset$, для $i \neq j$. В качестве аппроксимации (1) рассмотрим

$$w_n(x) = \sum_{j=1}^n a_j [\xi_j \cos \langle \lambda(j), x \rangle + \eta_j \sin \langle \lambda(j), x \rangle], \quad a_j = \nu^{1/2}(Q_j). \quad (2)$$

Здесь n — число гармоник спектральной модели, ξ_j , η_j — независимые стандартные нормальные случайные величины, а векторы $\lambda(j) \in P$ принадлежат соответствующим множествам разбиения Q_j . Конкретный численный алгоритм определяется разбиением спектрального пространства P и способом выбора $\lambda(j) \in Q_j$. В работах [14, 15, 20] были разработаны рандомизированные спектральные модели, для которых векторы $\lambda(j)$ выбираются случайным образом по распределению, индуцированному спектром. Рандомизация позволяет в точности воспроизвести спектр случайного поля, однако численная модель при этом является гауссовской лишь асимптотически. Нерандомизированные спектральные модели (для которых векторы $\lambda(j)$ не являются случайными) имеют гауссовские конечномерные распределения и дискретный спектр. О различных модификациях спектральных моделей, их свойствах и сходимости смотри, например, [18].

Исследованию спектра морского волнения посвящено множество работ, в частности [8, 9]. В нашей работе используется спектральная модель морской поверхности $w(x_1, x_2)$ на основе следующего представления спектра:

$$\nu(d\lambda_1 d\lambda_2) = f(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2, \quad \lambda_1 \in (0, +\infty), \quad \lambda_2 \in (-\infty, +\infty), \quad (3)$$

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = S_{\rho\theta}(\rho, \theta) \rho^{-1}, \quad \rho = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{1/2}, \quad \theta = \arg(\lambda_1 + i\lambda_2) \in [-\pi/2, \pi/2], \quad (4)$$

$$S_{\rho\theta}(\rho, \theta) = Q(\rho, \theta) S_\rho(\rho), \quad S_\rho(\rho) = 0.5(g/\rho)^{1/2} S((g\rho)^{1/2}), \quad (5)$$

$$S(\mu) = \begin{cases} 6m_0 (\mu_{\max}/\mu)^5 \mu^{-1} \exp\{-1.2[(\mu_{\max}/\mu)^5 - (\mu_{\max}/\mu_1)^5]\}, & \mu \in [0, \mu_1], \\ S(\mu_1) + (S(\mu_2) - S(\mu_1))(\mu - \mu_1)/(\mu_2 - \mu_1), & \mu \in (\mu_1, \mu_2), \\ 0.0078g^2\mu^{-5}, & \mu \in [\mu_2, \mu_3], \end{cases} \quad (6)$$

$$Q(\rho, \theta) = 2\pi^{-1} \cos^2 \theta. \quad (7)$$

“Частотный” спектр S и “угловой” спектр Q заимствованы из [8]. При этом $\mu_3 \approx 30 \text{ с}^{-1}$ — верхняя граница частотного спектра гравитационных волн, μ_{\max} — частота спектрального максимума частотного спектра S , g — ускорение свободного падения,

$\mu_1 = 1.8\mu_{\max}\tilde{\mu}^{(-0.7)}$, $\mu_2 = 2.0\mu_{\max}\tilde{\mu}^{(-0.7)}$, $\tilde{\mu} = v\mu_{\max}g$, $m_0 = 0.00127g^{-2}v^4\tilde{\mu}^{(-3.19)}$, v — скорость ветра (м/с) на высоте 10 м над уровнем моря (в формулах, приведенных выше, предполагается, что направление ветра совпадает с осью OX). Статистические свойства морского волнения в рамках этой модели определяются двумя параметрами: скоростью ветра v и частотой спектрального максимума μ_{\max} .

Существенным преимуществом, которое выделяет спектральные модели среди множества других методов численного моделирования морского волнения, является сравнительно простой переход от пространственных моделей к пространственно-временным. Если пространственная спектральная модель поля возвышений морской поверхности относительно среднего уровня записывается в виде

$$w_n(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^n a_j [\xi_j \cos(\lambda_1(j)x_1 + \lambda_2(j)x_2) + \eta_j \sin(\lambda_1(j)x_1 + \lambda_2(j)x_2)],$$

то соответствующая пространственно-временная модель имеет вид

$$w_n(x_1, x_2, t) = \sum_{j=1}^n a_j [\xi_j \cos(\varphi_j(x_1, x_2, t)) + \eta_j \sin(\varphi_j(x_1, x_2, t))],$$

$$\varphi_j(x_1, x_2, t) = \lambda_1(j)x_1 + \lambda_2(j)x_2 + \mu(j)t,$$

где $\mu(j)$ связаны с $\lambda_1(j)$, $\lambda_2(j)$ дисперсионным соотношением

$$\mu(j)^2 = g\rho_j \tanh(\rho_j H), \quad \rho_j = [\lambda_1^2(j) + \lambda_2^2(j)]^{1/2}.$$

В случае глубокой воды (при больших глубинах H), который рассматривается в дальнейшем, дисперсионное соотношение принимает вид

$$\mu(j) = \sqrt{g\rho_j}.$$

Физически это означает, что волна длиной $L = 2\pi/\rho$ на водной поверхности бежит с фиксированной скоростью $\sqrt{gL/(2\pi)} = \mu/\rho$, где $\mu = \sqrt{g\rho}$.

