УДК 517.97+539.375

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЭВОЛЮЦИОННОЙ ЗАДАЧИ О РАЗВИТИИ ТРЕЩИНЫ ПРИ КВАЗИХРУПКОМ РАЗРУШЕНИИ

В. А. Ковтуненко, И. В. Сухоруков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mails: kovtunenko@hydro.nsc.ru, ivs@hydro.nsc.ru

Предложена и изучена общая оптимизационная постановка эволюционной задачи, описывающей развитие трещины в теле с учетом необратимой работы пластической деформации, которая сопровождает распространение трещины. Для оптимальной трещины получены данные об H^2-гладкости поля перемещений в теле и, следовательно, о конечности напряжений в вершине трещины. Для криволинейного пути развития трещины, заданного априори, доказана разрешимость задачи оптимизации (т. е. существование оптимальной трещины). В частном случае прямолинейного пути предложен обобщенный критерий роста трещины. Обсуждается вопрос о выборе пути развития трещины и проводится сравнение с известными критериями разрушения.

Ключевые слова: трещина, квазихрупкое разрушение, вариационная задача с ограничением, условие непроникания, задача оптимизации.

Введение. Для упругого тела с трещиной, берега которой свободны от напряжений, в работах [1, 2], в отличие от классической теории хрупкого разрушения Гриффитса, предложена модель трещины, включающая пластический участок, моделируемый с помощью сил сцепления между берегами этой трещины. Различные физические механизмы взаимодействия в окрестности вершины трещины постулируются в [3, 4]. Детальный анализ нелинейных моделей механики разрушения представлен в работах [5–7].

Согласно схемам Леонова — Панасюка и Дагдейла характерной особенностью модели трещины является предположение, что берега трещины плавно смыкаются в ее вершине, а напряжения конечны, в отличие от классической гипотезы $\sqrt{r}$-особенности для поля перемещений и $1/\sqrt{r}$-особенности для напряжений (r — расстояние до вершины трещины). Анализ смыкания берегов трещины в условиях пластичности проведен также в работе [8].

Несмотря на то что механическая модель трещины при квазихрупком разрушении широко используется, до сих пор отсутствует точная математическая модель, описываемая некоторой вариационной задачей оптимизации и тем самым гарантирующая существование трещин с заданными свойствами при произвольном сложно-напряженном состоянии. Построению такой математической модели и изучению ее свойств посвящена данная работа.

В основу вариационной задачи положено представление функции полной энергии тела с трещиной в виде суммы потенциальной энергии в теле и “поверхностной энергии” на трещине с учетом необратимой работы пластической деформации. Причем распределение

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 05-01-00673, 03-01-00124) и Международного научного фонда INTAS (код проекта 03-51-6046).

последней (функция плотности) зависит от раскрытия трещины по характерной упругопластической диаграмме (см. [9]). При этом возникает введенное ранее в [10, 11] требование неотрицательности функции раскрытия, которое выражает условие взаимного непроникания берегов трещины. Впервые статическая вариационная задача минимизации функции полной энергии с ограничением поставлена в работе [12]. Принципиальная математическая трудность этой задачи состоит в том, что минимизируемый функционал является невыпуклым и недифференцируемым.

Новизна настоящей работы заключается в использовании оптимизационного подхода в рамках квазистатической постановки задачи теории упругости. Оказывается, что статическое напряженное состояние, найденное из решения вариационной задачи минимизации целевой функции полной энергии тела с произвольно фиксированной трещиной, является недостаточным для обоснования модели. Для того чтобы гарантировать конечность напряжений в вершине трещины, необходимо дополнительно минимизировать целевой функционал по всем возможным трещинам. В итоге получаем эволюционную задачу оптимизации функции полной энергии относительно допустимых перемещений и форм трещины. Решение этой задачи содержит критерий роста (или зарастания) трещины и описывает квазихрупкое разрушение.

Основы оптимизационного подхода для описания задачи роста трещины Гриффитса заложены в работе [13]. Анализ разрешимости этой задачи для трещины антиплоского сдвига в рамках непрерывных и дифференцируемых по времени процессов представлен в [14]. Тем не менее вопросы о разрешимости задачи при произвольной топологии трещины и соответственно о выборе пути развития трещины остаются открытыми. С использованием численных методов отслеживания траектории в [15] получены разрывные по времени решения задачи о квазистатическом росте интерфейсной трещины в композите.

1. Эволюционная задача о развитии трещины. Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$, содержащую трещину Γ. Предположим, что Γ есть некоторая кривая в $\mathbb{R}^2$, причем возможен случай $\Gamma = \emptyset$. В области с трещиной $\Omega \setminus \Gamma$ рассмотрим вектор перемещений $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)^{\text{т}}(\boldsymbol{x})$ с $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^2$. Определим стандартные тензоры линейных деформаций и напряжений

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{u}), \qquad \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (i, j = 1, 2)$$

с положительно определенным симметричным тензором упругих коэффициентов c_{ijkl}, который может соответствовать как однородному материалу, так и неоднородному (по повторяющимся индексам $i, j, k, l = 1, 2$ проводится суммирование, индекс после запятой обозначает дифференцирование по соответствующей пространственной координате). Предполагая выбранным вектор $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)^{\text{т}}$ нормали к кривой Γ, можно различить берега трещины Γ^+ и Γ^-, так что ее раскрытие должно быть неотрицательным:

$$[u_\nu] = u_i\nu_i\big|_{\Gamma^+} - u_i\nu_i\big|_{\Gamma^-} \geqslant 0 \qquad \text{на} \quad \Gamma. \tag{1}$$

Условие взаимного непроникания берегов трещины (1) подробно описано в [11].

