

## ДВУМЕРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ «ПОЛЮСНЫХ» РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ СИВАШИНСКОГО

С. С. Минаев

Институт химической кинетики и горения СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается вопрос о двумерной устойчивости точного решения уравнения Сивашинского, описывающего эволюцию искривленной поверхности пламени в гидродинамическом приближении. Показано, что одномерное полюсное решение этого уравнения, описывающее локальный минимум поверхности, устойчиво относительно малых двумерных возмущений. Задача рассматривалась в предположении о малости возмущений вдали от локального минимума поверхности. Устойчивые одномерные полюсные решения могут быть использованы в качестве тестовых примеров при численном моделировании поверхности гидродинамически неустойчивого пламени, а также могут применяться для построения аналитических двумерных решений уравнения Сивашинского.

Уравнение Сивашинского, описывающее эволюцию фронта слабоискривленного гидродинамически неустойчивого пламени, имеет вид [1]

$$f_t - \frac{\gamma}{2} \hat{K} f - f_{xx} - f_{yy} - \frac{f_x^2 + f_y^2}{2} = 0. \quad (1)$$

Поверхность возмущенного пламени задается уравнением  $z = f(x, y, t)$ , где  $x, y, z$  — декартовы координаты,  $t$  — время. Свежая смесь находится в области  $z > f$ , а продукты горения — в области  $z < f$ . Линейный интегральный оператор  $\hat{K}$  может быть записан в виде свертки с функцией Грина задачи Дирихле для полупространства  $z < 0$  [2]:

$$\hat{K} f(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \times \\ \times \lim_{z \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z f(\eta, \zeta) d\eta d\zeta}{(z^2 + (x - \eta)^2 + (y - \zeta)^2)^{3/2}}. \quad (2)$$

Последняя форма записи получается естественным образом при выводе уравнения (1) из полной системы, описывающей пламя, в предположении о потенциальности течения по обе стороны от фронта [3]. Как показано в [2, 3], это предположение справедливо в случае малых коэффициентов расширения газа:  $(\rho_1 - \rho_2)/\rho_1 = \gamma \ll 1$  ( $\rho$  — плотность газа, индексы 1, 2 отно-

сятся к свежему газу и продуктам горения соответственно). В работах [2, 4, 5] было найдено целое семейство частных одномерных решений этого уравнения, названных полюсными решениями. В простейшем случае, когда решение зависит от одного параметра  $a(t)$ , полюсное решение уравнения (1) имеет вид [2, 4, 5]

$$f(x, t) = 2 \ln(a^2(t) + x^2). \quad (3)$$

Оно описывает локальный минимум поверхности пламени или «трещину» бесконечной длины. Типичный профиль поверхности пламени, описываемый этим решением, приведен на рис. 1. Уравнение для «глубины трещины»  $a(t)$ , получающееся после подстановки (3) в (1), имеет вид

$$aa_t + \gamma a/2 - 1 = 0. \quad (4)$$

Стационарное решение  $a_s = 2/\gamma$  этого уравнения является равномерно устойчивым.

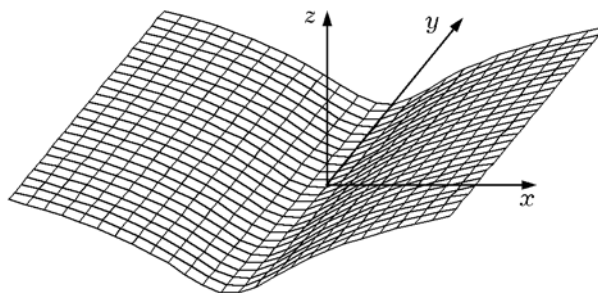


Рис. 1. Поверхность пламени, описываемая полюсным решением вида  $z = 2 \ln(x^2 + a_s^2)$

Работа выполнена при частичной поддержке INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00-03-32417).

