УДК 519.63

О РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ “МЕЛКОЙ ВОДЫ” НАД УСТУПОМ ДНА

В. В. Остапенко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

В рамках однослойной модели теории “мелкой воды” изучаются течения над разрывом отметки дна (уступом дна). Основное внимание уделяется обоснованию соотношений на возникающем при этом неподвижном разрыве. Выделены допустимые устойчивые течения на таком разрыве. В качестве примера решена задача о течении воды, возникающем в результате разрушения плотины над уступом дна, представляющем собой порог, на который натекает вода.

1. Постановка задачи. Дифференциальные уравнения однослойной “мелкой воды” (уравнения Сен-Венана) [1–4] в случае прямоугольного русла постоянной ширины и переменной глубины без учета влияния трения имеют вид

$$h_t + q_x = 0; \tag{1.1}$$

$$q_t + (qv + h^2/2)_x = -hb_x, \tag{1.2}$$

где $h(x,t)$ — глубина потока; $q(x,t)$ — расход; $v = q/h$ — скорость; $b(x)$ — отметка дна. Ускорение свободного падения $g = 1$. В классической теории “мелкой воды” предполагается, что отметка дна $b(x)$ является гладкой функцией с ограниченной производной. В этом случае уравнения (1.1) и (1.2) являются системой базисных законов сохранения [3], из которой следуют условия Гюгонио на ударных волнах

$$D[h] = [q]; \tag{1.3}$$

$$D[q] = [qv + h^2/2], \tag{1.4}$$

где D — скорость распространения волны; $[f] = f_1 - f_0$ — скачок функции f на ее фронте.

Предположим, что функция $b(x)$, являясь кусочно-постоянной, имеет разрыв в точке $x = 0$, т. е.

$$b(x) = \begin{cases} b_0, & x > 0, \\ b_1, & x < 0, \end{cases} \qquad b_0 > b_1. \tag{1.5}$$

Такой разрыв будем называть уступом дна. Поскольку уравнение массы (1.1) дивергентно над негоризонтальным дном, то соответствующее ему условие Гюгонио (1.3) верно и на разрыве глубин, возникающем над уступом дна (1.5). Так как разрыв (1.5) неподвижен ($D = 0$), то из (1.3) следует очевидное условие

$$[q] = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = q_0 = q(0), \tag{1.6}$$

означающее непрерывность расхода над уступом дна. В то же время правая часть уравнения для полного импульса (1.2) на разрыве (1.5) становится неопределенной, поэтому

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 00-15-96162, 02-05-64384).

в рамках формальной теории “мелкой воды” соответствующее этому уравнению условие Гюгонио (1.4) нельзя использовать для получения второго соотношения на разрыве (1.5). В результате возникает необходимость получения недостающего условия на уступе дна.

Аналогичная ситуация имеет место при изучении одномерных течений газа [5] в трубе с разрывом площади поперечного сечения. В [6, 7] при решении задачи распада разрыва на скачке площади сечения в качестве такого дополнительного соотношения на скачке площади сечения использовалось уравнение импульса, в котором на основе различных физических соображений (выходящих за рамки одномерной газодинамической модели) учитывалась реакция стенки p', соединяющей трубопроводы различных диаметров. Однако получаемое таким способом соотношение на скачке определено неоднозначно: оно существенно зависит от способа задания величины p' (в работах [6, 7] эта величина задается по-разному). Кроме того, это соотношение в общем случае недивергентно, т. е. не допускает записи в виде условия Гюгонио $[F] = 0$.

В то же время существует другой подход [5], при котором недостающее условие на скачке площади сечения в предположении адиабатичности течения получается из дифференциального следствия базисных уравнений газовой динамики — закона сохранения энтропии, сохраняющего дивергентную форму при изменении площади сечения. При выводе недостающего условия для уравнений изэнтропической газовой динамики применяется аналогичный подход [8], основанный на использовании на скачке площади сечения наряду с уравнением неразрывности дивергентного уравнения для полной энергии.

В настоящей работе, следуя подходу [5, 8], соотношения на разрыве (1.5) будем получать из классических законов сохранения системы (1.1), (1.2), допускающих запись в дивергентной форме в случае негоризонтального дна.

2. Точные законы сохранения в случае негоризонтального дна. Дифференциальным следствием базисных уравнений (1.1) и (1.2) является закон сохранения локального импульса

$$v_t + (v^2/2 + z)_x = 0, \tag{2.1}$$

где $z = b + h$ — уровень воды. Этот закон сохранения получается в результате вычитания из уравнения (1.2) уравнения (1.1), умноженного на v, и последующего сокращения на положительную величину $h(x,t)$. Поскольку уравнение (2.1) дивергентно в случае негоризонтального дна, из соответствующего ему условия Гюгонио на неподвижном разрыве (1.5) следует соотношение

$$[v^2/2 + z] = 0, \tag{2.2}$$

означающее сохранение константы интеграла Бернулли над уступом дна.