Для заданной нагрузки $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)^{\text{т}}$ в Ω определим функцию полной энергии

$$E(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}, \Gamma) = P(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}, \Omega \setminus \Gamma) + S([u_\nu], \Gamma), \tag{2}$$

где

$$P(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}, \Omega \setminus \Gamma) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega\setminus\Gamma} (\sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) - f_i u_i)\, d\boldsymbol{x}; \tag{3}$$

$$S([u_\nu], \Gamma) = \int\limits_{\Gamma} \frac{2\gamma_0}{\delta_0} \min(\delta_0, [u_\nu])\, ds; \tag{4}$$

$\gamma_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ — заданные материальные параметры. Функционал P в (3) описывает потенциальную энергию тела с трещиной, функционал S “поверхностной энергии” в (4) зависит от раскрытия трещины, определенного в (1), и характеризует необратимую работу пластической деформации. Эта модель учитывает некоторую пластическую зону Y на трещине Γ, где $0 < [u_\nu] < \delta_0$ и нормальные поверхностные напряжения $\sigma_\nu(\boldsymbol{u}) = \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\nu_j\nu_i$ достигают заданного предела текучести $2\gamma_0/\delta_0$.

В классической модели трещины Гриффитса вместо функционала (4) используется функционал

$$S([u_\nu], \Gamma) = \int\limits_\Gamma 2\gamma_0 \, ds, \tag{5}$$

не зависящий от раскрытия трещины и характеризующий ее хрупкое разрушение. Здесь величина γ_0 имеет механический смысл удельной поверхностной энергии двух берегов Γ^+ и Γ^- трещины Γ.

Дадим следующую механическую интерпретацию рассматриваемой модели трещины. Пусть имеется разрез Σ, который разграничивает составное тело Ω на части, состоящие из одного и того же материала. В недеформированном состоянии берега разреза плотно прилегают друг к другу. Трение между соприкасающимися поверхностями пренебрежимо мало. Предполагается, что берега разреза Σ притягиваются за счет сил адгезии. В результате действия нагрузки $\boldsymbol{f}$ определяется участок $\Gamma \subseteq \Sigma$, на котором происходит раскрытие разреза. При этом Γ разделяется на два непересекающихся множества: G (раскрытие $[u_\nu]$ больше критического δ_0, когда силы адгезии исчезают) и Y (раскрытие $[u_\nu]$ меньше критического δ_0, когда силы адгезии притягивают берега разреза друг к другу). Важно отметить, что описанная постановка задачи актуальна с точки зрения проблем современной наномеханики.

Сформулируем эволюционную задачу для описания развития трещины во времени $t \geqslant 0$ как задачу оптимизации при каждом фиксированном $t > 0$: найти $\Gamma(t) \in \Sigma(\Omega)$, которое удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}(\Gamma(t)) \in H(\Omega \setminus \Gamma(t)), \text{ такое что } [u_\nu(\Gamma(t))] \geqslant 0 \text{ на } \Gamma(t),\\
&E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(\Gamma(t)), \Gamma(t)) \leqslant E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}, \Gamma(t)) \text{ для всех } \boldsymbol{v} \in H(\Omega \setminus \Gamma(t)),\\
&\text{таких что } [v_\nu] \geqslant 0 \text{ на } \Gamma(t);
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&\Gamma(t) \supset \bigcup_{s<t} \Gamma(s),\\
&E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(\Gamma(t)), \Gamma(t)) \leqslant E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(\Gamma), \Gamma) \text{ для всех } \Gamma \in \Sigma(\Omega),\\
&\text{таких что } \Gamma \supset \bigcup_{s<t} \Gamma(s),
\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}(\Gamma) \in H(\Omega \setminus \Gamma), \text{ такое что } [u_\nu(\Gamma)] \geqslant 0 \text{ на } \Gamma,\\
&E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(\Gamma), \Gamma) \leqslant E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}, \Gamma) \text{ для всех } \boldsymbol{v} \in H(\Omega \setminus \Gamma),\\
&\text{таких что } [v_\nu] \geqslant 0 \text{ на } \Gamma;
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\Gamma(0) = \Gamma_0. \tag{9}$$

Равенство (9) — начальное условие при $t = 0$ с заданной начальной трещиной $\Gamma_0 \in \Sigma(\Omega)$ (допустимо $\Gamma_0 = \emptyset$). Неравенство (8) описывает истинные перемещения для произвольно фиксированной трещины $\Gamma \in \Sigma(\Omega)$. Неравенства (6) и (7) включают критерий роста (или зарастания) трещины (энергетический).

