

## ГЕНЕРАЦИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАВАЮЩЕЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ДВИЖЕНИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ ПО СЛОЖНОЙ ТРАЕКТОРИИ

УДК 532.593:539.3:624.131

А. Е. Букатов, В. В. Жарков

Морской гидрофизический институт НАН Украины, 335000 Севастополь

Рассмотрены трехмерные изгибные колебания тонкой упругой плавающей пластинки, возбуждаемые сосредоточенной нагрузкой при ее движении по окружности, центр которой перемещается прямолинейно с постоянной скоростью. Проведен анализ зависимости структуры колебаний пластинки от ее изгибной жесткости, угловой скорости движения нагрузки и скорости перемещения центра ее траектории.

Структура трехмерных изгибно-гравитационных волн, возбуждаемых прямолинейно движущейся по поверхности плавающей пластинки нагрузкой постоянной и переменной интенсивности, изучалась в [1–5] и [6] соответственно. Колебания пластинки при движении нагрузки по круговой траектории рассмотрены в [7].

1. Пусть на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости постоянной глубины  $H$  плавает тонкая упругая изотропная пластинка. Рассмотрим трехмерные изгибные колебания пластинки, возбуждаемые сосредоточенной нагрузкой

$$p = p_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \quad x_0 = vt + r \cos(\omega t + \varphi_0), \quad y_0 = r \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (1.1)$$

движущейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  по окружности радиуса  $r$ , центр которой перемещается прямолинейно с постоянной скоростью  $v$ . В начальный момент времени ( $t = 0$ ) нагрузка находится в точке  $(r \cos \varphi_0, r \sin \varphi_0)$  на окружности.

Считая движение жидкости потенциальным, а волновые скорости ее частиц и амплитуды безотрывных колебаний пластинки — малыми, приведем задачу к решению уравнения Лапласа

$$\Delta \Phi = 0, \quad -H < z < 0, \quad -\infty < x, y < \infty \quad (1.2)$$

с граничными условиями

$$D_1 \nabla^4 \zeta + \varkappa_1 \zeta_{tt} + \zeta + \Phi_t / g = -p_1, \quad \zeta_t = \dot{\Psi}_z, \quad z = 0, \quad \Phi_z = 0, \quad z = -H \quad (1.3)$$

и начальными

$$\Phi(x, y, z, 0) = \zeta(x, y, 0) = 0. \quad (1.4)$$

Здесь

$$\{D_1, \varkappa_1, p_1\} = \{D, \varkappa, p\}(\rho g)^{-1}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \Delta = \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$\nabla^4 = (\nabla^2)^2$ ;  $\varkappa = \rho_1 h$ ;  $E, h, \rho_1, \nu$  — модуль упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластинки;  $\rho$  — плотность жидкости;  $\Phi$  — потенциал скорости движения частиц жидкости.

Применяя для решения задачи (1.1)–(1.4) комплексное преобразование Фурье по переменным  $x, y$  и удовлетворяя граничным условиям, в системе координат, связанной с

центром круговой траектории, получим уравнение

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + ikv \cos \theta \right)^2 + \tau^2 \right] \zeta^* = (2\pi)^{-1} \tau_0^2 p_1^* \exp(-irk \cos \alpha), \quad (1.5)$$

где  $\tau_j^2 = (1 + \varkappa_1 kg \operatorname{th} kH)^{-1} kg \operatorname{th} kH$ ;  $\tau^2 = \tau_0^2 D_0(k)$ ;  $D_0 = D_1 k^4 + 1$ ;  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ ;  $\alpha = \omega t + \varphi_0 - \theta$ ;  $k_x = k \cos \theta$  и  $k_y = k \sin \theta$  — переменные преобразования Фурье;  $\zeta^*$  и  $p_1^*$  — трансформанты Фурье для  $\zeta$  и  $p_1$  соответственно.

Используя известное для  $\exp(-irk \cos \alpha)$  разложение в ряд по функциям Бесселя [8], из (1.5) после удовлетворения начальным условиям в полярных координатах для изгиба пластинки (возвышения поверхности пластинка — жидкость) имеем выражение

$$\zeta = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty B(k_x, k_y) (M_1 + M_2) \exp(i\lambda) dk d\theta. \quad (1.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} M_1 &= S_1 [\tau \cos(n\alpha) - N_1 \exp(-ikvt \cos \theta)]; & \dot{M}_2 &= iS_2 [\tau \sin(n\alpha) + N_2 \exp(-ikvt \cos \theta)]; \\ N_1 &= \tau \cos(\tau t) \cos(n\theta) + [ikv \cos \theta \cos(n\theta) + n\omega \sin(n\theta)] \sin(\tau t); \\ N_2 &= \tau \cos(\tau t) \sin(n\theta) + [ikv \cos \theta \sin(n\theta) - n\omega \cos(n\theta)] \sin(\tau t); \\ S_1 &= \tau^2 - (kv \cos \theta)^2 - (n\omega)^2; & S_2 &= 2n\omega kv \cos \theta; \end{aligned}$$

$$B = i^n [D_0 (S_1^2 - S_2^2)]^{-1} (2 - \delta_{n,0}) J_n(kr) k \tau p_1^*; \quad \lambda = kR \cos(\theta - \gamma); \quad R = (x^2 + y^2)^{1/2};$$

$x = R \cos \gamma$ ;  $y = R \sin \gamma$ ;  $\delta_{n,0}$  — символ Кронекера.