Как известно [3], наряду с (2.1) система (1.1), (1.2), как и любая гиперболическая система двух уравнений [5], допускает бесконечно много линейно независимых законов сохранения. Для их получения удобно использовать эквивалентную ей на гладких решениях систему (1.1), (2.1) в векторной форме

$$\boldsymbol{u}_t + A(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_x = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}), \tag{2.3}$$

где

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix}, \quad A(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} v & h \\ 1 & v \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -b_x \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Умножая систему (2.3) слева на градиент $U_{\boldsymbol{u}}$ функции $U(\boldsymbol{u})$, удовлетворяющей векторному соотношению

$$U_{\boldsymbol{u}} A(\boldsymbol{u}) = F_{\boldsymbol{u}}, \tag{2.5}$$

где $U(\boldsymbol{u})$, $F(\boldsymbol{u})$ — искомые скалярные функции, получим следующий закон сохранения:

$$U_t + F_x = -U_v b_x. \tag{2.6}$$

Исключая функцию F из системы (2.5), которую с учетом (2.4) можно записать в виде

$$vU_h + U_v = F_h, \qquad hU_h + vU_v = F_v,$$

получим гиперболическое уравнение второго порядка

$$U_{vv} = hU_{hh}, \tag{2.7}$$

имеющее бесконечно много линейно независимых решений $U(h, v)$, каждому из которых соответствует свой закон сохранения (2.6). Из этих классических законов сохранения выделим такие, которые подобно (2.1) допускают запись в дивергентной форме

$$U_t(h, v) + \Psi_x(h, v, b) = 0 \tag{2.8}$$

и тем самым согласно [3] являются точными законами сохранения, на основе которых можно получать условия Гюгонио $[\Psi(h, v, b)] = 0$ на разрыве (1.5).

Добавим к системе (2.3) очевидное уравнение $b_t = 0$ и рассмотрим расширенную систему

$$\boldsymbol{w}_t + B(\boldsymbol{w})\boldsymbol{w}_x = 0, \tag{2.9}$$

где

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} h \\ v \\ b \end{pmatrix}, \quad B(\boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} v & h & 0 \\ 1 & v & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы система (2.9), а значит, и система (2.3) допускали закон сохранения (2.8), необходимо, чтобы входящие в него функции U и Ψ удовлетворяли векторному соотношению $U_{\boldsymbol{w}} B(\boldsymbol{w}) = \Psi_{\boldsymbol{w}}$, развернутая запись которого имеет вид

$$vU_h + U_v = \Psi_h, \qquad hU_h + vU_v = \Psi_v, \qquad U_v = \Psi_b. \tag{2.10}$$

Исключая функцию Ψ из первых двух уравнений системы (2.10), приходим к соотношению (2.7), а исключая ее из двух других пар уравнений (2.10), получим

$$U_{vh} = vU_{hb} + U_{vb}, \qquad U_{vv} = hU_{hb} + vU_{vb}. \tag{2.11}$$

Поскольку точные законы сохранения (2.8) ищутся среди классических законов сохранения (2.6) системы (1.1), (1.2), в которых функция U не зависит от b, т. е. $U_b = 0$, то из (2.11) и (2.7) найдем

$$U_{vh} = U_{vv} = U_{hh} = 0 \quad \Rightarrow \quad U = C_1 h + C_2 v,$$

где $C_1 = \text{const}$; $C_2 = \text{const}$. Это означает, что множество всех точных законов сохранения (2.8) системы (1.1), (1.2) представляет собой линейную комбинацию уравнений (1.1) и (2.1). Иными словами, законы сохранения массы (1.1) и локального импульса (2.1) образуют полный набор линейно независимых точных законов сохранения вида (2.8), допускаемых системой (1.1), (1.2), и поэтому соотношения (1.6) и (2.2) определяются из законов сохранения (2.8) однозначно.

3. Законы сохранения при течении жидкости над уступом дна. Рассмотрим математическую модель "мелкой воды", в которой на разрыве отметки дна (1.5) выполняются соотношения (1.6) и (2.2). Это означает, что величины q и $Q = v^2/2 + z$, а значит, и любая непрерывная функция этих переменных непрерывны на разрыве (1.5), т. е. на нем

$$[\eta(q, Q)] = 0 \quad \forall \eta(q, Q) \in C. \tag{3.1}$$

Выясним, какие из соотношений вида (3.1), помимо очевидных линейных комбинаций условий (1.6) и (2.2), могут быть получены как интегральные следствия классических эволюционных законов сохранения (2.6) системы (1.1), (1.2). Другими словами, выделим все законы сохранения (2.6), которые, не являясь точными, тем не менее остаются законами сохранения при течении жидкости над уступом дна.

Из (3.1) следует, что для выполнения закона сохранения (2.6) при течении жидкости над уступом дна необходимо, чтобы входящая в него функция $U(h,v)$ удовлетворяла условию

$$U_v = \eta(q,Q), \tag{3.2}$$

где $\eta(q,Q)$ — некоторая гладкая функция. Поскольку $U_{vb}=0$, из (3.2) имеем

$$\eta_b(q,Q) = \eta_Q Q_b = \eta_Q = 0,$$

тем самым

$$U_v(h,v) = \eta(q). \tag{3.3}$$

В этом случае уравнение (2.6) можно переписать в виде “неточного” закона сохранения на разрыве (1.5)

$$U_t + (F + \eta(q)b)_x = b\eta_x,$$

из которого на этом разрыве получается условие Гюгонио

$$[F + \eta(q)b] = 0. \tag{3.4}$$

Важным примером такого закона сохранения является закон сохранения полной энергии

$$e_t + (q(v^2/2 + h))_x = -qb_x, \tag{3.5}$$

где

$$e = (qv + h^2)/2. \tag{3.6}$$

Для его получения необходимо уравнение (1.2), умноженное на v, сложить с уравнением (2.1), умноженным на q. В результате получим уравнение кинетической энергии

$$(qv/2)_t + (qv^2/2)_x + qz_x = 0,$$

прибавляя к которому уравнение (1.1), умноженное на h, придем к уравнению (3.5). Соответствующее ему условие Гюгонио (3.4) на разрыве (1.5) имеет вид $[q(v^2/2+z)] = 0$.

