

AMS subject classification: 65L05, 65L06

## Семейство высокоустойчивых блочных методов со второй производной для жестких ИЗ в ОДУ

Р.И. Окуонгае, М.Н.О. Ихиле

Department of Mathematics, University of Benin, P.M.B 1154, Benin City, Edo state, Nigeria  
E-mails: okunoghae01@yahoo.co.uk (Окуонгае Р.И.), mnoikhilo@yahoo.co.uk (Ихиле М.Н.О.)

**Окуонгае Р.И., Ихиле М.Н.О.** Семейство высокоустойчивых блочных методов со второй производной для жестких ИЗ в ОДУ // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 1. — С. 67–81.

В данной статье рассматривается класс высокоустойчивых блочных методов для численного решения начальных задач (ИЗ) в обыкновенных дифференциальных уравнениях (ОДУ). Граничное место точек предлагаемых параллельных одноблочных алгоритмов с выходными точками  $r$  показывает, что новые схемы являются  $A$ -устойчивыми для выходных точек  $r = 2(2)8$  и  $A(\alpha)$ -устойчивыми для выходных точек  $r = 10(2)20$ , где  $r$  — число процессоров в конкретном блочном методе семейства. Численные результаты блочных методов сравниваются с линейным многошаговым методом со второй производной [8].

**Ключевые слова:** блочные методы, непрерывные методы, коллокация, интерполяция, граничное место точек,  $A(\alpha)$ -устойчивость, жесткие ИЗ.

**Okuonghae R.I., Ikhile M.N.O.** A family of highly stable second derivative block methods for stiff IVPs in ODEs // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2014. — Vol. 17, № 1. — P. 67–81.

This paper considers a class of highly stable block methods for the numerical solution of initial value problems (IVPs) in ordinary differential equations (ODEs). The boundary locus of the proposed parallel one-block,  $r$ -output point algorithms shows that the new schemes are  $A$ -stable for output points  $r = 2(2)8$  and  $A(\alpha)$ -stable for output points  $r = 10(2)20$ , where  $r$  is the number of processors in a particular block method in the family. Numerical results of the block methods are compared with a second derivative linear multistep method in [8].

**Key words:** block methods, continuous methods, collocation and interpolation, boundary locus,  $A(\alpha)$ -stability, stiff IVPs.

---

## 1. Введение

В работе [8] был введен класс линейных многошаговых методов со второй производной (ЛММВП):

$$y_{n+q} = y_{n+q-1} + h \sum_{j=0}^q \beta_j f_{n+j} + h^2 \gamma_q f'_{n+q} \quad (1)$$

для численного интегрирования жестких начальных задач (ИЗ) в обыкновенных дифференциальных уравнениях (ОДУ):

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (2)$$

где  $f : \mathbb{K}^{m+1} \rightarrow \mathbb{K}^m$ . Это делается, в частности, для того чтобы, добавив функцию второй производной  $f'_{n+q} = f'(x_{n+q}, y_{n+q})$  [8] в правой части (1), обойти порядковый барьер Дальквиста для ЛММ. График граничного места точек многочленов устойчивости (1) показывает, что он является  $A$ -устойчивым для числа шагов  $q \leq 3$  и жестко устойчивым для  $4 \leq q \leq 7$ , а при  $q \geq 8$  начинается неустойчивость (см. также [15, с. 262–263]).

В данной статье мы предлагаем одноблочные  $r$ -точечные методы со второй производной вместе с составляющими методами, как в (1), для численного решения (2). В соответствии с [21, с. 156] блочный метод был введен Милном в 1953 г. для получения начальных значений для предикторно-корректорных ЛММ. Он был развит Сарафьяном в 1965 г., который считал блочные методы средством для получения начальных значений для ЛММ (см. также [21]). В [5] были введены многоблочные методы для численного решения НЗ в (2). В [12] был предложен класс одноблочных  $r$ -точечных блочных методов для НЗ второго порядка в ОДУ. Другие примеры блочных методов для численного решения нежестких и жестких НЗ обсуждались в [3–5, 14, 18, 19, 22, 31] и [33]. В данной статье мы хотим преобразовать линейный многошаговый метод со второй производной вида (1) и его гибридный метод в блочный метод. Примеры гибридных ЛММ можно найти в [1, 8, 9, 13, 17, 21] и [23–28]. В п. 2 рассматривается общая теория непрерывных блочных методов со второй производной, а в п. 3 показано, как можно получить дискретный блочный метод из непрерывной схемы. Это иллюстрируется на двух примерах блочных методов. В п. 4 сделан анализ устойчивости предложенных блочных схем, а в п. 5 рассмотрено применение этих схем.

## 2. Общая теория непрерывных многоблочных методов со второй производной

Непрерывные блочные методы со второй производной с составляющими ЛММ, как в (1), имеют следующий общий вид:

$$A^{(0)}(t)Y_m = \sum_{i=1}^k A^{(i)}(t)Y_{m-i} + h \sum_{i=0}^k B^{(i)}(t)F(Y_{m-i}) + h^2 \sum_{i=0}^k C^{(i)}(t)F'(Y_{m-i}), \quad A_0(t) = I, \quad (3)$$

где

$$Y_m = \begin{pmatrix} y_{n+c_1} \\ y_{n+c_2} \\ y_{n+c_3} \\ \dots \\ y_{n+c_{r-1}} \\ y_{n+c_r} \end{pmatrix}, \quad F(Y_m) = \begin{pmatrix} f(y_{n+c_1}) \\ f(y_{n+c_2}) \\ f(y_{n+c_3}) \\ \dots \\ f(y_{n+c_{r-1}}) \\ f(y_{n+c_r}) \end{pmatrix}, \quad F'(Y_m) = \begin{pmatrix} f'(y_{n+c_1}) \\ f'(y_{n+c_2}) \\ f'(y_{n+c_3}) \\ \dots \\ f'(y_{n+c_{r-1}}) \\ f'(y_{n+c_r}) \end{pmatrix} \quad (4)$$

суть  $r$ -векторы.  $A_0(t) = I$  — единичная матрица размерности  $r \times r$ ,  $\{A^{(i)}(t)\}_{i=1}^k$ ,  $\{B^{(i)}(t)\}_{i=0}^k$ ,  $\{C^{(i)}(t)\}_{i=0}^k$  суть  $(r \times r)$ -непрерывные матрицы коэффициентов с элементами  $a_{ij}(t)$ ,  $b_{ij}(t)$ ,  $c_{ij}(t)$ ,  $i, j = 1(1)r$ , здесь  $r$  — четное, а вектор абсциссы выбран как  $c = [c_1, c_2, c_3, \dots, c_{r-1}, c_r]^\top = [\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots, \frac{1}{2} + (r-1)d]^\top$ ,  $c_1 = \frac{1}{2}$ ,  $c_2 = 1$  и  $c_j = \frac{1}{2} + (j-1)d$ ,  $\{d = \frac{1}{2}(c_j - c_{j-1})\}_{j=2}^r$ , где  $c_r$  — выходная точка в (3), а  $r$  — число имеющихся процессоров; решение (3) при  $r$  точках получается одновременно из значений в настоящем блоке  $Y_m$ .