2. Условные спектральные модели и моделирование гигантских волн

В этом пункте представим новый метод построения случайных пространственно-временных реализаций морской поверхности с аномально высокими волнами (рис. 1, 2). Данный метод основан на условных спектральных моделях [3, 18]. Предположим, что требуется построить численную модель гауссовского однородного случайного поля $w(x)$ с нулевым средним при дополнительном условии $w(x_m) = b_m$, $m \in \{1, 2, \dots, M\}$.

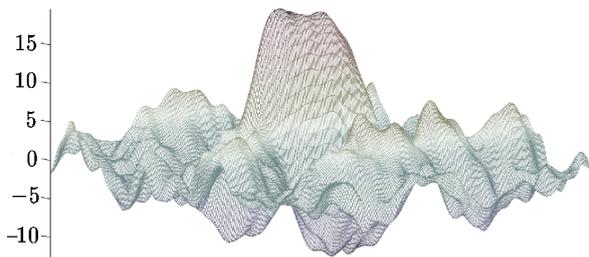


Рис. 1. Пример моделирования экстремально высокой волны (реализация условной спектральной модели с одним фиксированным значением)

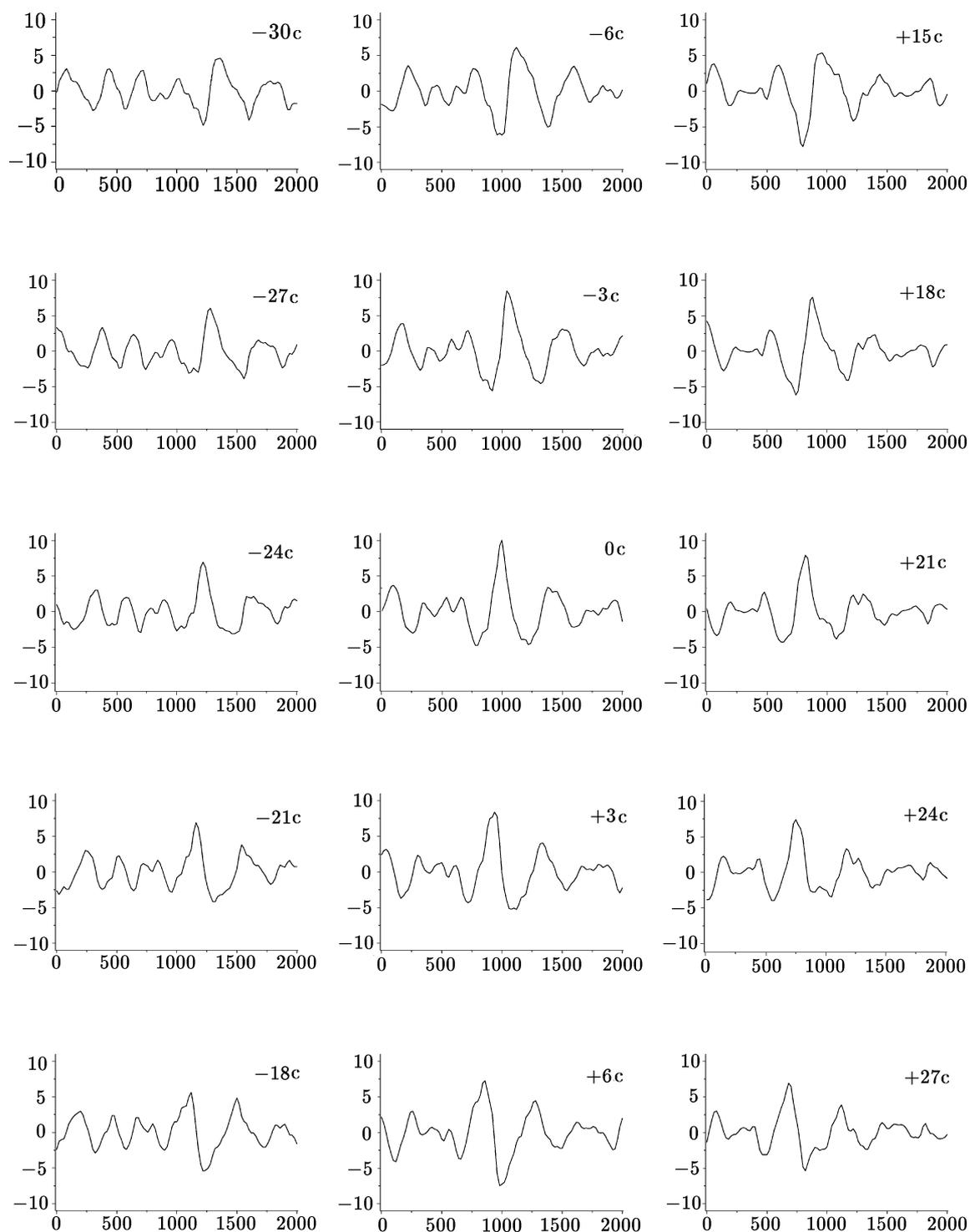


Рис. 2. Гигантская волна “три сестры”. Пространственно-временная условная спектральная модель использовалась для моделирования экстремально высокой волны с возвышением 10 м над средним уровнем (см. центральный рисунок в третьем ряду). Кроме основной гигантской волны, представленной в центральной части, наблюдаются две другие, до и после основной (их профили представлены слева и справа). В правом верхнем углу для каждого профиля морской поверхности дано его смещение по времени (в секундах)

Условной спектральной моделью будем называть численную аппроксимацию (2), которая строится следующим образом. На первом этапе определяются значения a_j и моделируются векторы $\lambda(j)$ согласно выбранной спектральной модели. На втором этапе моделируется гауссовский случайный вектор с компонентами $\xi_j, \eta_j, j = 1, \dots, n$, и условным распределением, порождаемым равенствами

$$w_n(x_m) = b_m, \quad m \in \{1, 2, \dots, M\}. \quad (8)$$

Для описания этого условного распределения представим (8) в виде

$$\sum_{j=1}^n d_{mj} \xi_j + d'_{mj} \eta_j = b_m, \quad m = 1, \dots, M, \\ d_{mj} = a_j \cos\langle \lambda(j), x_m \rangle, \quad d'_{mj} = a_j \sin\langle \lambda(j), x_m \rangle. \quad (9)$$

Обозначим

$$\zeta = (\xi^\top, \eta^\top)^\top, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix},$$

и рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} d_{11}, \dots, d_{1n}, & d'_{11}, \dots, d'_{1n} \\ \dots & \dots \\ d_{M1}, \dots, d_{Mn}, & d'_{M1}, \dots, d'_{Mn} \end{bmatrix}.$$