**Устойчивость решения, описывающего одиночную трещину.** Уравнение (1) при подстановке  $f(x, y, t) = p(x, t) + g(y, t)$  разделяется на два независимых уравнения относительно переменных  $x$  и  $y$ . В одномерном случае оператор  $\hat{K}$  заменяется оператором Гильберта  $\hat{H}$  с интегралом в смысле главного значения

$$\hat{H}f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f\eta}{x - \eta} d\eta \quad (5)$$

и уравнение (1) приобретает вид

$$f_t - \gamma \hat{H}f/2 - f_{xx} - f_x^2/2 = 0. \quad (6)$$

Уравнение (1) допускает суперпозицию одномерных решений уравнения (6), зависящих только от переменной  $x$  или  $y$ ; это означает, что любое решение, например зависящее только от координаты  $x$ , будет неустойчивым относительно возмущений поверхности, развивающихся в поперечном направлении (зависящих от  $y$ ). В то же время вопрос об устойчивости такого решения относительно двумерных возмущений, которые стремятся к нулю вдали от стационарного решения, остается неясным. Такие возмущения могут представлять собой искривления трещины в поперечном направлении или трещину с переменной глубиной. В численных задачах при фиксированных значениях поверхности пламени на границе расчетной области решение (3) в случае его локальной устойчивости можно было бы использовать как тестовый пример для двумерного численного моделирования в рамках рассматриваемой модели гидродинамической неустойчивости пламени.

В данной работе исследуется устойчивость полюсного решения (3) относительно слабых возмущений поверхности, которые зависят от координат  $x$  и  $y$  и затухают вдали от трещины. Уравнение, описывающее развитие таких возмущений, в линейном приближении имеет вид

$$f'_t - \frac{\gamma}{2} \hat{K}f' - f'_{xx} - f'_{yy} - \frac{4x}{x^2 + a_s^2} f'_x = 0. \quad (7)$$

В данном случае под  $f'(x, y, t)$  понимается малое отклонение от стационарной поверхности пламени, описываемого решением (3).

Рассмотрим сначала решение задачи (7) в одномерной постановке. В этом случае возмущения поверхности не зависят от координаты  $y$

и задача об устойчивости трещины сводится к нахождению собственных чисел  $\lambda$  линейного оператора  $\hat{L}$ :  $\lambda f' = \hat{L}f'$ , где  $\hat{L} = \frac{1}{a_s} \hat{H} + \frac{d^2}{dx^2} + \frac{4x}{x^2 + a_s^2} \frac{d}{dx}$ . Покажем, что оператор  $\hat{L}$  имеет собственные значения  $\lambda_{10} = -1/a_s^2$  и  $\lambda_{20} = 0$ , причем первому собственному значению отвечает функция  $f' = 1/(x^2 + a_s^2)$ , а второму — функции  $f' = \text{const}$  и  $f' = x/(x^2 + a_s^2)$ .

Для доказательства умножим (7) на  $\sin(kx)$  и проинтегрируем обе части уравнения по  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . В результате вычислений уравнение (7) приобретает вид

$$\left(\lambda - \frac{k}{a_s} + k^2\right) s(k) = 2 \int_0^{\infty} k_1 \left[ e^{-(k+k_1)a_s} + \text{sgn}(k - k_1) e^{-|k-k_1|a_s} \right] s(k_1) dk_1. \quad (8)$$

Умножая (7) на  $\cos(kx)$  и интегрируя по  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , получим

$$\left(\lambda - \frac{k}{a_s} + k^2\right) c(k) = 2 \int_0^{\infty} k_1 \left[ e^{-(k+k_1)a_s} + \text{sgn}(k - k_1) e^{-|k-k_1|a_s} \right] c(k_1) dk_1. \quad (9)$$

В этих уравнениях  $c(k)$  и  $s(k)$  есть коэффициенты косинус- и синус-преобразования Фурье

$$f'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (c(k_1) \cos(k_1 x) + s(k_1) \sin(k_1 x)) dk_1:$$

$$c(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \cos(kx) dx,$$

$$s(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \sin(kx) dx.$$

Далее, дважды дифференцируя полученные уравнения по волновому вектору  $k$ , а затем исключая из этих уравнений выражения с интегралами, можно получить обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка для  $s(k)$  и  $c(k)$ . Эти уравнения имеют одинаковый вид, поэтому рассмотрим решения уравнения, например, для коэффициента  $c(k)$ :

$$\left(\lambda - \frac{k}{a_s} + k^2\right) \left(\frac{d^2 c}{dk^2} - a_s^2 c\right) - \frac{2}{a_s} \frac{dc}{dk} - 2c = 0. \quad (10)$$

Одно из решений (10) есть  $c(k) = C_1 \exp(-ka_s)$  ( $C_1$  — произвольная константа), а второе решение при  $k \rightarrow \infty$  асимптотически описывается выражением  $c(k) \rightarrow \exp(ka_s)$ . Последнее решение не удовлетворя-