Сформулированная задача оптимизации (6)–(9) содержит большой произвол в выборе допустимых трещин $\Gamma \in \Sigma(\Omega)$ и поэтому в общем виде остается неразрешенной. Наиболее общие данные о существовании решений эволюционных задач типа (6)–(9) получены для трещины Гриффитса антиплоского сдвига [14]. В п. **2** исследуются вопросы, относящиеся к корректности задачи (6)–(9), для фиксированной трещины Γ. В п. **3** доказывается разрешимость этой задачи (т. е. существование оптимальной трещины $\Gamma(t) \subset \Sigma$) в случае развития трещины вдоль криволинейного пути $\Sigma \in \Sigma(\Omega)$, заданного априори.

2. Статическая задача для фиксированной трещины. Для фиксированной трещины $\Gamma \in \Sigma(\Omega)$ рассмотрим статическую задачу нахождения истинных перемещений $\boldsymbol{u}(\Gamma)$ среди допустимых $\boldsymbol{v} \in H(\Omega \setminus \Gamma)$, таких что $[v_\nu] \geqslant 0$ на Γ. Эта задача содержится в формулировках (6) и (8).

Постановка задачи и ее корректность. Предположим, что трещина Γ задана в виде гладкой кривой. Согласно (1) определим множество допустимых перемещений

$$K(\Omega \setminus \Gamma) = \{\boldsymbol{v} \in H(\Omega \setminus \Gamma), \quad [v_\nu] \geqslant 0 \text{ на } \Gamma\},$$

где пространство

$$H(\Omega \setminus \Gamma) = \{\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^{\mathrm{T}} \in H^1_0(\Omega \setminus \Gamma)^2\}$$

включает условие $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ закрепления тела на внешней границе $\partial\Omega$. Для $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^2$ рассмотрим задачу минимизации: найти $\boldsymbol{u}(\Gamma) \in K(\Omega \setminus \Gamma)$, такое что

$$E(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}(\Gamma), \Gamma) \leqslant E(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}, \Gamma) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{v} \in K(\Omega \setminus \Gamma) \tag{10}$$

(функция энергии E определена в (2) как сумма P и S). Первое слагаемое представляет собой положительно определенную квадратичную (следовательно, выпуклую и дифференцируемую) функцию $\boldsymbol{u} \mapsto P(\boldsymbol{u})$, второе слагаемое $S([u_\nu])$ — недифференцируемую и невыпуклую (вогнутую) функцию. Этим объясняется трудность анализа (10).

С использованием очевидных свойств неотрицательности и Липшиц-непрерывности функции $[u_\nu] \mapsto S([u_\nu])$ в (4) для $[u_\nu] \geqslant 0$ в [15] доказана

Теорема 1. *Существует решение* $\boldsymbol{u}(\Gamma) \in K(\Omega \setminus \Gamma)$ *задачи невыпуклой минимизации с ограничением* (10).

Следует отметить, что: 1) решение не единственное; 2) отсутствуют условия оптимальности (необходимые и достаточные). Из-за отсутствия условий оптимальности выведем только необходимые условия, характеризующие решение (10), в виде краевой задачи.

Необходимые краевые условия. Введем обозначения для касательных векторов на Γ:

$$[\boldsymbol{u}_\tau] = [\boldsymbol{u}] - [u_\nu]\boldsymbol{\nu}, \qquad \sigma_\tau(\boldsymbol{u})_i = \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\nu_j - \sigma_\nu(\boldsymbol{u})\nu_i \qquad (i = 1, 2).$$

Теорема 2. *Решение задачи* (10) *удовлетворяет соотношениям*

$$-\sigma_{ij,j}(\boldsymbol{u}(\Gamma)) = f_i \quad (i = 1, 2) \quad \text{в} \quad \Omega; \tag{11}$$

$$\boldsymbol{u}(\Gamma) = \boldsymbol{0} \quad \text{на} \quad \partial\Omega \tag{12}$$

и соотношениям на трещине Γ

$$[\sigma_\nu(\boldsymbol{u}(\Gamma))] = 0, \qquad [\boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{u}(\Gamma))] = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{u}(\Gamma)) = \boldsymbol{0}; \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_\nu(\boldsymbol{u}(\Gamma)) \leqslant 2\gamma_0/\delta_0 && \text{при} \quad [u_\nu(\Gamma)] = 0, \\ &\sigma_\nu(\boldsymbol{u}(\Gamma)) = 2\gamma_0/\delta_0 && \text{при} \quad 0 < [u_\nu(\Gamma)] < \delta_0, \\ &\sigma_\nu(\boldsymbol{u}(\Gamma)) = 0 && \text{при} \quad [u_\nu(\Gamma)] > \delta_0. \end{aligned} \tag{14}$$

Доказательство. Будем считать решение достаточно гладким. Возьмем в (10) пробную функцию в виде $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}(\Gamma) \pm \boldsymbol{\xi}$ с произвольной гладкой функцией $\boldsymbol{\xi}$, такой что $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$ на $\partial\Omega$ и $[\xi_\nu] = 0$ на Γ. Тогда из (10) следует, что

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Gamma} \big(\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}(\Gamma))\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\xi}) - f_i\xi_i\big)\, d\boldsymbol{x} = 0.$$

Применяя формулу Грина

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Gamma} \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}(\Gamma))\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{x} = -\int\limits_{\Omega\setminus\Gamma} \sigma_{ij,j}(\boldsymbol{u}(\Gamma))\xi_i\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}(\Gamma))n_j\xi_i\, ds - \\ - \int\limits_{\Gamma} [\sigma_\nu(\boldsymbol{u}(\Gamma))\xi_\nu + \sigma_{\tau i}(\boldsymbol{u}(\Gamma))\xi_{\tau i}]\, ds \qquad (15)$$

($\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)^{\mathrm{т}}$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$), в силу произвольности следов $\xi_\nu^+ = \xi_\nu^-$ и $\boldsymbol{\xi}_\tau^\pm$ на $\Gamma^\pm$ получим равенства (11) и (13).