На пути интегрирования по  $\theta$  могут быть особенности в точках  $\theta = \theta_{ln}$  ( $l = 1, 2, \dots, 8$ ), где  $\theta_{1n} = \arccos \tau_{1n}$ ;  $\theta_{2n} = -\theta_{1n}$ ;  $\theta_{3n} = \pi - \theta_{1n}$ ;  $\theta_{4n} = \pi + \theta_{1n}$ ;  $\theta_{5n} = \arccos \tau_{2n}$ ;  $\theta_{6n} = -\theta_{5n}$ ;  $\theta_{7n} = \pi - \theta_{5n}$ ;  $\theta_{8n} = \pi + \theta_{5n}$ ;  $\tau_{sn} = (kv)^{-1} [\tau + (-1)^s n\omega]$  ( $s = 1, 2$ ).

Полюсы  $\theta_{ln}$  ( $l = 1, \dots, 4$ ) располагаются на отрезке  $[-\pi/2, 3\pi/2]$  действительной оси  $\theta$ , если  $\tau_{1n}^2 \leq 1$ . При этом условии волновое число  $k$  изменяется в интервале  $(k_1, k_2)$  при выполнении одного из неравенств

$$n\omega \geq \sigma_0, \quad v \leq v_{01}, \quad v \geq v_{02}. \quad (1.7)$$

Если

$$n\omega < \sigma_0, \quad v_{01} < v < v_{02}, \quad (1.8)$$

то условию  $\tau_{1n}^2 \leq 1$  соответствуют два интервала изменения волнового числа:  $(k_1, k_1^*)$  и  $(k_2^*, k_2)$ .

Действительные полюсы  $\theta_{ln}$  ( $l = 5, \dots, 8$ ) существуют на оси  $\theta$  при  $\tau_{2n}^2 \leq 1$ , если

$$v \geq v_{03}. \quad (1.9)$$

Волновое число  $k$  при выполнении (1.9) изменяется в интервале  $(k_3, k_4)$ . В случае  $v < v_{03}$  полюсы на действительной оси  $\theta$  отсутствуют при любом действительном значении  $k$ , так как  $\tau_{2n}^2 > 1$ . Если  $n = 0$  при  $\tau_{2n}^2 \leq 1$ , а  $v > c$ , то  $k_3 = 0$ . Здесь  $\sigma_0 = [\beta_2 \tau(\beta_1) - \beta_1 \tau(\beta_2)] (\beta_2 - \beta_1)^{-1}$ ;  $v_{01} = v \tau_{1n}(\beta_2)$ ;  $c = (gH)^{1/2}$ ;  $v_{02} = v \tau_{1n}(\beta_1)$ ;  $v_{03} = v \tau_{2n}(\beta_3)$ ;  $\tau_{1n}^*(\beta_1) = \tau_{1n}^*(\beta_2) = \tau_{2n}^*(\beta_3) = 0$ ;  $\tau_{sn}^* = \tau_{sn} - \tau_1$  ( $s = 1, 2$ );  $\tau_1 = (1/v) \partial \tau / \partial k$ ;  $k_1, k_1^*, k_2^*, k_2$  — положительные корни уравнения  $\tau_{1n} = 1$ , а  $k_3$  (если  $n \neq 0$  или  $n = 0, v \leq c$ ) и  $k_4$  — уравнения  $\tau_{2n} = 1$ .

Выберем обходы полюсов  $\theta_{ln}$  в комплексной плоскости таким образом, чтобы выполнялось неравенство  $\operatorname{Re}(-ivkt \cos \theta) < 0$ . Это обеспечит затухание  $N_1$  и  $N_2$  и установление периодической со временем волновой картины, характеризуемой интегралом (1.6). Так как

$v, k$  и  $t$  положительные, то  $\theta_{ln}$  обойдем сверху при нечетном и снизу при четном значении  $l$ . Полученные контуры интегрирования обозначим через  $L_{mn}$  и запишем (1.6) в виде

$$\zeta = (8\pi^2)^{-1} \sum_{m=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} (I_{1mn} - I_{2mn}) + O(R^{-1}),$$

$$I_{1mn} = \int_{L_{mn}} \int_{L_{mn}^*} B_{mn}(k, \theta) \tau \exp[i(\lambda - (-1)^m n \alpha)] dk d\theta,$$

$$I_{2mn} = \int_{L_{mn}} \int_{L_{mn}^*} B_{mn}(k, \theta) N^* \exp[i(\lambda - kvt \cos \theta - (-1)^m n \alpha)] dk d\theta, \quad (1.10)$$

$$N^* = \tau \cos(\tau t) + i[kv \cos \theta + (-1)^m n \omega] \sin(\tau t),$$

$$B_{mn} = i^n (2 - \delta_{n,0}) D_0^{-1} [S_1 - (-1)^m S_2]^{-1} J_n(kr) k \tau p_1^*,$$

где контуры  $L_{1n}$  обходят полюсы  $\theta_{ln}$  ( $l = 3, 4, 5, 6$ ), а  $L_{2n}$  — полюсы  $\theta_{ln}$  ( $l = 1, 2, 7, 8$ ). Интегрирование по волновому числу проводится вдоль отрезков  $L_{mn}^*$  действительной оси  $k$ , являющихся областями определения полюсов  $\theta_{ln}$  при выполнении условий (1.7)–(1.9).

Дополним контуры  $L_{mn}$  до замкнутых с учетом условий

$$\operatorname{Re} [i(\lambda - (-1)^m n \theta)] \leq 0, \quad \operatorname{Re} [i(\lambda - kvt \cos \theta - (-1)^m n \theta)] \leq 0,$$

обеспечивающих ограниченность интегралов  $I_{1mn}$  и  $I_{2mn}$  при  $R \rightarrow \infty$ . Внутри каждого из полученных замкнутых контуров при фиксированных  $m$  и  $n$  содержатся одни и те же полюсы, если  $\operatorname{sign} [kR \sin(\theta - \gamma) + (-1)^m n] = \operatorname{sign} [kR \sin(\theta - \gamma) + (-1)^m n - kvt \sin \theta]$ .