Условное распределение вектора ζ , обеспечивающего (8), будет гауссовским с математическим ожиданием

$$m_\zeta = A^+ b \quad (10)$$

и корреляционной матрицей

$$K_\zeta = I - A^+ A. \quad (11)$$

Для моделирования ζ можно использовать формулу $\zeta = m_\zeta + G\varepsilon$, где ε — вектор из независимых стандартных нормальных случайных величин, и $GG^\top = K_\zeta$. Так как K_ζ — проектор ($K_\zeta^\top = K_\zeta, K_\zeta^2 = K_\zeta$) на подпространство размерности $2n - \text{rang}(A) = \dim(\ker(A))$, то можно брать $G = K_\zeta$.

Замечание 1.

1. Для вычисления матриц A^+, A^+A и $I - A^+A$ могут быть использованы различные методы, в том числе и рекуррентные [18, 19].

2. На практике, как и в рассмотренных ниже примерах, число гармоник спектральной модели значительно превышает число точек, через которые проходят реализации спектральных моделей, и система линейных уравнений (9) является совместной. Однако в общем случае система (9) относительно ξ_j, η_j может оказаться несовместной. Тогда распределение гауссовского случайного вектора ζ с математическим ожиданием (10) и корреляционной матрицей (11) соответствует совместной системе $A^\top A \zeta = A^\top b$ и минимизирует величину $\|A\zeta - b\| = \sum_{m=1}^M [w_n(x_m) - b_m]^2$ (детали в [3, 18]). Таким образом, условные спектральные модели позволяют моделировать реализации случайных полей, проходящие через заданные точки либо наиболее близко к этим точкам приближающиеся.

3. Оценка погрешности спектральных и условных спектральных моделей является сложной проблемой, которая рассмотрена, в частности, [18, 19]). Спектр (3)–(7), используемый для описания морской поверхности, непрерывный и имеет ограниченный носитель.

В этом случае общие результаты, представленные в только что упомянутых монографиях, гарантируют для (условных) спектральных моделей сходимость конечномерных распределений, а также слабую сходимость в пространствах интегрируемых, непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций, если разбиения спектрального пространства в (2) удовлетворяют условию $\max_{j=1,\dots,n} \text{diam}(Q_j) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.