Для получения всех законов сохранения (2.6), остающихся законами сохранения при течении жидкости над уступом дна (1.5), необходимо найти все функции $U(h,v)$, одновременно удовлетворяющие гиперболическому уравнению (2.7) и дополнительному ограничению (3.3). Интегрируя уравнение (3.3) по v, получим

$$U(h,v) = \varphi(q)/h + \psi(h), \qquad q = hv, \tag{3.7}$$

где $\varphi(q) = \displaystyle\int \eta(q)\,dq$; $\psi(h)$ — некоторая функция h. Из (3.7) следует

$$U_{vv} = h\varphi'', \qquad U_{hh} = (h^3\psi'' + q^2\varphi'' - 2q\varphi' + 2\varphi)/h^3.$$

Подставляя эти значения производных в уравнение (2.7), найдем

$$q^2\varphi'' - 2q\varphi' + 2\varphi = h^3(\varphi'' - \psi''). \tag{3.8}$$

Поскольку функция φ зависит только от q, а ψ — только от h и скорость v явно не входит в уравнение (3.8), глубину h и расход q в этом уравнении удобно рассматривать как независимые переменные. С учетом этого левая часть уравнения (3.8) не зависит от h, поэтому не зависит от h и его правая часть, т. е.

$$(h^3(\varphi''(q) - \psi''(h)))'_h = 3h^2(\varphi'' - \psi'') - h^3\psi''' = 0.$$

Отсюда следует

$$3\varphi'' = h\psi''' + 3\psi''.$$

Левая часть этого уравнения зависит только от q, правая — только от h, поэтому

$$3\varphi'' = C, \qquad h\psi''' + 3\psi'' = C, \qquad C = \mathrm{const}\,.$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$\varphi = C_1q^2 + C_2q + C_3, \qquad \psi = C_1h^2 + C_4h + C_5/h + C_6, \tag{3.9}$$

где $C_1 = C/6$; $C_i = \mathrm{const}$. Поскольку функция (3.7) определена уравнениями (2.7) и (3.3) с точностью до произвольного постоянного слагаемого, константу C_6, входящую в (3.9), можно отбросить.

Из (3.9) следует

$$\varphi' = 2C_1q + C_2, \qquad \varphi'' = 2C_1, \qquad \psi'' = 2(C_1 + C_5/h^3).$$

Подставляя эти значения производных в основное уравнение (3.8), после приведения подобных членов получим

$$C_3 + C_5 = 0. \tag{3.10}$$

Подставляя функции (3.9) в (3.7), с учетом (3.10) найдем общий вид функции $U(h, v)$, удовлетворяющей уравнениям (2.7) и (3.3):

$$U = C_1(qv + h^2) + C_2v + C_4h.$$

Отсюда следует, что эти уравнения допускают лишь три линейно независимых решения

$$U_1 = h, \qquad U_2 = v, \qquad U_3 = e = (qv + h^2)/2,$$

соответствующих законам сохранения массы (1.1), локального импульса (2.1) и полной энергии (3.5). Тем самым уравнения (1.1), (2.1) и (3.5) образуют полный набор линейно независимых классических законов сохранения (2.6) системы уравнений "мелкой воды" (1.1), (1.2), выполняющихся на разрыве отметки дна (1.5).

4. Вывод дополнительного соотношения на уступе дна путем предельного перехода из модели более высокого уровня. В п. **3** показано, что из условий Гюгонио, допускаемых уравнениями "мелкой воды" на разрыве отметки дна, следует, что на уступе дна сохраняются масса и полная энергия потока. При этом, если сохранение массы на разрыве (1.5) не вызывает сомнений с физической точки зрения, то сохранение полной энергии (3.6) представляется недостаточно обоснованным. Действительно, если предположить, что функция (1.5) описывает разрыв реальной поверхности дна, то при течении над ним образуется либо вертикальный порог (при $[b]v < 0$), либо вертикальный водослив (при $[b]v > 0$). В обоих случаях (при лобовом ударе воды о вертикальную стенку порога или при ее ударе о дно в результате стекания с вертикального водослива) значительная часть полной энергии потока может переходить в энергию внутреннего вихревого и турбулентного перемешивания, что означает ее потерю с точки зрения теории "мелкой воды". Таким образом, "полная" энергия (3.6), представляющая собой сумму только кинетической и потенциальной энергий потока, может не сохраняться при течении воды над реальными вертикальными уступами дна, поэтому полученное выше замыкание модели "мелкой воды" на разрыве (1.5) в общем случае не предназначено для описания таких течений. Это связано с тем, что классическая теория "мелкой воды" формулируется в рамках длинноволнового приближения уравнений гидродинамики [1–4], в котором все характерные горизонтальные размеры течения должны быть существенно больше его вертикальных размеров (в частности, длины волн должны быть существенно больше средней глубины потока). В силу этого классические разрывные решения уравнений Сен-Венана (1.1), (1.2) — прерывные волны — в действительности представляют собой переходные области (непрерывного, но достаточно быстрого изменения параметров течения), ширина которых существенно превышает характерные глубины потока.