Это равенство выполняется при  $R > R_{mn} + Ut$  или  $R < R_{mn} - Ut$  ( $R_{mn} = (-1)^{m+1} n / [k \sin(\theta - \gamma)]$ ,  $U = v |\sin \theta / \sin(\theta - \gamma)|$ ). Для таких условий  $I_{1mn}$  и  $I_{2mn}$  компенсируют друг друга с точностью до возмущений, затухающих с расстоянием как  $O(R^{-1})$ . Вычеты в соответствующих полюсах  $\theta_{ln}$  представляют периодическое волновое движение в областях  $0 \leq R \leq R_{mn} + Ut$ , если  $t \geq t_n = n / (kv |\sin \theta|)$ , и в областях  $R_{mn} - Ut \leq R \leq R_{mn} + Ut$ , если  $R_{mn} \geq 0$  и  $t < t_n$ . Следовательно, величина  $U = U_{ln}$  является скоростью переднего фронта возмущений, характеризуемых полюсом  $\theta = \theta_{ln}$ .

Применяя теорему о вычетах, из (1.10) получим

$$\zeta = K_{20} + \sum_{n=1}^{\infty} (K_{1n} + K_{2n}) + O(R^{-1}), \quad (1.11)$$

где для фиксированного  $n$  выражение  $K_{1n}$  имеет вид

$$K_{1n} = \sum_{l=1}^4 \int_{k_1}^{k_2} G_{ln}^*(k) dk, \quad K_{1n} = \sum_{l=1}^4 \left( \int_{k_1}^{k_1^*} G_{ln}^*(k) dk + \int_{k_2^*}^{k_2} G_{ln}^*(k) dk \right)$$

при выполнении условий (1.7) и (1.8) соответственно. Если  $v < v_{03}$ , то  $K_{2n} = 0$ , а при условии (1.9)

$$K_{2n} = \sum_{l=5}^8 \int_{k_3}^{k_4} G_{ln}^*(k) dk.$$

Здесь

$$G_{ln}^*(k) = \begin{cases} G_{ln}(k), & \theta_{1n}(k) - \pi + \chi_n(k) < \gamma < \theta_{1n}(k) - \chi_n(k), \\ 0, & \theta_{1n}(k) - \chi_n(k) \leq \gamma \leq \theta_{1n}(k) + \pi + \chi_n(k) \quad \text{для } l = 1, 4; \end{cases}$$

$$G_{ln}^*(k) = \begin{cases} G_{ln}(k), & -\theta_{1n}(k) - \chi_n(k) < \gamma < \pi - \theta_{1n}(k) + \chi_n(k), \\ 0, & \pi - \theta_{1n}(k) + \chi_n(k) \leq \gamma \leq 2\pi - \theta_{1n}(k) - \chi_n(k) \end{cases} \text{ для } l = 2, 3;$$

$$G_{ln}^*(k) = \begin{cases} G_{ln}(k), & \theta_{5n}(k) - \pi - \chi_n(k) < \gamma < \theta_{5n}(k) + \chi_n(k), \\ 0, & \theta_{5n}(k) + \chi_n(k) \leq \gamma \leq \theta_{5n}(k) + \pi - \chi_n(k) \end{cases} \text{ для } l = 5, 8;$$

$$G_{ln}^*(k) = \begin{cases} G_{ln}(k), & -\theta_{5n}(k) + \chi_n(k) < \gamma < \pi - \theta_{5n}(k) - \chi_n(k), \\ 0, & \pi - \theta_{5n}(k) - \chi_n(k) \leq \gamma \leq 2\pi - \theta_{5n}(k) + \chi_n(k) \end{cases} \text{ для } l = 6, 7;$$

$$\chi_n(k) = \begin{cases} \arcsin(n/(kR)), & k > n/R, \\ \pi/2, & k \leq n/R; \end{cases} \quad G_{ln}(k) = (8\pi^2)^{-1} \Psi_{ln}(k) J_n(kr) \exp[i\psi_{ln}(k)];$$

$$\psi_{ln}(k) = kR \cos(\theta_{ln} - \gamma) + (-1)^m n[\omega t + \varphi_0 + (-1)^j \theta_{bn}] + n_0 \pi/2; \quad \Psi_{ln}(k) = (2 - \delta_{n,0}) (D_0 \sigma_{sn}^* v)^{-1} \tau p_1^*;$$

$$\sigma_{sn}^* = (1 - \tau_{sn}^2)^{1/2}; \quad n_0 = n + [(-1)^n + 1](s - m + 1) + 1; \quad b = 4s - 3 \text{ для } l = 1, 2, \dots, 8.$$

Значению  $l$  полюса  $\theta_{ln}$  отвечают  $j, m, s$  из табл. 1.

Таблица 1

$l$	$j$	$m$	$s$	$l$	$j$	$m$	$s$
1	1	2	1	5	1	1	2
2	2	2	1	6	2	1	2
3	2	1	1	7	2	2	2
4	1	1	1	8	1	2	2

Используя асимптотическое представление  $J_n(kr) \approx (2/\pi kr)^{1/2} \cos(kr - n\pi/2 - \pi/4)$ , запишем выражение для  $G_{ln}^*$  в виде

$$G_{ln}(k) = \frac{1}{8\pi^2 \sqrt{2\pi kr}} \Psi_{ln}(k) \sum_{q=1}^2 \exp \left[ i \left( \psi_{ln}(k) + (-1)^q \left( rk - n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \right]$$

и проведем анализ интегралов (1.11) методом стационарной фазы. В результате для амплитуды возмущений вдоль линии постоянной фазы получим выражение

$$A(k) = \frac{(2 - \delta_{n,0}) \tau p_1^*}{8\pi^2 v D_0} \left[ \frac{k \tau_{sn}^* \sigma_{sn}^*}{r |Z(k)|} \right]^{1/2}, \quad (1.12)$$