Вычислительные эксперименты проводились для модели морской поверхности со спектром (3)–(7) и параметрами:

$$\mu_{\max} = 0.4 \text{ с}^{-1}, \quad v = 7 \text{ м/с}. \quad (12)$$

Соответствующее однородное гауссовское случайное поле имеет дисперсию 1.74 м^2 . Условная спектральная модель строилась при дополнительном требовании, состоящем в том, что в одной (центральной) точке (x_0, y_0) рассматриваемого участка возвышение поверхности над средним уровнем достигает 10 м в момент времени t_0 :

$$w(x_0, y_0, t_0) = 10 \text{ м}. \quad (13)$$

На рис. 2 представлены профили морской поверхности, построенные с помощью условной спектральной модели на участке длиной 2000 м для различных моментов времени. Видно, что перед экстремально высокой волной и за ней появляются глубокие впадины. Как показало моделирование, несмотря на то, что условная спектральная модель учитывает только равенство (13), кроме основной гигантской волны возникают еще две экстремально высокие волны чуть меньшего размера до и после основной с промежутком примерно 20 с . Это соответствует “волне-убийце”, известной под названием “три сестры”.

Пример реализации условной спектральной модели с фиксированными значениями уровня морской поверхности в нескольких точках приведен на рис. 3 справа. Здесь поверхность проходит через пять экстремально высоких точек (высота над средним уровнем — 7 м), расположенных на одной линии с интервалом 150 м , что “порождает” высокую волну вытянутой формы, которая видна в центре рисунка.

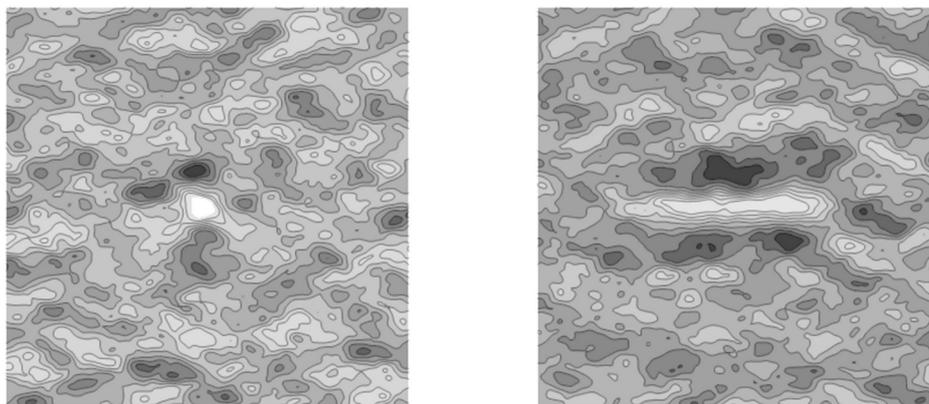


Рис. 3. Рельефы морской поверхности со спектром (12) на площади $2000 \times 2000 \text{ м}^2$ с экстремально высокими волнами различной формы. Здесь представлены реализации условных спектральных моделей при фиксированных значениях уровня морской поверхности в одной (слева) и пяти (справа) точках поверхности (см. пояснения в тексте)

Результаты теории выбросов случайных процессов и полей позволяют вычислить среднее число экстремально высоких волн для рассматриваемой модели морского волнения на определенном участке или за известный промежуток времени выше заданного уровня. Соответствующие формулы имеют вид (см., напр., [21, 22]):

$$N_{xy}(C) = \frac{C}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma_0^3} \sqrt{K_1K_2 - K_{12}^2} \exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma_0^2}\right) \Delta S, \quad (14)$$

$$N_t(C) = (2\pi)^{-1}(\sigma_1/\sigma_0) \exp\left(-C^2/(2\sigma_0^2)\right) \Delta T, \quad C > 0. \quad (15)$$

Здесь $N_t(C)$ — среднее число волн выше уровня C за интервал времени ΔT , $N_{xy}(C)$ — среднее число волн выше уровня C на участке волнения площадью ΔS (в фиксированный момент времени), σ_0^2 — дисперсия случайного поля, $\sigma_1^2 = \int_0^\infty \mu^2 S(\mu) d\mu$,

$$K_1 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \lambda_1^2 f(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2, \quad K_2 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \lambda_2^2 f(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2,$$

$$K_{12} = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \lambda_1 \lambda_2 f(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2.$$

Под уровнем C понимается высота над средним уровнем взволнованной поверхности. Ряд значений $N_t(C)$ и $N_{xy}(C)$ для модели морского волнения (3)–(7) с параметрами:

$$\mu_{\max} = 0.3 \text{ с}^{-1}, \quad v = 10 \text{ м/с} \quad (16)$$

и дисперсией 5.84 м^2 представлены в таблице, в которой $N_t(C)$ — среднее число волн