В [12] отмечено, что вычислительные задачи в  $r$  точках в пределах блока могут быть отнесены к  $r$  различным процессорам. Масштабная переменная  $t$  в (3) имеет следующий вид:

$$t_j = \frac{x - x_{n+1}}{h}, \quad j = 1(1)r, \quad (5)$$

где  $t$  — вектор-столбец размерности  $1 \times r$ , определяемый как  $t = (t_1, t_1, \dots, t_r)^\top$  (см. [29]). Фиксируя компоненты  $t$  в (3), мы получим метод, который рассматривался в [5]. Блочный метод (3) является явным, если матрица коэффициентов  $C^{(0)}$  — нулевая. Теоретическим решением (3) является  $r$ -вектор

$$\Psi_m = [y(x_{n+c_1}), y(x_{n+c_2}), y(x_{n+c_3}), \dots, y(x_{n+c_{r-1}}), y(x_{n+c_r})]^\top.$$

Следующие определения основаны на общей теории, представленной в [5, 11, 15, 32].

**Определение 1.** Локальная ошибка усечения (ЛОУ) непрерывного блочного метода (3) задается вектором  $E_m(t)$ :

$$E_m(t) = \Psi_m - \sum_{i=1}^k A^{(i)}(t)\Psi_{m-i} - h \sum_{i=0}^k B^{(i)}(t)F'(\Psi_{m-i}) - h^2 \sum_{i=0}^k C^{(i)}(t)F''(\Psi_{m-i}). \quad (6)$$

**Определение 2.** Непрерывный блочный метод (3) имеет порядок ошибки  $p \geq 1$  при условии, что имеется постоянная  $C$  такая, что непрерывная локальная ошибка усечения  $E_m(t)$  удовлетворяет

$$\|E_m(t)\| = Ch^{p+1} + O(h^{p+2}), \quad (7)$$

где  $\|\cdot\|$  может быть максимум-нормой, принятой нами для удобства.

**Определение 3.** Непрерывный блочный метод (3) имеет нулевую устойчивость для фиксированного  $t$  при условии, что корни  $(w_j, j = 1(1)k)$  первого характеристического многочлена  $\rho(w, t)$ , определяемые как

$$\rho(w, t) = \det \left[ \sum_{i=0}^k A^{(i)}(t)w^{k-i} \right] = 0, \quad A^{(0)}(t) = -I, \quad (8)$$

удовлетворяют  $|w_j| \leq 1$ , если корень  $|w_j| = 1$  — простой. Применяя схему (3) к скалярной тестовой задаче

$$y' = \lambda y, \quad \operatorname{Re}(\lambda) > 0, \quad (9)$$

получим многочлен устойчивости

$$\pi(r, t, z) = \det \left[ \sum_{i=0}^k A^{(i)}(t)w^{k-i} + z \sum_{i=0}^k B^{(i)}(t)w^{k-i} + z^2 \sum_{i=0}^k C^{(i)}(t)w^{k-i} \right], \quad A^{(0)}(t) = -I, \quad (10)$$

где  $z = \lambda h$ .

**Определение 4.** Блочный метод со второй производной (3) считается абсолютно устойчивым при  $z$ , если корень  $(w_j)$  из (10) меньше единицы или равен единице.

**Определение 5.** Блочный метод со второй производной (3) считается  $A$ -устойчивым, если область абсолютной устойчивости численного интегратора находится в открытой левой половине плоскости  $z$  области устойчивости.

**Определение 6.** Блочный метод со второй производной (3) считается  $L$ -устойчивым, если он  $A$ -устойчивый и если (10) имеет исчезающие корни при  $z \rightarrow -\infty$ .

**Определение 7.** Блочный метод (3) считается жестко устойчивым:

- (i) если он абсолютно устойчив в области  $R_1 = \{z : |\operatorname{Re}(z)| \leq D_L\}$ ,
- (ii) если он точный в области  $R_2 = \{z : D_L < |\operatorname{Re}(z)| < D_R; |\operatorname{Im}(z)| < D_L\}$ , так что область устойчивости содержит область вида  $R_1 \cup R_2$  (см. [11] и [13] соответственно).  
Рис. 1 показывает область жесткой устойчивости блочных методов.

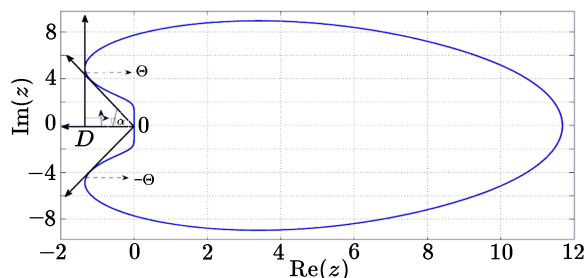


Рис. 1. Область  $A(\alpha)$ -устойчивости для метода (3)

**Определение 8.** Блочный алгоритм (3) считается  $A(\alpha)$ -устойчивым для некоторого  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , если клин

$$S_\alpha = \{z : |\operatorname{Arg}(-z)| < \alpha, z \neq 0\}$$

находится в области абсолютной устойчивости. Самый большой угол  $\alpha$  может считаться углом абсолютной устойчивости метода; жестко устойчивый метод также является  $A(\alpha)$ -устойчивым (см. [1, рис. 1, с. 230]).