а уравнение линии постоянной фазы запишем в виде

$$x(k) = [(1 - \tau_{sn} \tau_1) \mu + \sigma_{sn}^* \eta] (k \tau_{sn}^*)^{-1}, \quad y(k) = (-1)^j (\tau_1 \sigma_{sn}^* \mu + \tau_{sn} \eta) (k \tau_{sn}^*)^{-1}. \quad (1.13)$$

Здесь

$$\mu = (-1)^s n \varphi_1 - (-1)^q k r + \pi \varphi_2; \quad \eta = (-1)^q k r \sigma_{sn}^* - (-1)^s n \tau_{sn}^*;$$

$$\varphi_1 = \omega t + \varphi_0 + (-1)^j \arccos \tau_{sn}; \quad \varphi_2 = 2(N - n^*) + \xi_0 + [(-1)^q (n + 1/2) + n_0]/2;$$

$$Z(k) = \mu \sigma_{sn}^* Z_1(k) + \eta Z_2(k) - (-1)^s n \tau_{sn}^* Z_3(k); \quad Z_1(k) = \tau_2 (\sigma_{sn}^*)^2 + \tau_1 (\tau_{sn}^*)^2;$$

$$Z_2(k) = \tau_2 (\sigma_{sn}^*)^2 + \tau_{sn} (\tau_{sn}^*)^2, \quad Z_3(k) = [\tau_{sn} (\tau_{sn} + \tau_1) - 2] \tau_{sn}^* - \tau_2 (\sigma_{sn}^*)^2; \quad \tau_2 = \frac{k}{v} \frac{\partial^2 \tau}{\partial k^2};$$

$k$  изменяется на соответствующих условиях (1.7)–(1.9) интервалах определения полюсов  $\theta_{ln}$ , которым отвечают  $s$  и  $j$  из табл. 1;  $N$  — номер рассматриваемой линии от начала координат;  $\pi \xi_0$  — ее фазовый сдвиг, определяемый знаком  $Z(k)$ ;  $n^*$  — целая часть  $n/4$ ;  $q$  принимает значения 1 и 2.

2. Анализ полученного решения показал, что структура и характер возбуждаемого периодического волнового движения определяются главным образом изгибной жесткостью пластинки, угловой и поступательной скоростью перемещения нагузки.

Для каждой фиксированной моды с номером  $n$  существуют семь критических значений скорости поступательного движения нагрузки ( $v_{01}, v_{02}, v_{03}, v_{10}, v_{11}, v_{12}, c$ ) и одна ее критическая угловая частота  $\sigma_0$ , при переходе через которые меняются характер и структура периодических возмущений. Из них величины  $\sigma_0, v_{01}, v_{02}, v_{03}, c$  те же, что и в (1.7)–(1.9), а для  $v_{10}, v_{11}, v_{12}$  справедливы формулы

$$v_{11} = v[\tau_3(\beta_4)]^{1/2}, \quad v_{12} = v[\tau_4(\beta_6)]^{1/2}, \quad v_{10} = v[\tau_5(\beta_8)]^{1/2}, \quad \tau_3 = \tau_{1n}^2 - (\tau_{1n} - \tau_1)^2 \tau_1 / \tau_2, \\ \tau_4 = \tau_{2n}^2 - (\tau_{2n} - \tau_1)^2 \tau_1 / \tau_2, \quad \tau_5 = \tau_{1n} \tau_1, \quad \tau_6 = (\tau_1)^2 - \tau_{1n}(\tau_1 - \tau_2), \quad \tau_6(\beta_8) = \tau_6(\beta_9) = 0, \\ \Theta_1''(\beta_4) = \Theta_1''(\beta_5) = \Theta_2''(\beta_6) = \Theta_2''(\beta_7) = 0, \quad \Theta_s(k) = \tau_1 \sigma_{sn}^* (1 - \tau_{sn} \tau_1)^{-1} \quad (s = 1, 2), \\ \beta_4 < \beta_5, \quad \beta_6 < \beta_7, \quad \beta_8 < \beta_9$$

(штрихи означают производные по  $k$ ).

В зависимости от условий генерации может возбуждаться от одной до семи ( $i^* = 1, \dots, 7$ ) пар ( $q = 1$  и  $2$ ) волновых систем;  $i^* = 1, 5$  соответствует гравитационным поперечным, а  $i^* = 2, 6$  — гравитационным продольным волнам типа корабельных. Волны с  $i^* = 3, 7$  изгибные, обусловленные жесткостью пластинки;  $i^* = 4$  отвечает системам волн спиралевидной формы, обусловленным угловой скоростью перемещения давлений. В (1.13)  $i^* = 1, \dots, 4$  соответствует  $s = 1$ , а  $i^* = 5, \dots, 7$  —  $s = 2$ . Для гребней гравитационных поперечных, изгибных и спиралевидных волн  $\xi_0 = -3/4$ , а для гребней гравитационных продольных волн  $\xi_0 = -1/4$ .

Границам угловых зон волновых систем на фазовой картине соответствуют каустики, спад амплитуд вдоль которых происходит по закону  $R^{-1/3}$ . Их можно определить по точкам изломов линий постоянной фазы, происходящих при  $Z(k) = 0$  и отвечающих переходу на новую систему. С удалением от нагрузки в области  $R \geq r$  углы растворов зон волновых возмущений, обусловленных подсистемами  $q = 1, 2$  каждой пары  $i^*$ , асимптотически приближаются к величинам  $\gamma_2 = \arctg \Theta_1(\alpha_2)$ ,  $\gamma_{11} = \arctg \Theta_2(\alpha_3)$ ,  $\gamma_{22} = \arctg \Theta_2(\alpha_4)$ ,  $\gamma_1 = \arctg \Theta_1(\alpha_1)$  для  $v_{11} < v < v_{02}$ ,  $\gamma_3 = \arctg \Theta_1(\alpha_1)$  для  $v > v_{02}$ ,  $\gamma_{12} = \arctg \Theta_2(0)$  для  $n\omega = 0, v > c$ ,  $\Theta_1'(\alpha_1) = \Theta_1'(\alpha_2) = \Theta_2'(\alpha_3) = \Theta_2'(\alpha_4) = 0, \alpha_1 < \alpha_2, \alpha_3 < \alpha_4$ . до тех пор как  $kr \ll 1$

Их соответствие номеру  $i^*$  приведено в табл. 2 ( $s = 1$ ) и 3 ( $s = 2$ ), характеризующих фазовую структуру волновых возмущений в области  $R \geq r$ .