ет условию сходимости интеграла  $\int_0^\infty c^2(k) dk$

и поэтому должно быть отброшено. Таким образом, косинус- и синус-преобразования Фурье функции  $f'(x)$  имеют вид  $c(k) = C_1 \exp(-ka_s)$ ,  $s(k) = C_2 \exp(-ka_s)$ , где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные константы. Подставляя эти выражения в уравнения (8) и (9), получим, что первое решение есть  $f' = 1/(x^2 + a_s^2)$ , отвечающее значению  $\lambda_{10} = -1/a_s^2$ , а для второго решения  $f' = \text{const}$  или  $f' = x/(x^2 + a_s^2)$  собственное значение есть  $\lambda_{20} = 0$ . Единственность полученных решений следует из единственности решений уравнения (10), удовлетворяющих условию сходимости интегралов  $\int_0^\infty s^2(k) dk$ ,  $\int_0^\infty c^2(k) dk$ . В од-

номерном случае спектр оператора  $\hat{L}$  состоит из двух изолированных точек:  $\lambda_{10} = -1/a_s^2$ ,  $\lambda_{20} = 0$ . Нулевому собственному значению отвечает, в частности, функция, описывающая сдвиг полюсного решения (3) вдоль оси  $z$ . Известно, что если спектр оператора содержит точку с нулевой действительной частью, то для ответа на вопрос об устойчивости необходимо нелинейное исследование.

В данной работе с использованием результатов исследования одномерной устойчивости найден спектр оператора  $\hat{L}$  в двумерном случае. Этот спектр, как показано ниже, состоит из двух изолированных точек:  $\lambda_1 = -1/a_s^2 - q^2$ ,  $\lambda_2 = -q^2$ , где  $q$  имеет смысл волнового числа двумерных возмущений. При  $q \rightarrow 0$  эти собственные числа асимптотически стремятся к значениям  $\lambda_{10}$ ,  $\lambda_{20}$  соответственно. При конечном значении волнового числа ( $q \neq 0$ ) спектр оператора  $\hat{L}$  состоит из двух изолированных точек с отрицательными действительными частями. На основе этого делается вывод об устойчивости полюсного решения относительно двумерных возмущений.

Построим приближенное решение задачи об устойчивости трещины в случае, когда воз-

мущения зависят от координат  $x$  и  $y$ . Уравнение для возмущений поверхности в этом случае имеет вид (7), решения которого будем искать в виде

$$f'_{1,2}(x, y, t) = \alpha_{1,2}(t) g_{1,2}(q, x) \exp(iqy). \quad (11)$$

Потребуем, чтобы функции  $g_{1,2}(q, x)$  при условии  $qa_s \rightarrow 0$  асимптотически переходили в одномерные решения  $1/(x^2 + a_s^2)$  и  $x/(x^2 + a_s^2)$  соответственно, поскольку уравнение (7) в этом случае переходит в одномерное уравнение (6).

Решение задачи рассмотрим в длинноволновом приближении  $qa_s \ll 1$ , которое описывает развитие возмущений с длиной волны, намного превышающей глубину трещины  $a_s$ . В этом приближении функция  $g_1(q, x)$ , переходящая при  $q \rightarrow 0$  в решение  $1/(x^2 + a_s^2)$ , имеет вид

$$g_1(x) = \frac{K_1(\xi)}{\xi}, \quad \xi = q\sqrt{x^2 + a_s^2}, \quad (12)$$

а функция  $g_2(q, x)$ , переходящая в решение  $x/(x^2 + a_s^2)$ , — вид

$$g_2(x) = \frac{xK_1(\xi)}{\xi}, \quad \xi = q\sqrt{x^2 + a_s^2}. \quad (13)$$

Здесь  $K_1$  — функция Макдональда или модифицированная функция Ганкеля. Опишем способ вычисления величин  $\hat{K} f'(x, y)$  для случая, когда  $f'(x, y)$  задана в виде (11)–(13). Заметим, что функции

$$F_{1,2}(x, y, z) = \alpha_{1,2}(t) \exp(iqy) \times \\ \times g_{1,2}(q\sqrt{x^2 + (z + a_s)^2})$$

являются решениями уравнения Лапласа для верхнего полупространства  $z > 0$  и на плоскости  $z = 0$  они совпадают с  $f'_{1,2}(x, y)$ . Согласно определению (2) интегрального оператора  $\hat{K}$

$$\hat{K} f_1 = - \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial F_1}{\partial z} = \\ = - \frac{\alpha_1 q^2 a_s}{\xi^2} \left( \frac{\partial K_1}{\partial \xi} - \frac{K_1}{\xi} \right) - \frac{\alpha_1 K_1}{a_s \xi}. \quad (14)$$