В соответствии с решением задачи $\boldsymbol{u}(\Gamma)$ разобьем трещину $\Gamma = Y(\boldsymbol{u}(\Gamma)) \cup G(\boldsymbol{u}(\Gamma))$ на два непересекающихся множества

$$Y(\boldsymbol{u}(\Gamma)) = \{\boldsymbol{x} \in \Gamma,\ 0 \leqslant [u_\nu(\Gamma)](\boldsymbol{x}) < \delta_0\}, \quad G(\boldsymbol{u}(\Gamma)) = \{\boldsymbol{x} \in \Gamma,\ [u_\nu(\Gamma)](\boldsymbol{x}) \geqslant \delta_0\}. \qquad (16)$$

Из определения (16) следует, что $\boldsymbol{u}(\Gamma) \in K_{\boldsymbol{u}(\Gamma)}(\Omega \setminus \Gamma)$ и удовлетворяет неравенству

$$E(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}(\Gamma), \Gamma) \leqslant P(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}, \Omega \setminus \Gamma) + S([v_\nu], Y(\boldsymbol{u}(\Gamma))) + S([v_\nu], G(\boldsymbol{u}(\Gamma))) \\ \text{для всех} \quad \boldsymbol{v} \in K_{\boldsymbol{u}(\Gamma)}(\Omega \setminus \Gamma), \qquad (17)$$

где

$$K_{\boldsymbol{u}(\Gamma)}(\Omega \setminus \Gamma) = \{\boldsymbol{v} \in K(\Omega \setminus \Gamma), \quad 0 \leqslant [v_\nu] \leqslant \delta_0 \text{ на } Y(\boldsymbol{u}(\Gamma)), \quad [v_\nu] \geqslant \delta_0 \text{ на } G(\boldsymbol{u}(\Gamma))\}.$$

Неравенство (17) представляет собой задачу минимизации с ограничением для выпуклого дифференцируемого функционала, которая имеет единственное решение, характеризуемое следующим необходимым и достаточным условием оптимальности для всех $\boldsymbol{v} \in K_{\boldsymbol{u}(\Gamma)}(\Omega \setminus \Gamma)$:

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Gamma} \big(\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}(\Gamma))\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(\Gamma)) - f_i(v_i - u_i(\Gamma))\big)\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{Y(\boldsymbol{u}(\Gamma))} \frac{2\gamma_0}{\delta_0}\, [v_\nu - u_\nu(\Gamma)]\, ds \geqslant 0. \qquad (18)$$

Используя формулу Грина (15), доказанные соотношения (11)–(13) и интегрируя по частям объемный интеграл (18), получим неравенство для всех $\boldsymbol{v} \in K_{\boldsymbol{u}(\Gamma)}(\Omega \setminus \Gamma)$:

$$\int\limits_{Y(\boldsymbol{u}(\Gamma))} \Big(\frac{2\gamma_0}{\delta_0} - \sigma_\nu(\boldsymbol{u}(\Gamma))\Big)[v_\nu - u_\nu(\Gamma)]\, ds - \int\limits_{G(\boldsymbol{u}(\Gamma))} \sigma_\nu(\boldsymbol{u}(\Gamma))[v_\nu - u_\nu(\Gamma)]\, ds \geqslant 0. \qquad (19)$$

Зафиксируем малое число $0 < \varepsilon < \delta_0$. Пусть $[u_\nu(\Gamma)](\boldsymbol{x}) = 0$ в некоторой точке трещины $\boldsymbol{x} \in \Gamma$. Полагая $0 \leqslant [u_\nu(\Gamma)] \leqslant \varepsilon$ в некоторой окрестности $O \subset \Gamma$ точки $\boldsymbol{x}$, выберем функцию χ на трещине Γ, такую что $\chi = 0$ на $\Gamma \setminus O$ и $0 \leqslant \chi \leqslant \delta_0 - \varepsilon$ на O. Тогда, подставив выражение $[v_\nu] = [u_\nu(\Gamma)] + \chi$ в (19), получим неравенство

$$\int\limits_{O} \Big(\frac{2\gamma_0}{\delta_0} - \sigma_\nu(\boldsymbol{u}(\Gamma))\Big)\chi\, ds \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \chi \geqslant 0 \qquad (20)$$

и, следовательно, первую строку в краевых условиях на трещине (14).