Зависимость величин  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{11}, \gamma_{22}$ , характеризующих угловые зоны обусловленных модой  $n$  установившихся возмущений, и критических значений  $v_{01}, v_{02}, v_{03}, v_{10}, v_{11}, v_{12}$  скорости перемещения нагрузки от  $n\omega$  такая же, как и от частоты пульсации  $\sigma$  поступательно движущегося источника переменной интенсивности. Она исследована в [6]. Там же для  $\sigma = n\omega$  рассмотрена и зависимость указанных величин от характеристик пластинки.

**3.** Фазовая структура возмущений, обусловленных каждой парой возбуждаемых волновых подсистем первой и второй моды, анализировалась по выражениям (1.13) для  $E = 3 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$ ,  $\nu = 0,34$ ,  $\rho_1 = 0,87 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ , характеризующих ледяную пластинку [9, 10]. При этом глубина бассейна  $10^3 \text{ м}$ , толщина ледяного покрова  $2 \text{ м}$  и плотность воды  $10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ . Радиус траектории перемещения нагрузки  $r = 10^2 \div 10^3 \text{ м}$ , ее поступательная скорость  $v = 10^{-1} \div 40 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ , угловая скорость  $\omega = 5 \cdot 10^{-2} \div 10^{-1} \text{ с}^{-1}$  при  $\varphi_0 = 0$  для различных фаз периода колебаний. Поступательное движение нагрузки осуществляется в отрицательном направлении оси  $x$ , а вращательное — по часовой стрелке.

Анализ показал, что при значениях  $v$ , удовлетворяющих неравенствам  $v_{01} < v < v_{02}$ ,  $n\omega < \sigma_0$  или  $v_{11} < v < c, n\omega > 0$ , структура генерируемых волновых возмущений является суперпозицией семи пар волновых подсистем.

Их фазовые картины приведены на рис. 1–3 для  $v = 40 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $\omega = 5 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ ,  $r = 3 \cdot 10^2 \text{ м}$  и фазы вращения нагрузки  $\pi$ . На этих рисунках изображены линии постоянных фаз (гребней) спиралевидных ( $i^* = 4$ , рис. 1), гравитационных поперечных, продоль-

Таблица 2

$v$	$\gamma(\pm 2\pi)$	$i^*$	$n\omega$
$0 < v < v_{01}$	$0 \leq \gamma \leq 2\pi$	4	$0 < n\omega < \sigma_0$
$v_{01} < v < v_{11}$	$0 \leq \gamma \leq 2\pi$	3,4	
$v_{11} < v < v_{02}$	$-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$	1,4	
	$-\gamma_1 \leq \gamma \leq -\gamma_2,$ $\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_1$	1,2, 3,4	
	$\gamma_1 < \gamma < 2\pi - \gamma_1$	3,4	
$v_{02} < v < v_{10}$	$-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$	4	
	$-\gamma_3 \leq \gamma \leq -\gamma_2,$ $\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_3$	2,3, 4	
	$\gamma_3 < \gamma < 2\pi - \gamma_3$	3	
$v > v_{10}$	$-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$	1	
	$-\gamma_1 \leq \gamma \leq -\gamma_2,$ $\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_1$	1,2, 3	
	$\gamma_1 < \gamma < 2\pi - \gamma_1$	3	
$0 < v < v_{11}$	$0 \leq \gamma \leq 2\pi$	4	$n\omega > \sigma_0$
$v > v_{11}$	$-\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_2$	4	
	$-\gamma_3 \leq \gamma \leq -\gamma_2,$ $\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_3$	2,3, 4	
	$\gamma_3 < \gamma < 2\pi - \gamma_3$	3	

Таблица 3

$v$	$\gamma(\pm 2\pi)$	$i^*$	$n\omega$
$v < v_{03}$	$0 \leq \gamma \leq 2\pi$	—	$n\omega \geq 0$
$v_{03} < v < v_{12}$	$0 \leq \gamma \leq 2\pi$	7	
$v_{12} < v < c$	$-\gamma_{22} < \gamma < \gamma_{22}$	5	
	$-\gamma_{11} \leq \gamma \leq -\gamma_{22},$ $\gamma_{22} \leq \gamma \leq \gamma_{11}$	5,6, 7	
	$\gamma_{11} < \gamma < 2\pi - \gamma_{11}$	7	
$v > c$	$-\gamma_{22} \leq \gamma \leq \gamma_{22}$	5	$n\omega > 0$
	$-\gamma_{11} \leq \gamma \leq -\gamma_{22},$ $\gamma_{22} \leq \gamma \leq \gamma_{11}$	5,6, 7	
	$\gamma_{11} < \gamma < 2\pi - \gamma_{11}$	7	$n\omega = 0$
	$-\gamma_{12} \leq \gamma \leq \gamma_{12}$	—	
	$-\gamma_{11} \leq \gamma \leq -\gamma_{12},$ $\gamma_{12} \leq \gamma \leq \gamma_{11}$	6,7	
	$\gamma_{11} < \gamma < 2\pi - \gamma_{11}$	7	

ных корабельных и изгибных волн ( $i^* = 1, \dots, 3$ , рис. 2;  $i^* = 5, \dots, 7$ , рис. 3) первой моды. Жирные и тонкие линии отвечают  $q = 1$  и 2. Сплошными кривыми на рис. 2 и 3 изображены изгибные волны, а штрихпунктирными с одной и двумя точками — продольные и поперечные гравитационные волны типа корабельных. Границы угловых зон соответствующих подсистем показаны штриховыми линиями. Пунктиром на рис. 2, 3 обозначена траектория кругового перемещения давлений в связанной с ее центром системе координат. Эту же траекторию характеризует и кружок в центре на рис. 1.