### 3. Разработка блочных методов

Для численного решения НЗ (1)  $r$ -точечная  $k$ -блочная схема со второй производной имеет следующий вид:

$$A^{(0)}(t)Y_m = A^{(1)}(t)Y_{m-1} + h \sum_{i=0}^{k-1} B^{(i)}(t)F(Y_{m-i}) + h^2 \sum_{i=0}^{k-2} C^{(i)}(t)F'(Y_{m-i}), \quad A_0(t) = I, \quad (11)$$

где  $k$  — число блоков, а  $h$  — размер шага. Цель данной статьи — получить неявные одноблочные (т.е.  $k = 1$ )  $r$ -точечные методы для решения (1). Фиксируя  $k = 1$  в (11), мы получим

$$Y_m = A^{(1)}(t)Y_{m-1} + h[B^{(0)}(t)F(Y_m) + B^{(1)}(t)F(Y_{m-1})t] + h^2[C^{(0)}(t)F'(Y_m) + C^{(1)}(t)F'(Y_{m-1})]. \quad (12)$$

Чтобы получить блочные методы, структура которых аналогична структуре ЛММ Энрайта со второй производной, обсуждавшейся в [9], положим матрицу  $C^{(1)}(t) = 0$ , так что

$$Y_m = A^{(1)}(t)Y_{m-1} + h[B^{(0)}(t)F(Y_m) + B^{(1)}(t)F(Y_{m-1})] + h^2C^{(0)}(t)F'(Y_m), \quad (13)$$

где

$$A^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)}(t_1) & a_{12}^{(1)}(t_1) & \dots & a_{1r}^{(1)}(t_1) \\ a_{21}^{(1)}(t_2) & a_{22}^{(1)}(t_2) & \dots & a_{2r}^{(1)}(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1}^{(1)}(t_r) & a_{r2}^{(1)}(t_r) & \dots & a_{rr}^{(1)}(t_r) \end{pmatrix}, \quad B^{(i)}(t) = \begin{pmatrix} b_{11}^{(i)}(t_1) & b_{12}^{(i)}(t_1) & \dots & b_{1r}^{(i)}(t_1) \\ b_{21}^{(i)}(t_2) & b_{22}^{(i)}(t_2) & \dots & b_{2r}^{(i)}(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1}^{(i)}(t_r) & b_{r2}^{(i)}(t_r) & \dots & b_{rr}^{(i)}(t_r) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$C^{(i)}(t) = \begin{pmatrix} c_{11}^{(i)}(t_1) & c_{12}^{(i)}(t_1) & \dots & c_{1r}^{(i)}(t_1) \\ c_{21}^{(i)}(t_2) & c_{22}^{(i)}(t_2) & \dots & c_{2r}^{(i)}(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{r1}^{(i)}(t_r) & c_{r2}^{(i)}(t_r) & \dots & c_{rr}^{(i)}(t_r) \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1.$$

Для получения высокоустойчивых блочных методов (13) мы можем использовать следующий многочленный интерполянт для решения (2):

$$y(x) = \sum_{j=0}^N a_j x^j. \quad (15)$$

Дифференцируя (15) по  $x$ , получим

$$y'(x) = f(x, y) = \sum_{j=1}^N j a_j x^{j-1}. \quad (16)$$

А дифференцируя (16) по  $x$ , имеем

$$y''(x) = f'(x, y) = \sum_{j=2}^N j(j-1) a_j x^{j-2}. \quad (17)$$

Используя коллокацию (16) и (17) при  $x = x_{n+j}$ ,  $j = 0(1)k$ , и интерполяцию (15) при  $x = x_n$ , мы получим линейную систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^N \\ 0 & 1 & 2x_n & 3x_n^2 & \dots & Nx_n^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 2x_{n+k} & 3x_{n+k}^2 & \dots & Nx_{n+k}^{N-1} \\ 0 & 0 & 2 & 6x_{n+k} & \dots & N(N-1)x_{n+k}^{N-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_{N-1} \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ f_n \\ \dots \\ f_{n+k} \\ f'_{n+k} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Например, фиксируя  $N = 3$  в (18), мы получим

$$\begin{pmatrix} 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 \\ 0 & 1 & 2x_n & 3x_n^2 \\ 0 & 1 & 2x_{n+1} & 3x_{n+1}^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ f_n \\ f_{n+1} \\ f'_{n+1} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Решив уравнение (19) с использованием метода исключения Гаусса для  $a_j$  ( $j = 0(1)3$ ) и подставив полученные значения с  $x = x_{n+1} + th$  (без потери общности положим  $x_n = 0$ , так что  $x = h + th$ ) в (15), мы получим непрерывную схему

$$y(x_n + (t+1)h) = y_n + h\left(\frac{1}{3} + \frac{t^3}{3}\right)f_n + h\left(\frac{2}{3} + t - \frac{t^3}{3}\right)f_{n+1} + h^2\left(-\frac{1}{6} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)f'_{n+1}. \quad (20)$$

Вставив  $t = -\frac{1}{2}$  и  $t = 0$  в непрерывную схему (20), получим следующие формулы соответственно:

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{24}(7f_n + 5f_{n+1}) - \frac{h^2}{12}f'_{n+1}, \quad (21)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}(f_n + 2f_{n+1}) - \frac{h^2}{6}f'_{n+1}. \quad (22)$$

Дискретный линейный многшаговый метод (21), (22) в блочной форме можно представить следующим образом:

$$\begin{pmatrix} y_{n+\frac{1}{2}} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n-\frac{1}{2}} \\ y_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{24} \\ 0 & \frac{4}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+\frac{1}{2}} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} + \\ h \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{24} \\ 0 & \frac{2}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-\frac{1}{2}} \\ f_n \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{24} \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'_{n+\frac{1}{2}} \\ f'_{n+1} \end{pmatrix} \quad (23)$$

с постоянными ошибками  $C_4 = [\frac{11}{1152}, \frac{1}{72}]^T$  и  $p = 3$ . Аналогичным образом положим  $N = 4$  в (15), (16) и (17) и используем коллокацию и интерполяцию полученного выражения при  $x = x_{n+j}$ ,  $j = 0(1)k$ , и  $x = x_n$  соответственно. Тогда мы получим другую систему линейных уравнений. Решив полученную систему линейных уравнений для  $a_j$  ( $j = 0(1)4$ ) и подставив полученные значения при  $x = x_{n+1} + th$  в (15), мы имеем

$$y(x_n + (t+1)h) = y_n + h\left(\frac{17}{48} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{16}\right)f_n + h\left(\frac{11}{12} + t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4}\right)f_{n+1} + \\ h\left(-\frac{13}{48} + \frac{5t^2}{8} + \frac{t^3}{6} - \frac{3t^4}{16}\right)f_{n+2} + h^2\left(\frac{1}{8} - \frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{8}\right)f'_{n+2}. \quad (24)$$