C (м)	$N_t(C)$	$N_{xy}(C)$
5	2.484×10^5	7.439×10^2
6	9.681×10^4	3.475×10^2
7	3.179×10^4	1.330×10^2
8	8.795×10^3	4.200×10^1
9	2.050×10^3	1.099×10^1
10	4.027×10^2	2.395×10^0
11	6.663×10^1	4.351×10^{-1}
12	9.291×10^0	6.604×10^{-2}
13	1.091×10^0	8.385×10^{-3}
14	1.081×10^{-1}	8.915×10^{-4}
15	9.009×10^{-3}	7.944×10^{-5}
16	6.329×10^{-4}	5.936×10^{-6}

выше уровня C за год, $N_{xy}(C)$ — среднее число волн выше уровня C на площади 100 км^2 (в фиксированный момент времени) для модели морской поверхности (3)–(7), (16). Можно дать следующую интерпретацию значений $N_t(C)$ для $C = 13 \text{ м}$, 14 м и 15 м из таблицы. Предположим, что 100 морских судов находятся в плавании на достаточно большом расстоянии друг от друга в условиях морского волнения со спектром (3)–(7), (16). Тогда в среднем за год произойдет примерно 1 встреча с гигантской волной выше 30 м (высота волны h соответствует уровню $C = h/2$), 11 встреч с волнами высотой выше 28 м и

109 встреч с волнами высотой выше 26 м.

3. Моделирование морского волнения и гигантских волн с помощью временных рядов

В данном пункте рассматривается задача построения стационарных временных рядов неограниченной длины, моделирующих морское волнение, и поиска участков с экстремально высокими волнами. Такой подход является альтернативным по отношению к условным моделям, когда реализации на определенном участке гарантированно имеют экстремальные значения. И хотя для моделирования редких событий может потребоваться значительное время, этот подход позволяет определять дополнительные статистические характеристики морского волнения (распределения промежутков между волнами

различной высоты, например). Очевидно, что для решения этой задачи спектральные модели непригодны, так как их реализации представляют собой суммы конечного числа гармоник и являются почти периодическими функциями.

В качестве исходных данных использовалась запись “новогодней” волны, представленная на рис. 4. Наибольший уровень волнения 18.5 м зафиксирован в момент времени 26 с. Оценки автокорреляционной функции и спектральной плотности строились по участку записи, начиная с момента времени 270 с. Приведем соотношения, которые использовались для оценивания автокорреляционной функции R_n и спектральной плотности $S_1(\lambda)$ по наблюдаемой реализации стационарной последовательности $w(n)$, $n = 0, \dots, N$:

$$R_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-k} w(k+n)w(k), \quad R_{-n} = R_n, \quad n = 0, \dots, N, \tag{17}$$

$$S_1(\mu) = \pi^{-1} \sum_{n=-N}^N \exp(-i\mu n)R_n, \quad \mu \in [0, \pi).$$

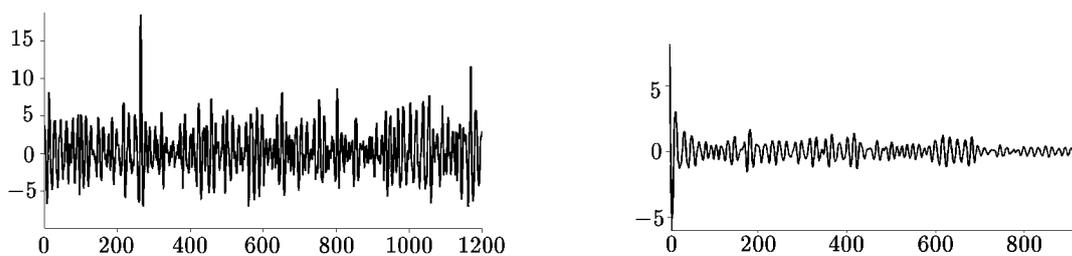


Рис. 4. “Новогодняя” волна: уровень волнения (м) в зависимости от времени (с) на верхнем рисунке (слева), автокорреляционная функция, построенная по стационарному участку новогодней волны (270–1200 с), на верхнем рисунке (справа) и оценка спектральной плотности — на нижнем

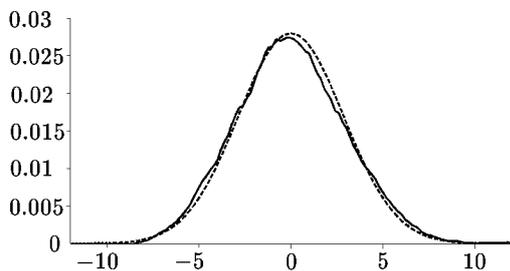
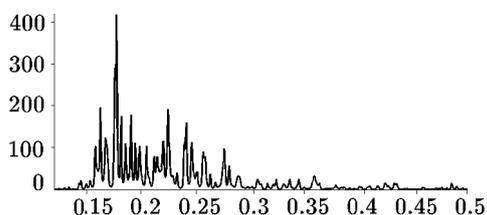


Рис. 5. Гистограмма возвышений, построенная по записи “новогодней” волны (сплошная линия), и ее аппроксимация гауссовским распределением (штриховая линия)

ны традиционные схемы авторегрессии и скользящего суммирования. Коэффициенты авторегрессии были найдены методом Юла–Уолкера для максимально возможного порядка авторегрессии, который составлял величину около 2000 и определялся стационарным участком “новогодней” волны (модель строилась по записи “новогодней” волны с

Заметим, что формула (17) обеспечивает положительную определенность оценки корреляционной функции R_n . При построении численных моделей предполагалось, что волнение морской поверхности описывается гауссовской функцией. Гистограмма, построенная по “новогодней” волне, хорошо согласуется с этим предположением (см. рис. 5).