Аналогично разрыв (1.5) отметки дна $b(x)$ в модели “мелкой воды” с физической точки зрения должен представлять собой переходную зону $[-\varepsilon, \varepsilon]$ достаточно быстрого, но гладкого и монотонного изменения отметки дна реального русла:

$$b(\varepsilon, x) = \begin{cases} b_0, & x \geqslant \varepsilon, \\ \bar{b}(x), & -\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon, \\ b_1, & x \leqslant -\varepsilon, \end{cases} \qquad b(\varepsilon, x) \in C^1, \tag{4.1}$$

по ширине существенно превосходящую максимальную глубину потока, т. е. $2\varepsilon \gg \max h(x)$. Тогда предположение о сохранении полной энергии при течении на отрезке $[-\varepsilon, \varepsilon]$ такого реального русла вполне естественно. Это означает, что рассматриваемая модель “мелкой воды” с условиями Гюгонио (1.6) и (2.2) на уступе дна (1.5) описывает переходные процессы на достаточно гладких порогах и водосливах реального русла. Отсюда, в свою очередь, следует, что уравнения “мелкой воды” (1.1), (1.2) с размазанным разрывом отметки дна (4.1) представляют собой модель более высокого уровня по отношению к тем же уравнениям с разрывной отметкой дна (1.5), поэтому дополнительное соотношение на уступе дна (1.5) можно получать путем предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ из этой “старшей” модели.

Рассмотрим любое дифференциальное следствие базисной системы (1.1), (1.2), линейно независимое с уравнением (1.1). На гладком стационарном течении над размазанным уступом дна (4.1) все такие дифференциальные следствия, в частности уравнения локального импульса (2.1) и полной энергии (3.5), с учетом того, что $q = \mathrm{const}$, являются эквивалентными. Поэтому, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, из любого из них можно получить одно и то же соотношение на разрыве (1.5), совпадающее с условием Гюгонио (2.2).

Для уравнений (2.1) и (3.5) данное утверждение очевидно, поэтому рассмотрим уравнение полного импульса (1.2), которое не является законом сохранения над уступом дна (1.5). На стационарном решении, на котором в силу (1.1) $q = \mathrm{const}$, уравнение (1.2) можно записать в виде

$$q^2 (h^{-1})_x + h z_x = 0.$$

После деления на h это уравнение можно записать в дивергентной форме

$$(v^2/2 + z)_x = 0. \tag{4.2}$$

Интегрируя уравнение (4.2) над размазанным уступом дна (4.1) от ε до $-\varepsilon$ с учетом граничных условий $h(\varepsilon) = h_0$, $h(-\varepsilon) = h_1$ и переходя затем к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим условие Гюгонио (2.2).

Метод получения условий на разрыве (1.5), связанный с использованием стационарных решений базисной системы при размазанной особенности ее правой части, по-видимому, является наиболее общим для задач такого типа. При этом в отличие от [6, 7] сила реакции уступа дна однозначно определяется из уравнения импульса (1.2) по формуле

$$F = \int\limits_{\varepsilon}^{-\varepsilon} h b_x \, dx = \int\limits_{b_0}^{b_1} h \, db = -\Big[qv + \frac{h^2}{2} \Big] = -q^2 \Big[\frac{1}{h} \Big] - \frac{1}{2} [h^2] = [h](v_0 v_1 - \bar{h}),$$

где $\bar{h} = (h_0 + h_1)/2$.

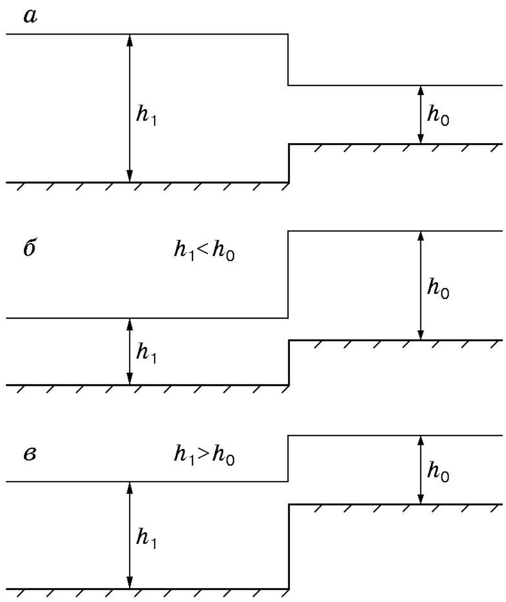

Рис. 1

5. Допустимые течения над уступом дна. Поскольку условие Гюгонио (2.2) с учетом непрерывности расхода (1.6) можно записать в виде

$$q^2 = h_0^2 h_1^2 [z]/(\bar{h}[h]), \tag{5.1}$$

где $q = q(0) \neq 0$, на разрыве (1.5) возможны лишь такие течения, для которых

$$[z][h] = (z_1 - z_0)(h_1 - h_0) = (h_1 - h_0 - \delta)(h_1 - h_0) > 0, \tag{5.2}$$

где $\delta = -[b] = b_0 - b_1 > 0$. Неравенство (5.2) выделяет две допустимые конфигурации потока над уступом дна: для первой из них (рис. 1,*а*)

$$z_1 > z_0 \sim h_1 > h_0 + \delta, \tag{5.3}$$

для второй (рис. 1,*б*)

$$h_1 < h_0. \tag{5.4}$$

Для сравнения на рис. 1,*в* приведена не допускаемая неравенством (5.2) конфигурация, для которой $h_0 < h_1 < h_0+\delta$. Недопустимость данной конфигурации в рамках рассматриваемой модели означает, что разрывные решения, показанные на рис. 1,*в*, возможны лишь при потере полной энергии над уступом дна (в настоящей работе такие течения не изучаются).