Подставляя (11), (12) в уравнение (1) и учитывая (14), получим

$$\left( \frac{d\alpha_1}{dt} + \left( q^2 + \frac{1}{a_s^2} \right) \alpha_1 \right) \frac{K_1(\xi)}{\xi} + \frac{\alpha_1 q^4 x^2 K_1(\xi)}{\xi^3} = 0. \quad (15)$$

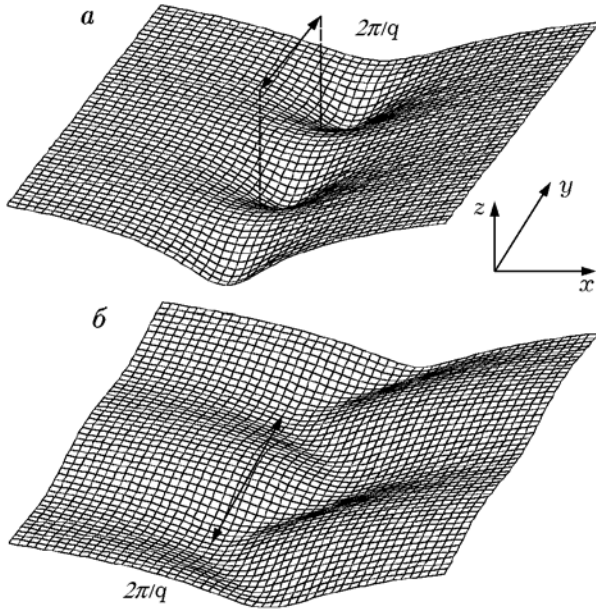


Рис. 2. Рельефы поверхности возмущенного полюсного решения, соответствующие собственным значениям  $\lambda_1$  (а) и  $\lambda_2$  (б):

глубина и толщина локального минимума поверхности зависят от поперечной координаты  $y$

Последний член можно отбросить в случае выполнения неравенства

$$1 + q^2 a_s^2 \gg \frac{q^2 a_s^2 x^2}{x^2 + a_s^2}. \quad (16)$$

Неравенство (16) выполняется не только в длинноволновом приближении  $qa_s \ll 1$ , но и для возмущений с любой длиной волны, развивающихся вблизи гребня трещины ( $x = 0$ ). Из (15) следует, что в длинноволновом приближении зависимость амплитуды возмущений  $\alpha(t)$  от времени имеет вид

$$\frac{d\alpha_1}{dt} + \left(q^2 + \frac{1}{a_s^2}\right)\alpha_1 = 0, \quad \alpha_1 \approx \exp\left(-\left(q^2 + \frac{1}{a_s^2}\right)t\right),$$

откуда вытекает, что стационарное решение устойчиво относительно возмущений вида (12). Для возмущений вида (13) аналогичные рассуждения приводят к уравнению для амплитуды  $\alpha_2(t)$ :

$$\frac{d\alpha_2}{dt} + q^2\alpha_2 = 0, \quad \alpha_2 \approx \exp(-q^2 t).$$

Отсюда следует, что стационарное решение устойчиво и относительно данного вида возмущений. На рис. 2 показаны рельефы поверхности, соответствующие возмущенному полюсному решению для  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Sivashinsky G. I.** Non-linear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames. Pt I: derivation of basic equations // *Acta Astronaut.* 1977. V. 4. P. 1177.
2. **Минаев С. С.** Набор стационарных решений, описывающих ячеечное пламя в случае гидродинамической неустойчивости // *Физика горения и взрыва.* 1992. Т. 28, № 1. С. 35–39.
3. **Sivashinsky G. I., Clavin P.** On the nonlinear theory of hydrodynamic instability in flames // *J. Physique.* 1987. V. 48. P. 193–198.
4. **Thual O., Frisch U., and Henon M.** Application of pole decomposition to an equation governing the dynamics of wrinkled flame fronts // *J. Physique.* 1985. V. 46. P. 1485–1494.
5. **Joulin G.** On the hydrodynamic stability of curved premixed flames // *J. Physique.* 1989. V. 50. P. 1069–1082.

Поступила в редакцию 27/XI 2000 г.,  
в окончательном варианте — 12/I 2001 г.