Для имитации уровня возвышения морской поверхности в последовательные моменты времени были использованы

временным шагом 0.47 с). Примеры реализаций с выбросами (экстремальными волнами) приведены на рис. 6.

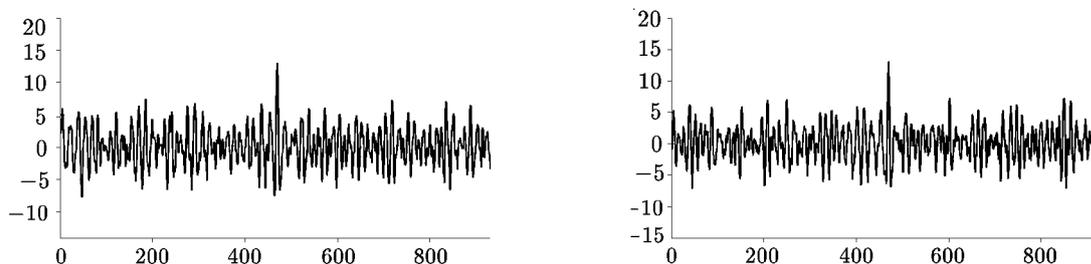


Рис. 6. Графики уровня возвышения (м) морской поверхности в зависимости от времени (с). Представлены участки с экстремально высокими волнами, построенные с помощью модели авторегрессии с корреляционной функцией “новогодней” волны

Как уже отмечалось, результаты теории выбросов случайных процессов позволяют вычислить ряд характеристик для экстремальных волн. Предположим, что возвышение морской поверхности (в некоторой точке) относительно среднего уровня в зависимости от времени описывается стационарным гауссовским процессом $w(t)$. Тогда среднее число волн $N_t(C)$ выше уровня C за промежуток времени ΔT определяется выражением (15), а средняя длительность выбросов $\tau(C)$ процесса $w(t)$ за уровень C и средняя длительность интервалов $\theta(C)$ между выбросами (экстремальными волнами) вычисляются по формулам:

$$\tau(C) = 2\pi(\sigma_0/\sigma_1)[1 - \Phi(C/\sigma_0)] \exp(C^2/(2\sigma_0^2)), \quad \theta(C) = 2\pi(\sigma_0/\sigma_1)\Phi(C/\sigma_0) \exp(C^2/(2\sigma_0^2)).$$

Здесь σ_0^2 — дисперсия случайного процесса $w(t)$, σ_1^2 — дисперсия его производной, а Φ — функция стандартного нормального распределения. Под уровнем C понимается высота над средним уровнем взволнованной поверхности. Для спектра “новогодней” волны $\sigma_0 = 2.86$ м, $\sigma_1 = 1.63$ м/с. Ряд соответствующих значений $N_t(C)$, $\tau(C)$, $\theta(C)$ представлен на рис. 7.