Из равенства (5.1) следует, что скорость течения v_1 слева от уступа (1.5), задаваемая формулой $v_1^2 = h_0^2[z]/(\bar{h}[h])$, при условии (5.3) удовлетворяет неравенству $v_1^2 < h_1$, а при условии (5.4) — неравенству $v_1^2 > h_1$. Это означает, что для конфигурации, изображенной на рис. 1,*а*, поток слева от разрыва всегда докритический ($|v_1| < c_1$; $c = \sqrt{h}$ — скорость звука), а для конфигурации, показанной на рис. 1,*б*, всегда сверхкритический ($|v_1| > c_1$). При этом тип течения справа от уступа дна непосредственно из уравнения (5.1) определить нельзя. Для его определения необходимо изучить устойчивость разрывных течений (5.3) и (5.4) над уступом дна (1.5).

Следует отметить, что при изучении устойчивости течений на разрывах (5.3) и (5.4) нельзя использовать энтропийный критерий [9], который для системы законов сохранения "мелкой воды" связан с потерей полной энергии на прерывных волнах [3, 10], поскольку в рассматриваемой модели полная энергия над уступом дна сохраняется. Нельзя также применять классический характеристический критерий [9], согласно которому три характеристики приходят на линию разрыва и только одна с нее уходит. На устойчивой прерывной волне это позволяет с использованием двух условий Гюгонио (1.3), (1.4) и трех соотношений на приходящих характеристиках однозначно определять скорость распространения волны D, а также значения глубин и скоростей перед (h_0, v_0) и за (h_1, v_1) ее фронтом. Однако на неподвижном разрыве над уступом дна, на котором необходимо вычислять только четыре параметра течения h_0, v_0 и h_1, v_1, такая переопределенная система пяти уравнений в общем случае не имеет решения.

Для однозначного определения параметров h_0, v_0, h_1, v_1 на линии неподвижного разрыва необходимо, чтобы две характеристики приходили на линию разрыва и две с нее строго уходили (при этом в число приходящих включаются характеристики, распространяющиеся с нулевой скоростью вдоль линии стационарного разрыва, в число строго уходящих они не включаются). Именно это условие эволюционности [11] следует принять в качестве критерия устойчивости разрыва над уступом дна. В случае конфигурации, показанной на рис. 1,*а*, для которой течение слева от фронта докритическое ($|v_1| < c_1$), это означает, что для устойчивости разрыва течение справа от его фронта должно быть докритическим ($|v_0| < c_0$) или критическим с положительной скоростью ($v_0 = c_0$). В случае конфигурации, изображенной на рис. 1,*б*, для которой течение слева от фронта сверхкритическое ($|v_1| > c_1$), для устойчивости разрыва необходимо, чтобы течение справа от его фронта было сверхкритическим ($|v_0| > c_0$) или критическим с отрицательной скоростью ($v_0 = -c_0$). При этом во всех случаях течение по обе стороны от разрыва должно быть однонаправленным ($v_0 v_1 > 0$).

На рис. 2,*а,б* показаны поля характеристик, соответствующие устойчивым течениям первой конфигурации (см. рис. 1,*а*), на рис. 2,*в*–*д* — устойчивым течениям второй конфигурации (см. рис. 1,*б*). Рис. 2,*а* соответствует докритическое, рис. 2,*б,д* — критическое, рис. 2,*в,г* — сверхкритическое течение справа от уступа дна (1.5). Буквами r и s на рис. 2 обозначены r- и s-инварианты ($r = v - 2c$, $s = v + 2c$), переносимые соответственно вдоль r- и s-характеристик, распространяющихся со скоростями $\lambda_r = v - c$, $\lambda_s = v + c$.