Видно, что гребни спиралевидных волн начинаются в точках, расположенных от траектории перемещения давлений на расстояниях, примерно равных половине длины волны. С каждым разворотом спирали номер гребня увеличивается. Длины волн для обеих подсистем приблизительно одинаковы. Причем они минимальны на оси абсцисс перед нагрузкой и максимальны за ней. Минимальная длина волны существенно превышает радиус круговой траектории движения нагрузки. Кроме того, длины спиралевидных волн слабо зависят от этого радиуса. Различие в длинах волн перед и за нагрузкой определяется поступательной скоростью ее движения. С уменьшением скорости до нуля различия убывают. Система спиралевидных возмущений генерируется при любом значении скорости из диапазона  $0 \leq v < v_{10}$ , если  $n\omega < \sigma_0$ , и диапазона  $v \geq 0$ , если  $n\omega < \sigma_0$ .

Отметим, что гравитационные волны типа спиралевидных возбуждаются и в жидкости со свободной поверхностью при движении источника возмущений по круговой траектории [11, 12].

Системы изгибных, продольных и поперечных гравитационных волн каждой из двух подсистем образуют два накладывающихся портрета, похожих на известные [1, 2, 4] для поступательно движущегося генератора постоянной интенсивности. Это справедливо для  $s = 1$  и 2 (рис. 2 и 3). Диапазоны изменения длин волн обеих подсистем одинаковые. Минимальную длину имеют изгибные волны (на трассе центра круговой траектории нагрузки), а максимальную — поперечные гравитационные. Угловые зоны, где генерируются возмущения, обусловленные совместным вкладом систем изгибных, продольных и поперечных гравитационных волн, при  $s = 2$  значительно меньше, чем при  $s = 1$ .



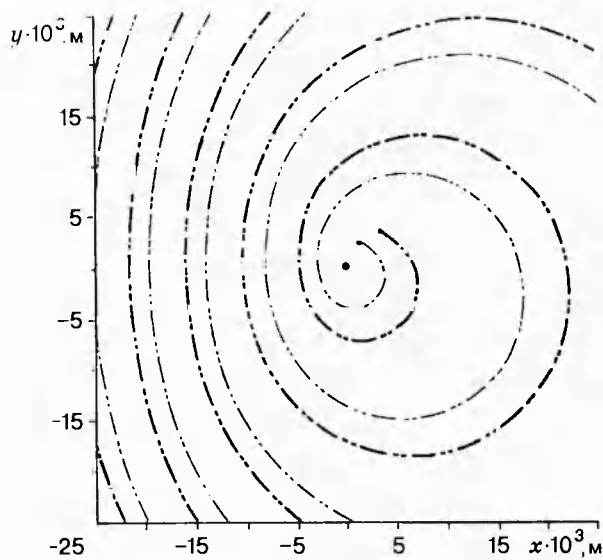


Рис. 1

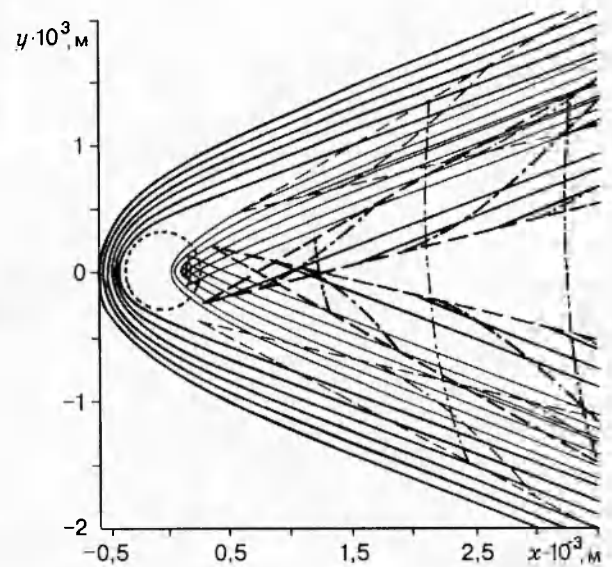


Рис. 2

В отличие от случая поступательно движущейся нагрузки, здесь наблюдается несимметричность фазовых портретов относительно трассы перемещения центра ее траектории. Это особенно заметно в конфигурации гребней гравитационных поперечных волн и в расположении вершин угловых зон трехволновых возмущений.

Для подсистемы с  $q = 1$  (тонкие линии) изгибные волны-предвестники окаймляют круговую траекторию перед нагрузкой. Угловые зоны трехволновых возмущений за нагрузкой пересекаются, переходя через ось абсцисс. Первые гребни гравитационных поперечных волн образуются только за областью пересечения угловых зон. Для подсистемы с  $q = 2$  (жирные линии) гребни изгибных волн могут как заходить в область круга, ограничиваемого траекторией, так и располагаться впереди области. При этом возможны излом первых линий постоянной фазы внутри этой области и их пересечение с осью  $x$  за ней. Угловые зоны трехволновых возмущений не пересекаются между собой. Их вершины расположены на большем удалении от нагрузки, а углы их раствора в рассматриваемой зоне меньше, чем при  $q = 1$ . Зона генерации поперечных корабельных волн в этом случае значительно шире, чем при  $q = 1$ .

Отметим, что с ростом  $r$  количество изламываемых гребней изгибных волн увеличивается. При достаточно больших  $r$  могут подвергаться излому и первые гребни поперечных гравитационных волн. Изменение  $\omega t$  приводит к фазовым сдвигам в каждой из рассматриваемых волновых подсистем.