Положив  $t = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$  в (24), мы получим ряд ЛММ с выходными точками  $[y_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+1}, y_{n+\frac{3}{2}}, y_{n+2}]^T$  соответственно. Полученный дискретный ЛММ приводит к блочной форме

$$\begin{pmatrix} y_{n+\frac{1}{2}} \\ y_{n+1} \\ y_{n+\frac{3}{2}} \\ y_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n-\frac{3}{2}} \\ y_{n-1} \\ y_{n-\frac{1}{2}} \\ y_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 & \frac{268}{768} & 0 & -\frac{113}{768} \\ 0 & \frac{44}{48} & 0 & -\frac{13}{48} \\ 0 & \frac{324}{256} & 0 & -\frac{27}{256} \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+\frac{1}{2}} \\ f_{n+1} \\ f_{n+\frac{3}{2}} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} +$$

$$h \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{229}{768} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{48} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{87}{256} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-\frac{3}{2}} \\ f_{n-1} \\ f_{n-\frac{1}{2}} \\ f_n \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{54}{768} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{48} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{18}{256} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'_{n+\frac{1}{2}} \\ f'_{n+1} \\ f'_{n+\frac{3}{2}} \\ f'_{n+2} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Постоянные ошибки для (25) — это  $C_5 = [-\frac{229}{23040}, -\frac{23}{1440}, -\frac{33}{2560}, -\frac{1}{90}]^\top$  и  $p = 4$ . Следуя вышеупомянутой процедуре, мы получим другие одноблочные  $r$ -точечные блочные методы, где  $r = 6(2)20$ . Дискретные матрицы коэффициентов для одноблочных  $r$ -точечных методов для  $r = 6(2)10$  могут быть представлены в следующем компактном виде:

$$A^{(0)} = I_{r \times r}, \quad C^{(1)} = 0_{r \times r}, \quad A^{(1)} = (0_{(r-1) \times (r-1)} | e), \quad e = (1, 1, \dots, 1)^\top,$$

$$B^{(1)} = (0_{(r-1) \times (r-1)} | b^{(1)}), \quad C^{(0)} = (0_{(r-1) \times (r-1)} | c^{(0)}),$$

$$b^{(1)} = \left( b_{1r}^{(1)} \quad b_{2r}^{(1)} \quad \dots \quad b_{rr}^{(1)} \right)^\top, \quad c^{(0)} = \left( c_{1r}^{(0)} \quad c_{2r}^{(0)} \quad \dots \quad c_{rr}^{(0)} \right)^\top.$$

(i) Матрица коэффициентов одноблочного шеститочечного метода:

$$B^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{6453}{17280} & 0 & -\frac{5211}{17280} & 0 & \frac{2407}{17280} \\ 0 & \frac{1026}{1080} & 0 & -\frac{567}{1080} & 0 & \frac{254}{1080} \\ 0 & \frac{837}{640} & 0 & -\frac{189}{640} & 0 & \frac{103}{640} \\ 0 & \frac{189}{135} & 0 & \frac{27}{135} & 0 & \frac{11}{135} \\ 0 & \frac{4725}{3456} & 0 & \frac{2025}{3456} & 0 & \frac{775}{3456} \\ 0 & \frac{54}{40} & 0 & \frac{27}{40} & 0 & \frac{26}{40} \end{pmatrix},$$

$$b^{(1)} = \left( \frac{4991}{17280} \quad \frac{367}{1080} \quad \frac{209}{640} \quad \frac{43}{135} \quad \frac{1115}{3456} \quad \frac{13}{40} \right)^\top,$$

$$c^{(0)} = \left( -\frac{1092}{17280} \quad -\frac{114}{1080} \quad -\frac{48}{640} \quad -\frac{6}{135} \quad -\frac{300}{3456} \quad -\frac{6}{40} \right)^\top,$$

$$C_6 = \left( \frac{1967}{230400} \quad \frac{97}{7200} \quad \frac{279}{25600} \quad \frac{2}{225} \quad \frac{95}{9216} \quad \frac{9}{800} \right)^\top, \quad p = 5.$$

(ii) Матрица коэффициентов одноблочного восьмиточечного метода:

$$B^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{14509}{34560} & 0 & -\frac{1957}{5120} & 0 & \frac{1231}{3840} & 0 & -\frac{76111}{552960} \\ 0 & \frac{46}{45} & 0 & -\frac{311}{480} & 0 & \frac{47}{90} & 0 & -\frac{1277}{5760} \\ 0 & \frac{1751}{1280} & 0 & -\frac{2061}{5120} & 0 & \frac{501}{1280} & 0 & -\frac{3509}{20480} \\ 0 & \frac{196}{135} & 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{4}{15} & 0 & -\frac{137}{1080} \\ 0 & \frac{3275}{2304} & 0 & \frac{1525}{3072} & 0 & \frac{1025}{2304} & 0 & -\frac{6425}{36864} \\ 0 & \frac{7}{5} & 0 & \frac{99}{160} & 0 & -\frac{149}{640} & 0 & -\frac{149}{640} \\ 0 & \frac{48853}{34560} & 0 & \frac{2891}{5120} & 0 & \frac{5047}{3840} & 0 & -\frac{57967}{552960} \\ 0 & \frac{6}{45} & 0 & \frac{24}{45} & 0 & \frac{64}{45} & 0 & \frac{14}{45} \end{pmatrix},$$

$$b^{(1)} = \left( \frac{17171}{61440} \quad \frac{1873}{5760} \quad \frac{6441}{20480} \quad \frac{37}{120} \quad \frac{11485}{36864} \quad \frac{201}{640} \quad \frac{19187}{61440} \quad \frac{14}{45} \right)^T,$$

$$c^{(0)} = \left( \frac{539}{9216} \quad \frac{3}{32} \quad \frac{75}{1024} \quad \frac{1}{18} \quad \frac{75}{1024} \quad \frac{3}{32} \quad \frac{539}{9216} \quad 0 \right)^T,$$

$$C_7 = \left( -\frac{4661}{645120} \quad -\frac{337}{30240} \quad -\frac{667}{71680} \quad -\frac{1}{126} \quad -\frac{3455}{387072} \quad -\frac{11}{1120} \quad -\frac{833}{92160} \quad -\frac{8}{945} \right)^T, \quad p = 6.$$