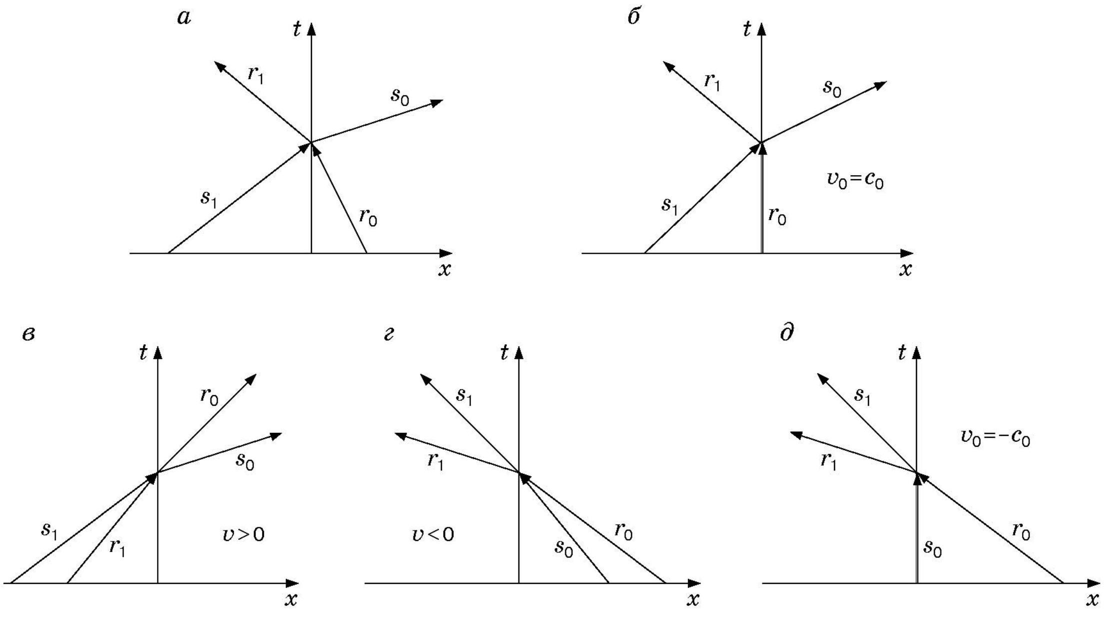

Рис. 2

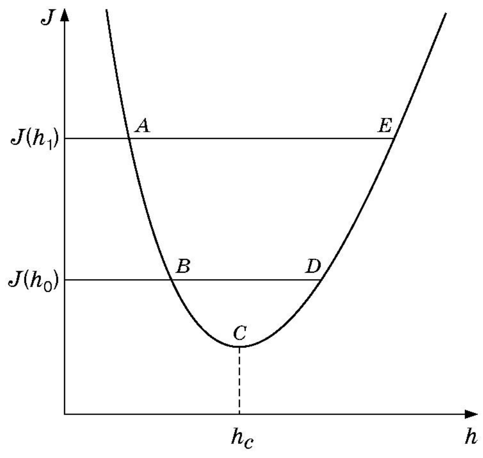

Рис. 3

Предполагая, что $q = \text{const} \neq 0$, запишем уравнение (2.2) в виде

$$\delta = J(h_1) - J(h_0). \tag{5.5}$$

График функции $J(h) = q^2/(2h^2) + h$ приведен на рис. 3. Поскольку (см. [4])

$$J'(h) = 1 - q^2/h^3 = 1 - v^2/h,$$

функция $J(h)$ достигает своего минимума

$$\min J(h) = J(h_c) = 3h_c/2 = 3q^{2/3}/2$$

на критическом течении в точке $h_c = v_c^2 = q^{2/3}$, поэтому при $h < h_c$, когда $J'(h) < 0$, ей соответствуют сверхкритические течения $|v| > c$, а при $h > h_c$, когда $J'(h) > 0$, — докритические течения $|v| < c$. Это означает, что при заданном расходе q для устойчивых течений уравнение (5.5) однозначно разрешимо относительно h_1 при $h_0 > 0$ и относительно h_0 при всех значениях h_1, удовлетворяющих неравенству

$$J(h_1) = v_1^2/2 + h_1 > \delta.$$

При этом устойчивым разрывам, поля характеристик которых показаны на рис. 2, соответствуют скачки на графике функции $J(h)$ (см. рис. 3): скачок DE соответствует рис. 2,*а*, скачок CE при $q > 0$ — рис. 2,*б*, скачок BA — рис. 2,*в*,*г*, скачок CA при $q < 0$ — рис. 2,*д*.

Поскольку соотношение (5.5) записывается в виде кубического уравнения относительно как h_1, так и h_0, то, используя формулу Кардана, можно получить явные зависимости $h_1(h_0, q)$ и $h_0(h_1, q)$ для рассматриваемых устойчивых разрывов. Например, для скачка DE, расположенного в области докритических течений (см. рис. 3), указанная зависимость имеет вид

$$h_1 = a\Big(1 + 2\cos\Big(\frac{1}{3}\arccos\frac{a^3 - q^2/4}{a^3}\Big)\Big), \tag{5.6}$$

где $a = (J(h_0) + \delta)/3 = (q^2/(2h_0^2) + h_0 + \delta)/3 = (v_0^2 + 2z_0)/6$.

6. Задача о течении, возникающем в результате разрушения плотины над порогом. Используем полученные выше результаты для решения задачи о течении, возникающем в результате разрушения плотины над уступом дна (1.5), представляющем собой порог, на который натекает вода. Под такой задачей будем понимать задачу распада начального разрыва уровней

$$z(x, 0) = \begin{cases} z_0, & x > 0, \\ z_1, & x < 0, \end{cases} \qquad z_1 > z_0 \tag{6.1}$$

над уступом дна (1.5) в первоначально покоящейся воде:

$$v(x,0) = 0. \tag{6.2}$$

Эта задача представляет собой частный случай общей задачи о распаде произвольного разрыва над уступом дна (1.5), аналог которой для уравнений газовой динамики рассматривался в работах [5–8]. Классическая задача о распаде произвольного разрыва для уравнений “мелкой воды” над горизонтальным дном изучалась в [12, 13].

Как известно, решение задачи (6.1), (6.2), (1.5) можно искать в виде комбинации простых волн (т. е. прерывных волн, распространяющихся с постоянной скоростью, и волн понижения, центрированных относительно начала координат), стационарного скачка, расположенного в начале координат над уступом дна, и соединяющих их зон постоянного течения. При этом из начальных условий (6.1) и (6.2) следует, что вправо по начальному фону z_0 распространяется прерывная S-волна, а влево по начальному фону z_1 — R-волна понижения (напомним, что прерывной S-волной называется ударная волна, на которую приходят две s-характеристики, а R-волной понижения — центрированная волна разрежения, в которой изменяется r-инвариант и постоянен s-инвариант).

Поскольку жидкость после распада разрыва (6.1), (6.2) течет в положительном направлении ($v > 0$), слева от разрыва над уступом дна (этот стационарный разрыв обозначим L) образуется зона постоянного докритического течения, соединяющая разрыв L с R-волной понижения. Это означает, что при решении задачи (6.1), (6.2) на разрыве L всегда реализуется показанная на рис. 1,*а* конфигурация (5.3), поэтому возникающее над уступом дна течение согласно терминологии работ [6, 7] можно назвать истечением над порогом.