Первый гребень гравитационной поперечной волны из подсистемы с  $q = 2$  переходит в гребень изгибной, минуя вершины зон генерации трехволновых возмущений (рис. 3). С убыванием скорости  $v$  до критической  $v_{11}$  ( $s = 1$ , рис. 2) или  $v_{12}$  ( $s = 2$ , рис. 3) такие зоны сужаются, а их вершины удаляются от нагрузки. При этом количество гребней поперечных гравитационных волн, переходящих в изгибные, увеличивается. Качественно аналогичный вид имеют все гребни волн за нагрузкой в диапазоне скорости  $v_{01} < v < v_{11}$  ( $s = 1$ ) или  $v_{03} < v < v_{12}$  ( $s = 2$ ). Зоны генерации трехволновых возмущений для таких значений  $v$  отсутствуют. С уменьшением скорости до  $v_{01}$  ( $s = 1$ ) или  $v_{03}$  ( $s = 2$ ) гребни волн выпрямляются перпендикулярно трассе. При  $v < v_{01}$  или  $v < v_{03}$  в формировании возмущений отсутствуют вклады изгибных и гравитационных волн, соответствующих  $s = 1$  или  $s = 2$ .

Если  $v_{02} < v < v_{10}$ ,  $n\omega < \sigma_0$  или  $v > v_{11}$ ,  $n\omega > \sigma_0$ , то в формировании возмущений, отвечающих  $s = 1$ , отсутствует вклад поперечных гравитационных волн типа

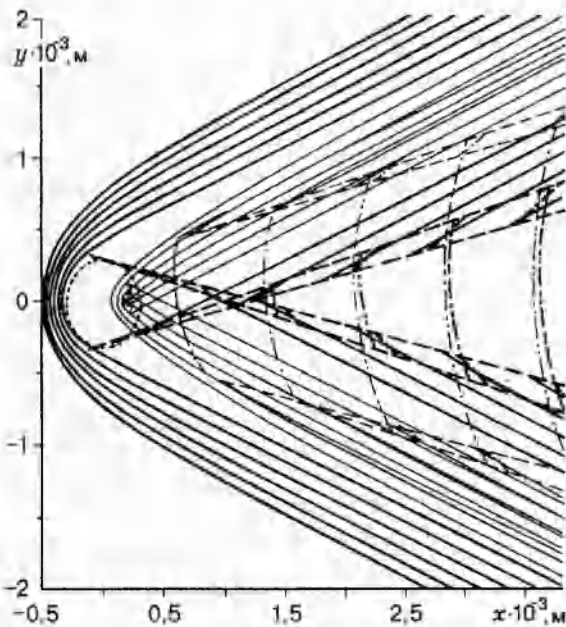


Рис. 3

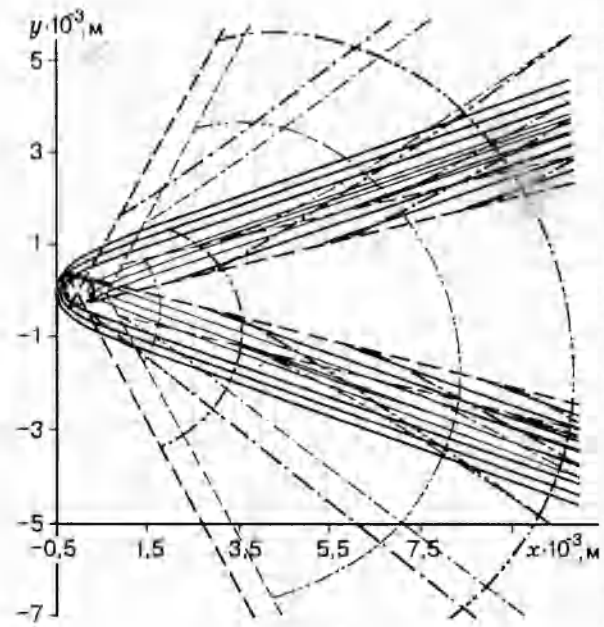


Рис. 4

корабельных. Перед нагрузкой в этом случае могут возбуждаться только изгибные волны. В волновом следе образуются угловые зоны, где структуру возмущений формируют волны типа спиралевидных либо вместе с продольными гравитационными и изгибными волнами, либо без них.

Фазовую картину в рассматриваемых условиях иллюстрирует рис. 4 для значений параметров, соответствующих рис. 1-3 при  $\omega = 10^{-1} \text{с}^{-1}$ . Здесь штрихпунктирными линиями с двумя точками обозначены гребни волн типа спиралевидных. Гребни изгибных (сплошные линии) и продольных гравитационных (штрихпунктирные с одной точкой) волн даны через один. Видно, что угловые зоны генерации трехволновых возмущений для обеих подсистем ( $q = 1$  и  $2$ ) больше, чем для других рассмотренных диапазонов скорости. Линии первых гребней волн типа спиралевидных могут не доходить до одной из границ своей угловой зоны. Характерные черты подсистем с  $q = 1$  и  $2$  качественно такие же, как и для условий рис. 2, 3.

Если  $v > v_{10}$ ,  $n\omega < \sigma_0$ , то волны типа спиралевидных не возбуждаются, а фазовый портрет для  $s = 1$  аналогичен представленному на рис. 2.

Фазовая структура возмущений, отвечающих  $s = 2$ , в рассмотренных диапазонах скорости качественно такая же, как и при значениях  $v$  из других диапазонов (см. табл. 2), соответствующих  $s = 1$ .

Фазовые картины возмущений, обусловленных первой модой при частоте  $n\omega$ , аналогичны картинам, формируемым модой с номером  $n$  при частоте  $\omega$ .