(iii) Матрица коэффициентов одноблочного десятиточечного метода:

$$B^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{37831}{80640} & 0 & -\frac{245419}{483840} & 0 & \frac{77227}{161280} & 0 & -\frac{112741}{322560} & 0 & \frac{332369}{2419200} \\ 0 & \frac{4919}{4480} & 0 & -\frac{6347}{7560} & 0 & \frac{2563}{3360} & 0 & -\frac{307}{560} & 0 & \frac{129571}{604800} \\ 0 & \frac{102621}{71680} & 0 & -\frac{10111}{17920} & 0 & \frac{669}{1120} & 0 & -\frac{15927}{35840} & 0 & \frac{62927}{358400} \\ 0 & \frac{3797}{2520} & 0 & -\frac{38}{945} & 0 & \frac{283}{630} & 0 & -\frac{227}{630} & 0 & \frac{5489}{37800} \\ 0 & \frac{10625}{7168} & 0 & \frac{33125}{96768} & 0 & \frac{6875}{10752} & 0 & -\frac{3125}{7168} & 0 & \frac{32975}{193536} \\ 0 & \frac{6567}{4480} & 0 & \frac{127}{280} & 0 & \frac{1233}{1120} & 0 & -\frac{291}{560} & 0 & \frac{4393}{22400} \\ 0 & \frac{136073}{92160} & 0 & \frac{27881}{69120} & 0 & \frac{17591}{11520} & 0 & -\frac{17101}{46080} & 0 & \frac{224273}{1382400} \\ 0 & \frac{52}{35} & 0 & \frac{344}{945} & 0 & \frac{176}{105} & 0 & \frac{2}{35} & 0 & \frac{548}{4725} \\ 0 & \frac{103697}{71680} & 0 & \frac{243331}{483840} & 0 & \frac{18271}{13440} & 0 & \frac{34001}{35840} & 0 & \frac{9060601}{9676800} \\ 0 & \frac{11875}{8064} & 0 & \frac{625}{1512} & 0 & \frac{3125}{2016} & 0 & \frac{625}{1008} & 0 & \frac{15515}{24192} \end{pmatrix},$$

$$b^{(1)} = \left( \frac{437699}{1612800} \quad \frac{2627}{8400} \quad \frac{54489}{179200} \quad \frac{943}{3150} \quad \frac{6485}{21504} \quad \frac{849}{2800} \quad \frac{69587}{230400} \quad \frac{158}{525} \quad \frac{54099}{179200} \quad \frac{305}{1008} \right)^T,$$



$$c^{(0)} = \left( -\frac{4439}{80640} \quad -\frac{863}{10080} \quad -\frac{1263}{17920} \quad -\frac{37}{630} \quad -\frac{275}{4032} \quad -\frac{87}{1120} \quad -\frac{1519}{23040} \quad -\frac{16}{315} \quad -\frac{729}{8960} \quad -\frac{275}{2016} \right)^\top,$$

$$C_8 = \left( \frac{1337909}{216760320} \quad \frac{2633}{282240} \quad \frac{64207}{8028160} \quad \frac{187}{26460} \quad \frac{110875}{14450688} \quad \frac{257}{31360} \quad \frac{34181}{4423680} \quad \frac{16}{2205} \quad \frac{62127}{8028160} \quad \frac{1375}{169344} \right)^\top, \quad p=7.$$

Используя приведенные выше примеры, мы можем получить матрицу коэффициентов метода (13) для  $r = 12(2)20$ .

#### 4. Устойчивость методов

Теперь определим свойства устойчивости одноблочных дискретных блочных методов с  $r$  выходными точками со второй производной, полученные из непрерывного алгоритма (13) для значений выходной точки  $r = 2(2)20$ . Используя полученный блочный алгоритм (13) для  $k = 1$ ,  $r = 2(2)20$  для скалярной тестовой задачи (9), мы получим многочлен устойчивости

$$\pi_r(w, z) = \det \left[ \sum_{i=0}^k A^{(i)} w^{k-i} + z \sum_{i=0}^k B^{(i)} w^{k-i} + z^2 \sum_{i=0}^k C^{(i)} w^{k-i} \right], \quad z = \lambda h. \quad (26)$$

Положим  $A^{(0)} = -I_r$  и  $C^{(1)} = 0$ . Тогда многочлены устойчивости для блочных схем (23) и (25) соответственно следующие:

$$\pi_2(w, z) = w^2 - w - \frac{wz}{3} - \frac{2w^2z}{3} + \frac{w^2z^2}{6}, \quad (27)$$

$$\pi_4(w, z) = w^4 - w^3 - \frac{3w^3z}{4} - \frac{5w^4z}{4} - \frac{w^3z^2}{6} + \frac{2w^4z^2}{3} - \frac{w^4z^3}{6}. \quad (28)$$

Представив корни многочленов устойчивости в (27) и (28) в виде граничного места точек, мы обнаружим, что дискретные блочные алгоритмы (24), (25) имеют угол абсолютной устойчивости  $90^\circ$ . Следовательно, этот метод  $A$ -устойчив (см. рис. 2). Вновь мы видим, что (27) и (28) имеют исчезающие корни при  $z \rightarrow -\infty$ , а это показывает, что блочный алгоритм (25)  $L$ -устойчив. Аналогичным образом определяются свойства устойчивости дискретного блочного алгоритма в (13) для  $k = 1$  при  $r = 6(2)20$ . Матрицы коэффициентов схемы (13) опущены из-за их большого размера, однако их можно легко получить из (19)–(23). Ясно, что блочные методы со второй производной  $L$ -устойчивы для  $k = 1$ ,  $r = 2(2)8$  (см. рис. 2, где изображены их соответствующие граничные места точек). Значения угла  $\alpha$  абсолютной устойчивости новых блочных схем приведены в табл. 1. Граничные места точек блочных методов (13) при  $k = 1$ ,  $r = 10(2)20$  показывают, что схемы являются  $A(\alpha)$ -устойчивыми. Их углы абсолютной устойчивости также приведены в табл. 1. Ввиду машинных ограничений мы были вынуждены остановить исследование при  $r = 20$ , хотя мы предполагаем, что существуют  $A$ -устойчивые методы для  $r > 20$ .

Было обнаружено, что алгоритм (13), имеющий по крайней мере две выходные точки, имеет больше  $A$ -устойчивых схем, чем ЛММВП (1) с последовательными выходными точками. Свойство  $A$ -устойчивости высокого порядка, которым обладает эта схема, также является преимуществом по сравнению с ЛММВП (1). Области абсолютной устойчивости (13) на рис. 2 и 3 соответственно показывают, что блочная схема (13) имеет нулевую устойчивость для  $k = 1$  и  $r = 2(2)20$ .