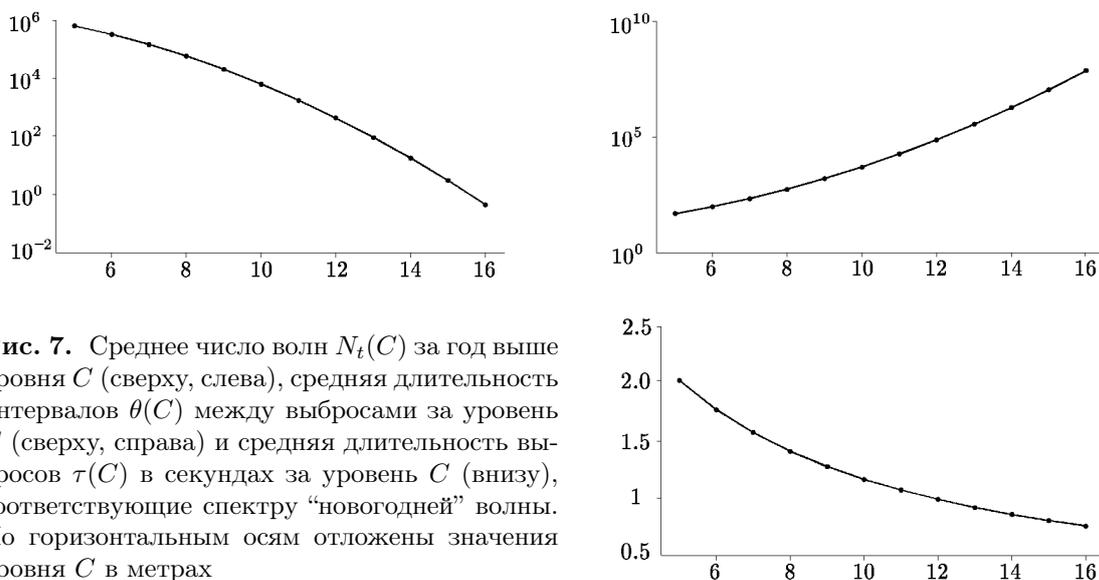


Рис. 7. Среднее число волн $N_t(C)$ за год выше уровня C (сверху, слева), средняя длительность интервалов $\theta(C)$ между выбросами за уровень C (сверху, справа) и средняя длительность выбросов $\tau(C)$ в секундах за уровень C (внизу), соответствующие спектру “новогодней” волны. По горизонтальным осям отложены значения уровня C в метрах

Спектральная плотность $S(\mu)$ определялась формулой $S(\mu) = hS_1(\mu h)$, $\mu \in (0, \pi/h)$, где h — шаг по времени для записи новогодней волны.

Замечание 2. Данные, представленные на рис. 7, касаются превышения различных уровней поверхностью морского волнения в соответствии со спектром, полученным по записи “новогодней” волны, и стационарной гауссовской моделью. О высоте волн (высота волны измеряется от впадины до гребня) эти данные дают лишь приблизительное представление. Различные характеристики поверхности морского волнения и экстремально высоких волн, которые не поддаются теоретическому анализу, могут быть исследованы с помощью статистического моделирования.

Заключительные замечания и благодарности

Предварительные результаты численного моделирования морской поверхности с аномально высокими волнами с помощью условных спектральных моделей случайных полей позволяют предположить, что данный подход может оказаться перспективным средством для анализа формирования и динамики гигантских волн в океане, а также для исследования воздействия экстремально высоких волн на морские суда и сооружения. Следует отметить, что спектральные модели могут быть построены для различных типов морского ветрового волнения и зыби. Важно лишь, чтобы информация о спектре волнения была как можно более полной. Кроме того, условные спектральные модели позволяют учитывать дополнительную информацию о форме гигантской волны, если такая имеется.

Особый интерес представляет вопрос об адекватности оценок среднего числа и вероятности возникновения аномально высоких волн на основе теории выбросов случайных полей. Для этого требуется обширная статистика появления гигантских волн в океане и информация о спектре морского волнения, при котором эти волны наблюдались. Хотя такая статистика пока недоступна, можно сопоставить теоретические результаты с экспериментальными наблюдениями, которые активно проводятся в настоящее время (см., напр., [23–25]). Приведем два примера. Анализ данных, полученных с помощью гидрографических буев около западного побережья США, показал [25], что в открытом океане наблюдалось в среднем 38 аномально высоких волн за год, вершины которых превышали уровень $6\sigma_0$, где σ_0 — среднеквадратическое отклонение поля возвышений морской поверхности над средним уровнем. Аналогичные расчеты по формуле (15) дают соответствующее значение 8 для спектра (6), (16) и 11 аномально высоких волн за год для спектра “новогодней” волны. Для спектра Пирсона–Московица формула (15) дает в среднем 23 аномально высоких волны за год (этот спектр определяется скоростью ветра, которую мы взяли равной 10 м/с, как и для спектра (6), (16)). В качестве второго примера приведем работу [23], в которой говорится о том, что при обработке спутниковых данных для 34000 водных участков по 50 м² каждый была обнаружена одна волна высотой 28 м. В то же время, согласно формуле (14), среднее число волн, превышающих уровень 15 м на соответствующей площади, равно 13 для спектра (3)–(7), (16) (высота волны измеряется от ее основания до вершины, что в два раза больше амплитуды в случае гармонической волны). Таким образом, можно сделать предварительный вывод о качественном соответствии результатов, полученных с помощью теории выбросов, экспериментальным данным. Отметим следующие трудности, с которыми приходится сталкиваться при сравнении теоретических результатов с наблюдениями. Теория выбросов дает простые формулы лишь для среднего числа пересечения уровня, но не для высоты волн,

которая измеряется экспериментально. Кроме того, среднее число пересечений чувствительно к высокочастотным составляющим спектра волнения, экспериментальные оценки и аппроксимация которых должны отличаться повышенной точностью.

В заключение укажем также на проблему выбора параметров спектральной модели, которая требует дополнительных теоретических и экспериментальных исследований. Известно, что число гармоник спектральной модели и само разбиение спектрального пространства могут существенно влиять на характер реализаций. Чем больше участок, на котором моделируется морская поверхность, и чем больше временной интервал, тем больше гармоник необходимо моделировать. Теоретическое исследование погрешности условных спектральных моделей весьма затруднительно. Один из приемов, который здесь может оказаться полезным, это последовательное уточнение спектральных моделей “на одном вероятностном пространстве”, смотри [18, 19].