4. Количественное сопоставление возможных вкладов возбуждаемых волн в изгибные колебания пластинки проведено по формулам (1.12), (1.13) при значениях исходных параметров, отвечающих условиям рис. 1-3 (вариант I) и рис. 4 (вариант II). Амплитуды изгиба  $A(k)$ , обусловленного каждой из волновых подсистем  $q$  систем  $i^*$ , приведены с точностью до множителя  $10/p_1$  в табл. 4 для трех фиксированных точек плоскости справа от трассы перемещения центра траектории нагрузки. Эти точки удалены от начала координат на расстояние 5 км вдоль лучей, составляющих с осью  $x$  углы  $\gamma = 20, 40$  и  $120^\circ$  соответственно. Знаком плюс отмечены амплитуды подсистем с  $q = 1$  и  $2$  изгибных волн ( $i^* = 3, 7$ ), для которых линии постоянных фаз начинаются от границ соответствующих угловых зон волнового следа, знак минус характеризует изгибные волны с линиями по-



Таблица 4

Вариант	$i^*$	$q$	$\gamma$ , град			
			20	40	120	
			$A(k) \cdot 10/p_1$ (Л, м)			
I	1	1	0,99 (1890)	—	—	
		2	1,02 (1850)	—	—	
	2	1	3,27 (704)	—	—	
		2	3,53 (354)	—	—	
	3	1	—	1,57 <sub>-</sub> (78,7)	0,43 <sub>-</sub> (39,0)	
		2	3,18 <sub>+</sub> (129) 2,13 <sub>-</sub> (101)	1,30 <sub>-</sub> (71,9)	0,40 <sub>-</sub> (38,5)	
	4	1	0,10 (14710)	0,13 (11430)	0,14 (7500)	
		2	0,01 (17480)	0,01 (17310)	0,16 (7930)	
	7	1	1,76 <sub>+</sub> (103)	1,52 <sub>-</sub> (78,9)	0,44 <sub>-</sub> (39,4)	
		2	3,16 <sub>+</sub> (128) 2,53 <sub>-</sub> (95,8)	1,31 <sub>-</sub> (72,0)	0,41 <sub>-</sub> (38,8)	
	II	2	1	2,06 (670)	1,53 (1510)	—
			2	3,46 (340)	—	—
		3	1	—	1,51 <sub>-</sub> (78,2)	0,41 <sub>-</sub> (38,8)
			2	2,26 <sub>-</sub> (100)	1,30 <sub>-</sub> (71,3)	0,39 <sub>-</sub> (38,3)
4		1	0,40 (7180)	0,43 (5860)	—	
		2	0,05 (8270)	0,07 (7700)	—	
7		1	1,95 <sub>+</sub> (101)	1,55 <sub>-</sub> (79,1)	0,44 <sub>-</sub> (39,6)	
		2	3,12 <sub>+</sub> (127)	1,36 <sub>-</sub> (72,2)	0,42 <sub>-</sub> (39,1)	

стоянных фаз, окаймляющими (в движущейся системе координат) круговую траекторию перемещения нагрузки (при  $q = 1$  и  $2$ ) или заходящими внутрь ограниченного этой траекторией круга (при  $q = 2$ ) (в скобках даны местные значения длин соответствующих волн  $\Lambda = 2\pi/k$ ). Прочерк означает отсутствие данной волновой системы в рассматриваемой точке. Отметим, кроме того, что в этих точках отсутствуют и волны, отвечающие  $i^* = 5, 6$  для вариантов I, II и  $i^* = 1$  для варианта II.

Из приведенных в табл. 4 данных видно, что амплитуды обусловленных изгибными и гравитационными корабельными волнами колебаний пластинки в выбранных точках сопоставимы между собой по порядку величин, несмотря на заметные различия местных значений длин этих волн. Влияние спиралевидных волн на изгиб пластинки здесь менее значительно. Однако с изменением условий генерации происходят деформация фазовой картины колебаний и, следовательно, перераспределение вкладов возбуждаемых волн в изгиб пластинки в фиксированной точке. Напомним, что при  $v < \min(v_{01}, v_{03})$  колебания формируются только спиралевидными волнами.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Объединенного фонда Правительства Украины и Международного научного фонда (грант КЗІ 100).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Букатов А. Е., Ярошенко А. А. Влияние равномерно сжатой плавающей пластинки на развитие трехмерных волн в однородной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 78–83.
2. Davis J. W., Hosking R. J., Sneyd A. D. Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate // J. Fluid Mech. 1985. V. 158. P. 269–287.

3. Squire V. A., Robinson W. H., Haskell T. G., Moore S. G. Dynamic strain response of lake and sea ice to moving loads // *Cold Reg. Sci. and Techn.* 1986. V. 11, N 2. P. 123-139.
4. Schulkes R. M. S. M., Hosking R. J., Sneyd A. D. Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate. Pt II // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 180. P. 297-318.
5. Takizawa T. Response of a floating sea ice sheet to a steadily moving load // *J. Geophys. Res.* 1988. V. 93, N C5. P. 5100-5112.
6. Букатов А. Е., Ярошенко А. А. Развитие трехмерных изгибно-гравитационных волн при движении области давлений переменной интенсивности // *ПМТФ.* 1986. № 5. С. 54-60.
7. Букатов А. Е. Изгибно-гравитационные волны при движении давлений по круговой траектории // *Теоретические и экспериментальные исследования волновых процессов в океане: Сб. науч. тр. / АН УССР. МГИ.* 1991. С. 37-41.
8. Корнев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971.
9. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967.
10. Богородский В. В., Гаврило В. П. Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л.: Гидрометеиздат, 1980.
11. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
12. Алексеенко С. В., Череп А. А. Образование спиральных волн при круговом движении источника в диспергирующей среде // *Докл. РАН.* 1992. Т. 327, № 3. С. 306-310.

*Поступила в редакцию 24/IV 1995 г.,  
в окончательном варианте — 19/I 1996 г.*

---