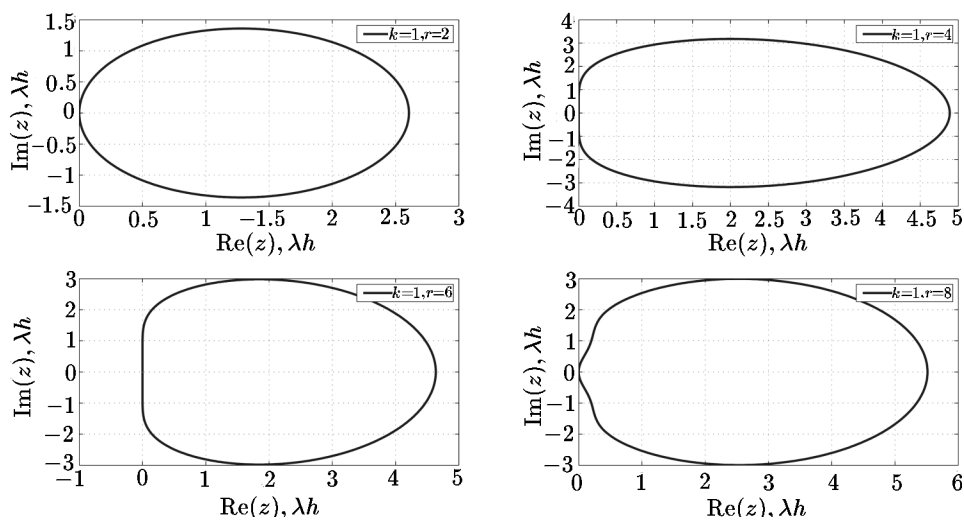


Рис. 2. Граничное место точек для (13) при  $k = 1, r = 2(2)8$ . Методы —  $A$ -устойчивые

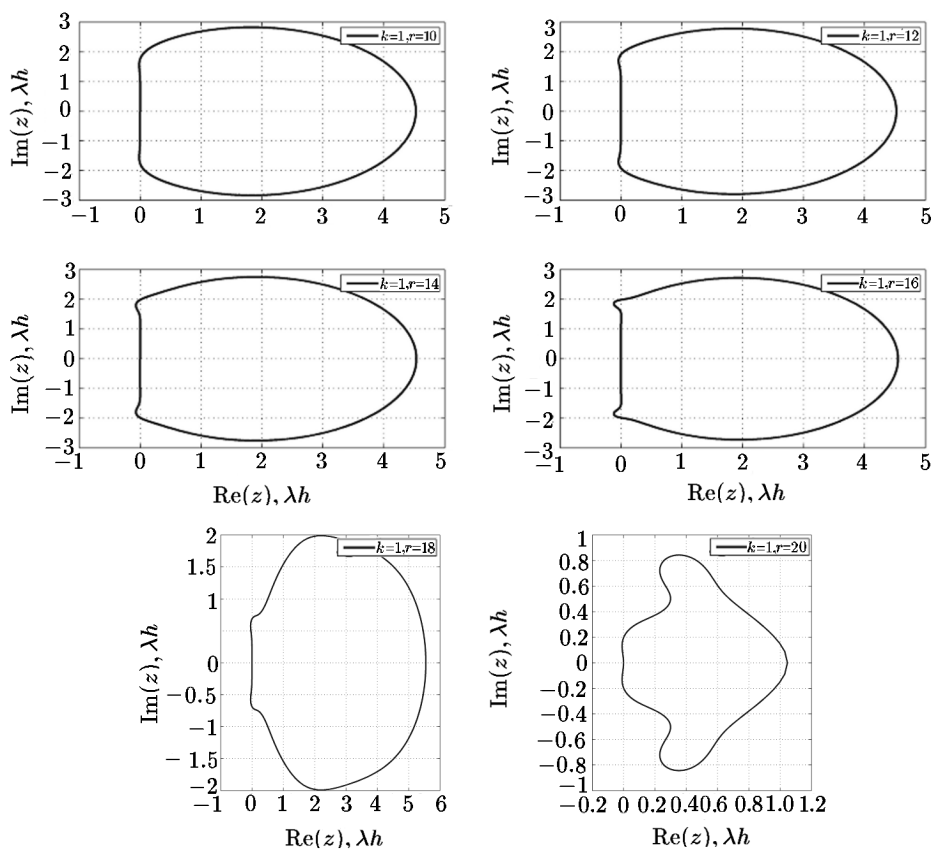


Рис. 3. Граничное место точек для (13) при  $k = 1, r = 10(2)20$ . Блочные методы —  $A(\alpha)$ -устойчивые

**Таблица 1.** Одноблочный  $r$ -выход,  $A(\alpha)$ -устойчивость и порядок  $p$  в (1) и (13)

$q, r$	БМВП (13) $\alpha$	ЛММВП (1) $\alpha$	БМВП (13) $D_L$	ЛММВП (1) $D_L$	БМВП (13) $p$	ЛММВП (1) $p$
$q = r = 1$	—	$90^\circ$	—	0	—	3
$q = r = 2$	$90^\circ$	$90^\circ$	0	0	3	4
$q = r = 3$	—	$87.88^\circ$	—	0.103	—	5
$q = r = 4$	$90^\circ$	$82.03^\circ$	0	0.53	4	6
$q = r = 5$	—	$73.10^\circ$	—	1.339	—	7
$q = r = 6$	$90^\circ$	$59.95^\circ$	0	2.73	5	8
$q = r = 7$	—	$37.6^\circ$	—	5.182	—	9
$r = 8$	$90^\circ$	—	0	—	6	—
$r = 10$	$88^\circ$	—	0.05	—	7	—
$r = 12$	$86^\circ$	—	0.1	—	8	—
$r = 14$	$85^\circ$	—	0.2	—	9	—
$r = 16$	$84^\circ$	—	0.3	—	10	—
$r = 18$	$83^\circ$	—	0.002	—	11	—
$r = 20$	$72^\circ$	—	0.001	—	12	—

## 5. Численные эксперименты и выводы

В данном пункте мы применим новую дискретную блочную схему со второй производной в (23) с двумя выходными точками ( $r = 2$ ) в (23) и линейный многошаговый метод со второй производной (ЛММВП):

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h \left( \frac{29}{48} f_{n+2} + \frac{5}{12} f_{n+1} - \frac{1}{48} f_n \right) - h^2 \frac{1}{8} f'_{n+2}, \quad p = 4 \quad (29)$$

в (1) к следующим трем жестким НЗ.