Определим множество

$$Y_\varepsilon = \{\boldsymbol{x} \in \Gamma,\ \varepsilon < [u_\nu(\Gamma)](\boldsymbol{x}) < \delta_0 - \varepsilon\}.$$

Выберем на трещине функцию χ, такую что $\chi = 0$ на $\Gamma \setminus Y_\varepsilon$ и $0 \leqslant \chi \leqslant 1$ на Y_ε. Тогда $0 \leqslant [u_\nu(\Gamma)] \pm \varepsilon\chi \leqslant \delta_0$ на Y_ε. Подставляя в (19) в качестве пробной функции $[v_\nu] = [u_\nu(\Gamma)] \pm \varepsilon\chi$, получим равенство

$$\int\limits_{Y_\varepsilon} \Big(\frac{2\gamma_0}{\delta_0} - \sigma_\nu(\boldsymbol{u}(\Gamma))\Big)\chi\, ds = 0 \quad \text{для всех } \chi$$

и вторую строку в условиях (14).

Аналогично на множестве

$$G_\varepsilon = \{\boldsymbol{x} \in \Gamma,\ [u_\nu(\Gamma)](\boldsymbol{x}) > \delta_0 + \varepsilon\}$$

построим срезающую функцию χ со свойствами $\chi = 0$ на $\Gamma \setminus G_\varepsilon$ и $0 \leqslant \chi \leqslant 1$ на G_ε. Тогда, подставляя в (19) пробную функцию $[v_\nu] = [u_\nu(\Gamma)] \pm \varepsilon\chi$ с $[u_\nu(\Gamma)] \pm \varepsilon\chi \geqslant \delta_0$ на G_ε, получим равенство

$$-\int\limits_{G_\varepsilon} \sigma_\nu(\boldsymbol{u}(\Gamma))\chi\, ds = 0 \quad \text{для всех } \chi$$

и последнюю строку в (14).

Условия (14) используются при рассмотрении трещин согласно схемам Леонова — Панасюка и Дагдейла. Отметим также, что условия (11)–(14) не являются достаточными для (10).

Дополнительная гладкость решения на трещине. Сначала получим необходимые условия оптимальности для задачи минимизации (10). Для этого используем свойство Липшиц-непрерывности функционала поверхностной энергии:

$$S([v_\nu], \Gamma) - S([u_\nu], \Gamma) \leqslant \int\limits_{\Gamma} \frac{2\gamma_0}{\delta_0} \big|[v_\nu - u_\nu]\big|\, ds \tag{21}$$

с произвольными функциями $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in K(\Omega\setminus\Gamma)$. Подставляя в качестве пробной функции $\boldsymbol{v} = (1-\alpha)\boldsymbol{u}(\Gamma) + \alpha\boldsymbol{\xi}$ с произвольным $\boldsymbol{\xi} \in K(\Omega\setminus\Gamma)$ и параметром $0 < \alpha < 1$ в неравенство (10), деленное на α, и применяя оценку (21), в силу дифференцируемости $\boldsymbol{u} \mapsto P(\boldsymbol{u})$ получим неравенство для всех $\boldsymbol{\xi} \in K(\Omega\setminus\Gamma)$:

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Gamma} \big(\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}(\Gamma))\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{u}(\Gamma)) - f_i(\xi_i - u_i(\Gamma))\big)\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Gamma} \frac{2\gamma_0}{\delta_0}\big|[\xi_\nu - u_\nu(\Gamma)]\big|\, ds \geqslant 0. \tag{22}$$

Используем соотношение (22) для получения следующего результата о дополнительной локальной гладкости решения $\boldsymbol{u}(\Gamma)$ вне окрестности вершин трещины Γ.

Теорема 3. *Для гладкой срезающей функции ρ с $0 \leqslant \rho(\boldsymbol{x}) \leqslant 1$ и носителем в окрестности $B(\boldsymbol{x}^0)$ любой строго внутренней точки $\boldsymbol{x}^0 \in \Gamma$ трещины справедливо включение $\rho\boldsymbol{u}(\Gamma) \in H^2(\Omega\setminus\Gamma)^2$.*

Доказательство. Для гладкой трещины $C^{2,1}$-класса существует функция локального спрямления Γ в окрестности $B(\boldsymbol{x}^0)$, которую можно представить в виде $x_2 = \varphi(x_1)$ ($x_1 \in I$, $\varphi \in C^{2,1}(I)$). Определим дискретные операторы касательного сдвига вдоль трещины в $B(\boldsymbol{x}^0)$:

$$D_\tau^{\pm h} p = \frac{p^\varphi_{\pm h} - p}{h S^\varphi_{\pm h}}, \qquad S^\varphi_{\pm h}(x_1) = \sqrt{1 + \frac{(\varphi(x_1 \pm h) - \varphi(x_1))^2}{h^2}},$$

$$p^{\varphi}_{\pm h}(x_1, x_2) = p(x_1 \pm h, x_2 + \varphi(x_1 \pm h) - \varphi(x_1)) \qquad (h > 0).$$

Для достаточно малого параметра h функция

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{u}(\Gamma) - (h^2/2)S^{\varphi}_{-h}S^{\varphi}_{h}\rho D^{-h}_{\tau}D^{h}_{\tau}(\rho\boldsymbol{u}(\Gamma)) \tag{23}$$