Картина течения справа от разрыва L существенно зависит от типа течения за фронтом прерывной S-волны. Выясним, при каком условии это течение является докритическим. Условия Гюгонио (1.3), (1.4) на прерывной S-волне с учетом того, что жидкость перед ее фронтом покоится ($v_0 = q_0 = 0$), можно записать в развернутом виде

$$q_2 = D(h_2 - h_0), \qquad Dq_2 = q_2 v_2 + (h_2^2 - h_0^2)/2, \tag{6.3}$$

где индекс 2 соответствует параметрам потока за фронтом волны. Из уравнений (6.3) при заданных глубинах h_0 и h_2 однозначно вычисляются скорость прерывной S-волны $D > 0$:

$$D^2 = h_2(h_2 + h_0)/(2h_0)$$

и расход $q_2 > 0$ за фронтом волны:

$$q_2^2 = h_2(h_2 + h_0)(h_2 - h_0)^2/(2h_0). \tag{6.4}$$

Из (6.4) следует, что течение за фронтом S-волны является докритическим при условии

$$v_2^2 = q_2^2/h_2^2 = (h_2 + h_0)(h_2 - h_0)^2/(2h_0h_2) < c_2^2 = h_2.$$

Преобразуя это условие, получим

$$y_1 = (x+1)(x-1)^2 < y_2 = 2x^2, \tag{6.5}$$

где $x = h_2/h_0 > 1$.

Из графиков кубической $y_1(x)$ и квадратичной $y_2(x)$ зависимостей, приведенных на рис. 4, следует, что при $x > 1$, т. е. для устойчивой прерывной волны, решение кубического неравенства (6.5) имеет вид $1 < x < x^*$, где

$$x^* = 1 + \frac{4}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos \frac{3\sqrt{3}}{8}\right) \approx 3{,}214$$

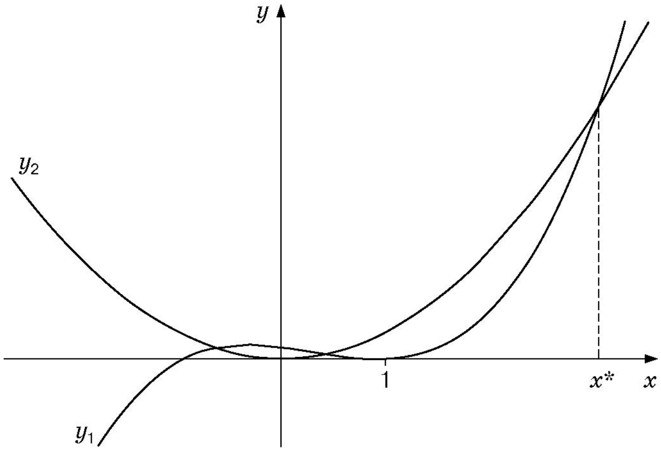

Рис. 4

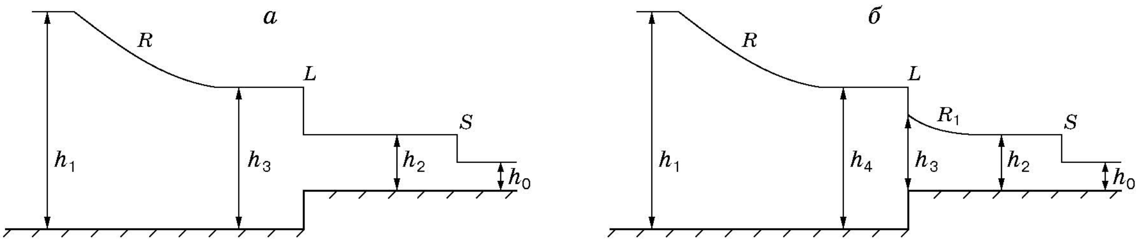

Рис. 5

есть максимальный корень кубического уравнения $x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0$, вычисляемый по формуле Кардана. Это означает, что при $h_0 < h_2 < h_0^*$ ($h_0^* = x^* h_0$) течение за фронтом прерывной S-волны является докритическим, при $h_2 = h_0^*$ — критическим, при $h_2 > h_0^*$ — сверхкритическим.

Поскольку, как показано в п. **5**, при заданном расходе q в рамках устойчивых течений условие Гюгонио (5.1) на разрыве L однозначно разрешимо относительно h_1, далее решение задачи (6.1), (6.2), (1.5) будем строить от ее правого фонового значения глубины $h_0 = z_0 - b_0$ к левому фоновому значению $h_1 = z_1 - b_1$, которое будем считать заранее неизвестным (при этом наряду с h_0 будем считать заданной глубину $h_2 > h_0$ за фронтом прерывной S-волны).

Предположим сначала, что течение за фронтом прерывной S-волны докритическое или критическое, т. е. $h_0 < h_2 \leqslant h_0^*$. Тогда постоянное течение (h_2, v_2) продолжается непосредственно до разрыва L над уступом (рис. 5,*а*), в результате чего на нем формируется устойчивый поток, поля характеристик которого показаны на рис. 2,*а,б*. Значение глубины h_3 за разрывом L однозначно определяется по формуле (5.6), где $h_1 = h_3$, $h_0 = h_2$, $q = q_2$. Затем вычисляется начальная глубина h_1 за уступом дна по формуле

$$h_1 = (\sqrt{h_3} + v_3/2)^2 = (\sqrt{h_3} + q_2/(2h_3))^2,$$

получаемой из условия постоянства s-инварианта в R-волне понижения

$$s = 2\sqrt{h_1} = v_3 + 2\sqrt{h_3}, \qquad v_3 = q_2/h_3.$$

Предположим теперь, что течение за фронтом прерывной S-волны сверхкритическое, т. е. $h_2 > h_0^*$. Поскольку при условии (5.3) (см. рис. 1,*а*) сверхкритическое течение перед разрывом L неустойчиво, течение (h_2, v_2) не может быть продолжено непосредственно до уступа дна, в силу чего оно переходит в дополнительную R_1-волну понижения, левая