**Задача 1.** Сингулярное возмущение в работе [20]:

$$\begin{cases} y_1'(x) = -(2 + \varepsilon^{-1})y_1(x) + \varepsilon^{-1}y_2^2(x), & y_1(0) = 1, \quad y_1(x) = e^{-2x}, \\ y_2'(x) = y_1(x) - y_2(x) - y_2^2(x), & y_2(0) = 1, \quad y_2(x) = e^{-x}, \\ x \in [0, 5], \quad h = 0.0001. \end{cases}$$

**Задача 2.** Химическая задача в [9]:

$$\begin{cases} y_1'(x) = -0.04y_1(x) + 10^4 y_2(x)y_3(x), & y_1(0) = 1, \\ y_2' = 0.04y_1(x) - 10^4 y_2(x)y_3(x) - 3 \times 10.0^7 y_2(x)y_2(x), & y_2(0) = 0, \\ y_3' = 3 \times 10^7 y_2(x)y_2(x), & y_3(0) = 0, \\ x \in [0, 5]. \end{cases}$$

**Задача 3.** Колебательная задача в [9]:

$$y' = \begin{pmatrix} -10 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$y(x) = \begin{pmatrix} e^{-10x}(\cos \alpha(x) + \sin \alpha(x)) \\ e^{-10x}(\cos \alpha(x) - \sin \alpha(x)) \\ e^{-4x} \\ e^{-x} \\ e^{-0.5x} \\ e^{-0.1x} \end{pmatrix}.$$

Использование (13) приводит нас к решению системы нелинейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$Y_m = hB^{(0)}F(Y_m) + h^2C^{(0)}F'(Y_m) + \psi_{m-1}, \quad (30)$$

где

$$\psi_{m-1} = A^{(1)}Y_{m-1} + hB^{(1)}Y_{m-1}, \quad C^{(1)} = 0, \quad (31)$$

есть известная функция ранее вычисленного блока. Для сохранения свойства устойчивости неявной блочной схемы (23) свойство неявности в (23) можно реализовать с использованием метода Ньютона–Рафсона. Тогда мы получим

$$Y_m^{(s+1)} = Y_m^{(s)} - J(Y_m^{(s)})^{-1}G(Y_m^{(s)}), \quad s = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (32)$$

где

$$G(Y_m^{(s)}) = Y_m^{(s)} - (hB^{(0)}F(Y_m^{(s)}) + h^2C^{(0)}F'(Y_m^{(s)}) + \psi_{m-1}) = 0, \quad (33)$$

$J(Y_m^{(s)}) = \frac{\delta G(Y_m^{(s)})}{\delta Y_m^{(s)}}$  — матрица Якоби в (32). Начальное значение для (32) является  $L$ -устойчивой обратной схемой Эйлера в [11], задаваемой

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + \frac{hy_n f_n}{y_n - hf_n}. \quad (34)$$

Используя идею [11], вычислим ошибку:

$$\text{Error} = \max\{|y_1(x_n) - y_{1,n}|, |y_2(x_n) - y_{2,n}|, \dots, |y_n(x_n) - y_{r,n}|\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (35)$$

Для легкого сравнения численных результатов реализация блочной формулы и ЛММВП выполняется при фиксированном размере шага (см. табл. 2, 3 и 4 соответственно, где приводятся результаты численных экспериментов).

В заключение отметим, что в данной статье предложено семейство блочных методов со второй производной. Граничное место точек блочной схемы показывает, что новые алгоритмы являются  $A$ -устойчивыми для выходных точек  $r = 2(2)8$  и  $A(\alpha)$ -устойчивыми для выходных точек  $r = 10(2)20$ .

**Таблица 2.** Ошибка БМВП (13) в сравнении с ЛММВП (1) для задачи (2) при  $x_5 = 5$

$\varepsilon$	БМВП (13) Ошибка	ЛММВП (1) Ошибка
$10^{-1}$	9.997546291481475e - 001	9.997546291484212e - 001
$10^{-2}$	9.997546291481393e - 001	9.997546291483673e - 001
$10^{-3}$	9.997546291481380e - 001	9.997546291483613e - 001
$10^{-4}$	9.997546291481380e - 001	9.997546291483607e - 001

**Таблица 3.** Ошибка БМВП (13) в сравнении с ЛММВП (1) для задачи (2) при  $x_5 = 5$ 

$x$	БМВП (13) Ошибка	ЛММВП (1) Ошибка
1.0000	$4.411177253263454e - 007$	$2.485222220586209e - 002$
2.0000	$2.303545380173688e - 006$	$3.609622686774892e - 002$
3.0000	$3.912391883673094e - 006$	$4.262204231145307e - 002$
4.0000	$1.637171664839104e - 006$	$4.697909451041700e - 002$
5.0000	$4.196274415210755e - 006$	$5.014752420604468e - 002$

**Таблица 4.** Ошибка БМВП (13) в сравнении с ЛММВП (1) для задачи (3) при  $x_5 = 5$ 

$\alpha$	БМВП (13) Ошибка	ЛММВП (1) Ошибка
1	$5.093260245878923e - 022$	$2.719490519262302e - 022$
2	$2.452151770953708e - 022$	$2.719490519262302e - 022$
3	$2.747990637368637e - 024$	$2.719490519262302e - 022$
4	$2.770047685009916e - 022$	$2.719490519262302e - 022$

Для задачи 1, результаты по которой приведены в табл. 2, два сравниваемых метода дают почти одинаковые ошибки. Для задач 1 и 3 ошибки получены путем сравнения с теоретическим решением. Для вычисления ошибок задачи 2 в табл. 3 численное решение блочным методом и решение методом Энрайта сравниваются с результатами Ode15s. Численные результаты, приводимые в таблицах 2, 3 и 4 соответственно, показывают, что характеристики блочного метода со второй производной сравнимы с характеристиками ЛММВП, обсуждавшимися в [8], хотя блочные методы более высокого порядка привели к увеличению точности решения задач.

*Благодарности.* Авторы благодарят проф. Дж.С. Бутчера (отделение математики университета Окленда) за помощь в изображении граничного места точек. Авторы благодарят рецензентов за замечания и комментарии к данной статье.