принадлежит множеству $K(\Omega \setminus \Gamma)$, поскольку на Γ выполнено неравенство

$$[\xi_\nu] = (1-\rho^2)[u_\nu(\Gamma)] + (1/2)\rho\big(\rho^{\varphi}_{h}[u_\nu(\Gamma)]^{\varphi}_{h} + \rho^{\varphi}_{-h}[u_\nu(\Gamma)]^{\varphi}_{-h}\big) \geqslant 0$$

в силу $[u_\nu(\Gamma)](x_1, \varphi(x_1)) \geqslant 0$ и $[u_\nu(\Gamma)](x_1 \pm h, \varphi(x_1 \pm h)) \geqslant 0$. Подставляя (23) в качестве пробной функции в неравенство (22), деленное на $h^2 S^{\varphi}_{-h}S^{\varphi}_{h}/2$, получим

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Gamma} \sigma_{ij}\big(D^h_\tau(\rho\boldsymbol{u}(\Gamma))\big)\varepsilon_{ij}\big(D^h_\tau(\rho\boldsymbol{u}(\Gamma))\big)\, d\boldsymbol{x} \leqslant I_1 + I_2 + I_3, \tag{24}$$

где

$$I_1 = \int\limits_{\Omega\setminus\Gamma} \Big(\sigma_{ij}\big(D^h_\tau(\rho\boldsymbol{u}(\Gamma))\big)\varepsilon_{ij}\big(D^h_\tau(\rho\boldsymbol{u}(\Gamma))\big) - \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}(\Gamma))\varepsilon_{ij}\big(\rho D^{-h}_\tau D^h_\tau(\rho\boldsymbol{u}(\Gamma))\big)\Big)\, d\boldsymbol{x},$$

$$I_2 = \int\limits_{\Omega\setminus\Gamma} \rho f_i D^{-h}_\tau D^h_\tau(\rho u_i(\Gamma))\, d\boldsymbol{x}, \qquad I_3 = \frac{2\gamma_0}{\delta_0}\int\limits_{\Gamma} \big|\rho D^{-h}_\tau D^h_\tau(\rho[u_\nu(\Gamma)])\big|\, ds.$$

Используя стандартные аргументы оператора сдвига [11], интегралы I_1, I_2 и I_3 можно оценить следующим образом:

$$I_1 \leqslant \mathrm{const}\, \|\boldsymbol{u}(\Gamma)\|_{H^1(\Omega\setminus\Gamma)^2}\|D^h_\tau(\rho\boldsymbol{u}(\Gamma))\|_{H^1(\Omega\setminus\Gamma)^2},$$

$$I_2, I_3 \leqslant \mathrm{const}\, \|D^h_\tau(\rho\boldsymbol{u}(\Gamma))\|_{H^1(\Omega\setminus\Gamma)^2}.$$

Тогда из (24) следует равномерная по h оценка

$$\|D^h_\tau(\rho\boldsymbol{u}(\Gamma))\|_{H^1(\Omega\setminus\Gamma)^2} \leqslant \mathrm{const},$$

означающая, что $D^2_{\tau\tau}(\rho\boldsymbol{u}(\Gamma)), D^2_{\nu\tau}(\rho\boldsymbol{u}(\Gamma)), D^2_{\tau\nu}(\rho\boldsymbol{u}(\Gamma)) \in L^2(\Omega\setminus\Gamma)^2$, где D_τ, D_ν — касательные и нормальные к трещине Γ производные. Соответственно

$$D_\tau p = \frac{p_{,1} + \varphi' p_{,2}}{\sqrt{1+(\varphi')^2}}, \qquad D_\nu p = \frac{p_{,2} - \varphi' p_{,1}}{\sqrt{1+(\varphi')^2}}.$$

Уравнение (11) представимо локально в $B(\boldsymbol{x}^0)$ в виде

$$D^2_{\nu\nu}\boldsymbol{u}(\Gamma) = \boldsymbol{L}(D^2_{\tau\tau}\boldsymbol{u}(\Gamma), D^2_{\nu\tau}\boldsymbol{u}(\Gamma), D^2_{\tau\nu}\boldsymbol{u}(\Gamma), D_\nu\boldsymbol{u}(\Gamma), D_\tau\boldsymbol{u}(\Gamma), f_\nu, f_\tau).$$

Тогда $D^2_{\nu\nu}(\rho\boldsymbol{u}(\Gamma)) \in L^2(\Omega\setminus\Gamma)^2$, откуда следует утверждение теоремы.

Следствием теоремы 3 является

Лемма 1. *Если в окрестности вершин трещины* $[u_\nu(\Gamma)] = 0$ *и* $[\boldsymbol{u}_\tau(\Gamma)] = \boldsymbol{0}$, *то* $\boldsymbol{u}(\Gamma) \in H^2(\Omega\setminus\Gamma)^2$.

Доказательство леммы 1 приведено в [11].

Гладкость решения эволюционной задачи. Для того чтобы получить гладкость решения в окрестности вершины трещины, недостаточно изучить статическую задачу (10), необходимо также рассмотреть эволюционную задачу оптимизации (6)–(9).