Благодарности. Авторы благодарны Г.А. Михайлову и В.А. Огородникову за полезные замечания, а также Е.Н. Пелиновскому и А.В. Слюняеву за предоставленные экспериментальные данные по морскому волнению.

Литература

1. **Pelinovsky E., Kharif Ch.** Extreme Ocean Waves / E. Pelinovsky, Ch. Kharif. — Berlin: Springer, 2008.
2. **Куркин А.А., Пелиновский Е.Н.** Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. — Нижний Новгород: Нижегородский государственный технический университет, 2004.
3. **Prigarin S.M.** Conditional spectral models of Gaussian homogeneous fields // Russ. J. of Numerical Analysis and Math. Modelling. — 1998. — Vol. 13, № 1. — P. 57–68.
4. **Анваров С.Р., Пригарин С.М.** Численное моделирование пространственно-временной структуры поверхности морского волнения для решения оптических задач // Оптика атмосферы и океана. — 1994. — Т. 7, № 5. — С. 685–693.
5. **Kargin V.A., Oppel U.G., and Prigarin S.M.** Simulation of the undulated sea surface and study of its optical properties by Monte Carlo method // Proc. SPIE. — 1999. — Vol. 3583. — P. 316–324.
6. **Каргин В.А., Пригарин С.М.** Имитация поверхности морского волнения и исследование ее оптических свойств методом Монте-Карло // Оптика атмосферы и океана. — 1992. — Т. 5, № 3. — С. 285–291.
7. **Товстик П.Е., Товстик Т.М., Шеховцов В.А.** О влиянии формы спектральной плотности случайного волнения на колебания морской стационарной платформы // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета. — 2012. — Сер. 1, вып. 2. — С. 61–68.
8. **Давидан И.М., Лопатухин Л.И., Рожков В.А.** Ветровое волнение в Мировом океане. — Л.: Гидрометеоздат, 1985.
9. **Крылов Ю.М.** Спектральные методы исследования и расчета ветровых волн. — Л.: Гидрометеоздат, 1966.
10. **Kraichnan R.H.** Diffusion by a random velocity field // Phys. Fluids. — 1970. — Vol. 13, № 1. — P. 22–31.
11. **Matheron G.** The intrinsic random functions and their applications // Advances in Applied Probability. — 1973. — № 5. — P. 439–468.
12. **Orfeuil J.P.** Simulation du Wiener-Lévi et de ses Intégrales. — Fontainebleau: Centre de Morphologie Mathématique, 1972. — (Internal report).

13. **Shinozuka M.** Simulation of multivariate and multidimensional random processes // J. of Acoust. Soc. Am. — Vol. 49. — P. 357–368.
14. **Михайлов Г.А.** Численное построение случайного поля с заданной спектральной плотностью // ДАН СССР. — 1978. — Т. 238, № 4. — С. 793–795.
15. **Михайлов Г.А.** Приближенные модели случайных процессов и полей // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1983. — Т. 23, № 3. — С. 558–566.
16. **Kurbanmuradov O.** Weak convergence of approximate models of random fields // Russ. J. Num. Anal. and Math. Modell. — 1995. — Vol. 10, № 6. — P. 500–517.
17. **Kramer P., Kurbanmuradov O., and Sabelfeld K.** Comparative analysis of multiscale Gaussian random field simulation algorithms // J. Comp. Phys. — 2007. — Vol. 226, iss. 1. — P. 897–924.
18. **Prigarin S.M.** Spectral Models of Random Fields in Monte Carlo Methods. — Utrecht: VSP, 2001.
19. **Пригарин С.М.** Методы численного моделирования случайных процессов и полей. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2005.
20. **Михайлов Г.А.** Оптимизация весовых методов Монте-Карло. — М.: Наука, 1987.
21. **Свешников А.А.** Прикладные методы теории случайных функций. — М.: Наука, 1968.
22. **Тихонов В.И., Хищенко В.И.** Выбросы траекторий случайных процессов. — М.: Наука, 1987.
23. **Lehner S.H.** Extreme wave statistics from radar data sets // Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2004. IGARSS'04. Proc. 2004 IEEE International. — Vol. 3. — P. 1880–1883.
24. **Nikolkina I., Didenkulova I.** Rogue waves in 2006–2010 // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. — 2011. — Vol. 11. — P. 2913–2924.
25. **Baschek B., Imai J.** Rogue wave observations off the US West Coast // Oceanography. — 2011. — Vol. 24, № 2. — P. 158–165.

*Поступила в редакцию 4 октября 2013 г.,
в окончательном варианте 29 октября 2013 г.*