## Литература

1. **Butcher J.C.** Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Second Edition. — Chichester: Wiley, 2008.
2. **Butcher J.C.** A modified multistep method for the numerical integration of ordinary differential equations // J. Assoc. Comput. Mach. — 1965. — Vol. 12. — P. 124–135.
3. **Burrage K.** Parallel and Sequential Methods for Ordinary Differential Equations. — Oxford: Clarendon Press, 1993.
4. **Cash J.R.** Block Runge–Kutta methods for the numerical integration of initial value problems in ordinary differential equations. Part I. The nonstiff case // Mathematical Computation. — 1983. — Vol. 40, № 161. — P. 175–191.
5. **Chu M.T., Hamilton H.** Parallel solution of ODEs by multi-block methods // SIAM J. on Scientific and Statistical Computing. — 1987. — Vol. 8, № 3. — P. 342–353.
6. **Dahlquist G.** A special stability problem for linear multistep methods // BIT. — 1963. — Vol. 3. — P. 27–43.
7. **Dahlquist G.** On accuracy and unconditional stability of linear multistep methods for second order differential equations // BIT Numerical Mathematics. — 1978. — Vol. 18, № 2. — P. 133–136.
8. **Enright W.H.** Second derivative multistep methods for stiff ODEs // SIAM. J. Numer. Anal. — 1974. — Vol. 11, iss. 2. — P. 321–331.

9. **Enright W.H.** Continuous numerical methods for ODEs with defect control // J. Comput. Appl. Math.—2000.— Vol. 125, iss. 1–2.— P. 159–170.
10. **Enright W.H., Hull T.E., and Lindberg B.** Comparing numerical methods for stiff systems of ODEs // BIT Numerical Mathematics.—1975.— Vol. 15, № 1.— P. 10–48.
11. **Fatunla S.O.** Numerical Methods for Initial Value Problems in ODEs.— New York: Academic Press, 1988.
12. **Fatunla S.O.** Block methods for second order ODEs // International J. of Computer Mathematics.—1991.— Vol. 41.— P. 55–63.
13. **Gear C.W.** Hybrid multistep methods for initial value problems in ordinary differential equations // SIAM J. Numer. Anal.—1965.— Vol. 2.— P. 69–86.
14. **Gear C.W., Xu X.** Parallelism across time in ODEs // Applied Numerical Mathematics.—1965.— Vol. 11.— P. 45–68.
15. **Hairer E., Wanner G.** Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems.— Berlin: Springer-Verlag, 1996.
16. **Higham J.D., Higham J.N.** Matlab Guide.— Philadelphia: SIAM, 2000.
17. **Ikhile M.N.O., Okuonghae R.I.** Stiffly stable continuous extension of second derivative LMM with an off-step point for IVPs in ODEs // J. Nig. Assoc. Math. Physics.— 2007.— Vol. 11.— P. 175–190.
18. **Jator S.N.** Solving second order initial value problems by a hybrid multistep method without predictors // Applied Mathematics and Computation.— 2010.— Vol. 217, № 8.— P. 4036–4046.
19. **Kayode S.J.** An efficient zero-stable numerical method for fourth-order differential equations // International J. of Mathematics and Mathematical Sciences.— 2008.— Vol. 2008.— page Article ID 364021, 10 p.
20. **Kaps P.** Rosenbrock-type methods // Numerical Methods for Solving Stiff Initial Value Problems / Dahlquist G., Jeltsch R.— Germany, Aachen: Inst. für Geometrie und praktische Math. (IGPM) der RWTH Aachen, 1981.— (Bericht № 9).
21. **Lambert J.D.** Computational Methods for Ordinary Differential Systems. The Initial Value Problems.— Chichester: Wiley, 1973.
22. **Majid Z.A., Azmi N.A., and Suleiman M.** Solving second order ordinary differential equations using two point four step direct implicit block method // European J. of Scientific Research.—2009.— Vol. 31, № 1.— P. 29–36.
23. **Okuonghae R.I.** Stiffly Stable Second Derivative Continuous LMM for IVPs in ODEs: Ph.D Thesis.— Nigeria, Benin City: Dept. of Math. University of Benin, 2008.
24. **Okuonghae R.I.** A class of continuous hybrid LMM for stiff IVPs in ODEs // Annals of the Alexandru Ioan Cuza University. Mathematics.— 2012.— Vol. LVIII, iss. 2.— P. 239–258.
25. **Okuonghae R.I., Ikhile M.N.O.** A continuous formulation of  $A(\alpha)$ -stable second derivative linear multistep methods for stiff IVPs and ODEs // J. of Algorithms and Comp. Technology.— 2011.— Vol. 6, № 1.— P. 79–101.
26. **Okuonghae R.I., Ogunleye S.O., and Ikhile M.N.O.** Some explicit general linear methods for IVPs in ODEs // J. of Algorithms and Comp. Technology.— 2013.— Vol. 7, № 1.— P. 41–63.
27. **Okuonghae R.I., Ikhile M.N.O.**  $A(\alpha)$ -stable linear multistep methods for stiff IVPs in ODEs // Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica.— 2011.— Vol. 50, № 1.— P. 75–92.
28. **Okuonghae R.I., Ikhile M.N.O.** The numerical solution of stiff IVPs in ODEs using modified second derivative BDF // Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica.— 2012.— Vol. 51, № 1.— P. 51–77.

29. **Okuonghae R.I., Ikhile M.N.O.** On the construction of high order  $A(\alpha)$ -stable hybrid linear multistep methods for stiff IVPs and ODEs // J. of Numerical Analysis and Appl. — 2012. — Vol. 15, № 3. — P. 231–241.
30. **Okuonghae R.I., Ikhile M.N.O.** A class of hybrid linear multistep methods with  $A(\alpha)$ -stability properties for stiff IVPs in ODEs // J. of Numerical Mathematics. — 2013. — Vol. 21, № 2. — P. 157–172.
31. **Voss O.** Fourth-order parallel Rosebrock methods for stiff systems // J. Mathematical and Comp. Modelling. — 2004. — Vol. 40. — P. 1193–1198.
32. **Widlund O.** A note on unconditionally stable linear multistep methods // BIT. — 1967. — Vol. 7. — P. 65–70.
33. **Zarina B.I., Khairil I.O., and Mohammed S.** Variable step block backward differentiation formula for solving first order stiff ODEs // Proc. WCE. — London: WCE, 2007. — Vol. 2166. — P. 785–789.

*Поступила в редакцию 29 сентября 2012 г.,  
в окончательном варианте 4 декабря 2012 г.*