Теорема 4. *Если существует решение* $\Gamma(t)$ *задачи* (6)–(9), *то* $\boldsymbol{u}(\Gamma(t)) \in H^2(\Omega\backslash\Gamma(t))^2$.

Доказательство. Предположим, что существует гладкое продолжение $\Gamma \in \Sigma(\Omega)$ трещины $\Gamma(t)$ в область Ω, т. е. $\Gamma(t) \subset \Gamma$. Так как $K(\Omega \setminus \Gamma(t)) \subset K(\Omega \setminus \Gamma)$, то

$$E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(\Gamma), \Gamma) \leqslant E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(\Gamma(t)), \Gamma(t)).$$

В то же время выполнено обратное неравенство (7), из которого следует, что

$$E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(\Gamma(t)), \Gamma(t)) = E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(\Gamma), \Gamma). \tag{25}$$

Равенство (25) означает, что $\boldsymbol{u}(\Gamma(t)) \in K(\Omega \setminus \Gamma)$ есть решение стационарной задачи (10) с $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(t)$ при фиксированном t, причем $[u_\nu(\Gamma(t))] = 0$ и $[\boldsymbol{u}_\tau(\Gamma(t))] = \boldsymbol{0}$ на $\Gamma \setminus \Gamma(t)$. Поэтому из леммы 1 следует утверждение теоремы.

Если же вершина трещины $\Gamma(t)$ лежит на $\partial\Omega$, то гладкость решения $\boldsymbol{u}(\Gamma(t))$ задачи (6) в вершине следует из соответствующих краевых условий, заданных на внешней границе. Таким образом, теорема доказана.

3. Развитие трещины вдоль заданного криволинейного пути. Рассмотрим случай задачи оптимизации (6)–(9), когда путь трещины задан априори в виде некоторой гладкой линии $\Sigma \in \Sigma(\Omega)$. Например, если данные задачи симметричны относительно некоторой прямой линии, то можно утверждать, что трещина будет развиваться вдоль этой прямой.

Постановка однопараметрической задачи оптимизации и ее разрешимость. Пусть $0 \leqslant s \leqslant L$ — параметр длины дуги вдоль кривой Σ. Будем считать одну вершину трещины фиксированной при $s = 0$, а расположение второй вершины $s = l$ — определяющим всю трещину $\Gamma(l) \subset \Sigma$ в зависимости от параметра ее длины $0 \leqslant l \leqslant L$. В этом случае (6)–(9) принимает вид однопараметрической задачи оптимизации: найти $l(t) \in [0, L]$, такое что

$$\begin{gathered} \boldsymbol{u}(l(t)) \in K(\Omega \setminus \Gamma(l(t))), \quad E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(l(t)), \Gamma(l(t))) \leqslant E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}, \Gamma(l(t))) \\ \text{для всех} \quad \boldsymbol{v} \in K(\Omega \setminus \Gamma(l(t))); \end{gathered} \tag{26}$$

$$E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(\Gamma(l(t))), \Gamma(l(t))) \leqslant E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(l), \Gamma(l)) \qquad \text{для всех} \quad l \in [0, L], \tag{27}$$

где

$$\begin{gathered} \boldsymbol{u}(l) \in K(\Omega \setminus \Gamma(l)), \quad E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(l), \Gamma(l)) \leqslant E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}, \Gamma(l)) \\ \text{для всех} \quad \boldsymbol{v} \in K(\Omega \setminus \Gamma(l)); \end{gathered} \tag{28}$$

$$l(0) = l_0 \tag{29}$$

при заданной начальной трещине Γ_0 длиной $l_0 \in [0, L]$.

Лемма 2. *При фиксированном* $t > 0$ *функция сведенной энергии* E *в зависимости от длины трещины* l *является полунепрерывной снизу, равномерно ограниченной и монотонно убывающей:*

$$l \mapsto E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(l), \Gamma(l)) \in C([0, L)); \tag{30}$$

$$\begin{gathered} E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(0), \Gamma(0)) \geqslant E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(l^1), \Gamma(l^1)) \geqslant E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(l^2), \Gamma(l^2)) \geqslant \\ \geqslant E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(L), \Gamma(L)) \qquad \textit{для всех} \quad 0 \leqslant l^1 \leqslant l^2 \leqslant L. \end{gathered} \tag{31}$$

Доказательство. Неравенство (31) следует из вложений

$$K(\Omega \setminus \Gamma(0)) \subseteq K(\Omega \setminus \Gamma(l^1)) \subseteq K(\Omega \setminus \Gamma(l^2)) \subseteq K(\Omega \setminus \Gamma(L))$$

и неравенства (28).