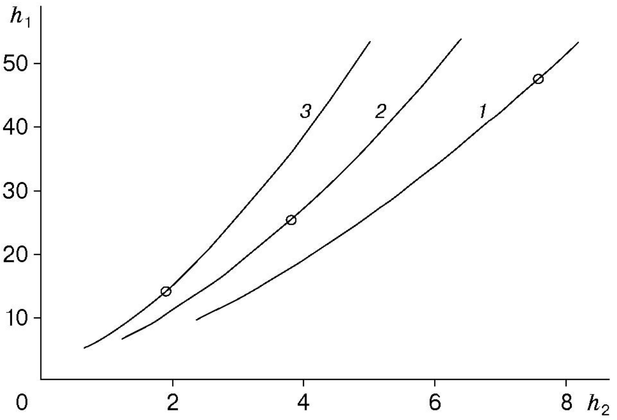

Рис. 6

граница которой примыкает к разрыву L. Эта R_1-волна вместе с разрывом L образует единую LR_1-прыжок-волну (рис. 5,*б*). Течение (h_3, v_3) на левой границе R_1-волны понижения является критическим:

$$v_3 = c_3 = \sqrt{h_3}, \tag{6.6}$$

что приводит к формированию на разрыве L устойчивого потока, поле характеристик которого изображено на рис. 2,*б*. При этом скорость v_3 и глубина h_3 вычисляются по формулам

$$v_3 = (v_2 + \sqrt{h_2})/3, \qquad h_3 = v_3^2,$$

вытекающим с учетом (6.6) из условия постоянства s-инварианта в R_1-волне понижения

$$s = v_3 + 2\sqrt{h_3} = 3v_3 = v_2 + 2\sqrt{h_2}.$$

Затем течение (h_4, v_4) за разрывом L и искомая начальная глубина h_1 восстанавливаются так же, как в предыдущем случае.

Таким образом, показано, что решение задачи (6.1), (6.2) над уступом дна (1.5), для которого, не нарушая общности, можно считать $\delta = -[b] = 1$, однозначно восстанавливается при любых значениях глубин $h_2 > h_0 > 0$ на фронте прерывной S-волны. Это означает существование функции

$$h_1 = h_1(h_2, h_0), \tag{6.7}$$

определенной при всех $h_2 > h_0 > 0$. Отсюда следует, что для доказательства однозначной разрешимости задачи разрушения плотины (6.1), (6.2), (1.5) достаточно показать, что при всех $h_0 > 0$ функция (6.7) строго монотонно возрастает относительно h_2 при всех $h_2 > h_0$ и удовлетворяет условиям

$$\lim_{h_2 \to h_0} h_1(h_2, h_0) = \delta + h_0 = 1 + h_0, \qquad \lim_{h_2 \to \infty} h_1(h_2, h_0) = +\infty. \tag{6.8}$$

В этом случае при $h_0 > 0$ и $h_1 > 1 + h_0$ существует обратная функция $h_2 = h_2(h_1, h_0)$, с использованием которой вычисляется глубина h_2 за фронтом прерывной S-волны, а затем по ней однозначно восстанавливаются остальные параметры решения задачи о разрушении плотины над порогом.

Формальное доказательство строгой монотонности функции (6.7) по h_2 громоздко. Для подтверждения монотонности этой функции приведем графики зависимости $h_1(h_2, h_0)$ при $h_0 = 0{,}5$; 1; 2 (кривые *1–3* на рис. 6), рассчитанные на компьютере. Точками на этих графиках показаны значения h_0^*, при которых течение за фронтом прерывной S-волны критическое. На рис. 6 видно, что при указанных значениях h_0 функция (6.7) строго монотонно возрастает и удовлетворяет условиям (6.8).

В заключение отметим, что на основе полученных в данной работе результатов с учетом методов, развитых в работах [6, 7, 12, 13], в дальнейшем предполагается рассмотреть решение общей задачи о распаде произвольного разрыва над уступом дна.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Стокер Дж. Дж.** Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
2. **Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
3. **Воеводин А. Ф., Шугрин С. М.** Методы решения одномерных эволюционных систем. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1993.
4. **Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
5. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
6. **Дулов В. Г.** Распад произвольного разрыва параметров газа на скачке площади сечения // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. математики, механики и астрономии. 1958. № 19, вып. 4. С. 76–99.
7. **Яушев И. К.** Распад произвольного разрыва в канале со скачком площади сечения // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1967. № 8, вып. 2. С. 109–120.
8. **Кохейн А., Уоррен В., Гриффит В. Г., Марино А.** Теоретическое и экспериментальное изучение распространения волн конечной амплитуды в каналах переменного сечения // Механика. 1955. Вып. 4. С. 12–38.
9. **Lax P. D.** Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. Philadelphia: Soc. for Industr. and Appl. Math., 1972.
10. **Остапенко В. В.** Полные системы законов сохранения для моделей двухслойной “мелкой воды” // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 5. С. 23–32.
11. **Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.** Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
12. **Гладышев М. Т.** К задаче о распаде разрыва в открытых руслах // Изв. вузов. Энергетика. 1968. № 4. С. 81–88.
13. **Атавин А. А., Гладышев М. Т., Шугрин С. М.** О разрывных течениях в открытых руслах // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1975. Вып. 22. С. 37–64.

Поступила в редакцию 14/V 2002 г.