Докажем утверждение (30). Зафиксируем произвольное $0 \leqslant l < L$ и такое $s_0 > 0$, что $l + s_0 \leqslant L$. Согласно теореме 1 для произвольного $0 \leqslant s \leqslant s_0$ существует $\boldsymbol{u}(l + s) \in K(\Omega \setminus \Gamma(l + s))$, удовлетворяющее неравенству

$$E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(l + s), \Gamma(l + s)) \leqslant E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}, \Gamma(l + s)) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{v} \in K(\Omega \setminus \Gamma(l + s)). \tag{32}$$

Так как $\boldsymbol{u}(l+s) \in K(\Omega \setminus \Gamma(l+s_0))$, то подставляя $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ в (32) и используя $S([u_\nu(l+s)], \Gamma(l+s)) \geqslant 0$ согласно (4), получим равномерную для всех $0 \leqslant s \leqslant s_0$ оценку

$$\|\boldsymbol{u}(l+s)\|_{H^1(\Omega\setminus\Gamma(l+s_0))^2} \leqslant \mathrm{const}. \tag{33}$$

Из оценки (33) выведем существование слабого предела подпоследовательности при $s \to 0$:

$$\boldsymbol{u}(l+s) \to \boldsymbol{u}^* \quad \text{слабо в} \quad H(\Omega \setminus \Gamma(l+s_0)); \tag{34}$$

$$[u_\nu(l+s)] \to [u_\nu^*] \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega \setminus \Gamma(l+s_0)). \tag{35}$$

В силу $[u_\nu(l+s)] = 0$ на $\Gamma(l+s_0) \setminus \Gamma(l+s)$ из (35) следует $[u_\nu^*] = 0$ на $\Gamma(l+s_0) \setminus \Gamma(l)$ и $\boldsymbol{u}^* \in K(\Omega \setminus \Gamma(l))$. Возьмем произвольное $\boldsymbol{v} \in K(\Omega \setminus \Gamma(l))$ в качестве пробной функции в (32) и перейдем к нижнему пределу при $s \to 0$, используя слабую полунепрерывность снизу положительно определенного квадратичного функционала $P(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(l+s), \Omega\setminus\Gamma(l+s))$ из (3). В силу (34), (35) для всех $\boldsymbol{v} \in K(\Omega \setminus \Gamma(l))$ получим

$$E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}^*, \Gamma(l)) \leqslant \liminf_{s\to 0} E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(l+s), \Gamma(l+s)) \leqslant$$
$$\leqslant E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}, \Gamma(l+s)) = E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}, \Gamma(l)). \tag{36}$$

Согласно (36) $\boldsymbol{u}(l) = \boldsymbol{u}^*$ является решением задачи минимизации (28). Из (31) следует неравенство

$$E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(l), \Gamma(l)) \geqslant \limsup_{s\to 0} E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(l+s), \Gamma(l+s)). \tag{37}$$

Неравенства (37), (36) означают, что

$$E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(l), \Gamma(l)) = \lim_{s\to 0} E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(l+s), \Gamma(l+s)) \quad \text{для любого } 0 \leqslant l < L. \tag{38}$$

Таким образом, из (38) следует доказательство леммы.

Следствием леммы 2 является

Теорема 5. *Для любого начального* $l_0 \in [0, L]$ *при каждом* $t > 0$ *существует решение* $l(t) \in [0, L]$ *задачи оптимизации* (26)–(29).

В силу равенства (25) из теоремы 5 следует лемма 3, являющаяся дополнением к лемме 2.

Лемма 3. *Для решения* $l(t)$ *задачи оптимизации* (26)–(29) *функция сведенной энергии удовлетворяет равенству*

$$E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(l(t)), \Gamma(l(t))) = E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(l), \Gamma(l)) \quad \textit{для всех} \quad l(t) \leqslant l \leqslant L. \tag{39}$$

Случай прямолинейного пути. Для случая прямолинейного ($\boldsymbol{\nu} = \mathrm{const}$) пути трещины Σ доказана дифференцируемость сведенного функционала энергии по параметру длины трещины [12]:

$$l \mapsto \frac{\partial E}{\partial l}(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(l), \Gamma(l)) \in C(0, L). \tag{40}$$

Определение производной в (40) задано пределом

$$\frac{\partial E}{\partial l}(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(l), \Gamma(l)) = \lim_{s\to 0} \frac{E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(l+s), \Gamma(l+s)) - E(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(l), \Gamma(l))}{s}. \tag{41}$$

Представление производной (41) получено в виде двух эквивалентных формул. Во-первых, для произвольного (гладкого) поля кинематической скорости $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2)^{\mathrm{T}}$, определенного в Ω и $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$ на $\partial\Omega$ и касательного к трещине ($V_i\nu_i = 0$ на Σ), справедливо интегральное представление

$$\frac{\partial E}{\partial l}(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(l), \Gamma(l)) = \int\limits_{\Omega\setminus\Gamma(l)} \Big(-\operatorname{div}(\boldsymbol{V} f_i)u_i(l) + \frac{1}{2}\operatorname{div}(\boldsymbol{V} c_{ijkl})\varepsilon_{kl}(u(l))\varepsilon_{ij}(u(l)) -$$

$$-\frac{1}{2}\,\sigma_{ij}(u(l))(u_{i,k}(l)V_{k,j} + u_{j,k}(l)V_{k,i})\Big)\,d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Gamma(l)} \operatorname{div}(\boldsymbol{V})\,\frac{2\gamma_0}{\delta_0}\,\min(\delta_0, [u_\nu(l)])\,ds. \qquad (42)$$

Во-вторых, интегрирование по частям (42) вне окрестности B вершины трещины дает эквивалентное представление, не зависящее от выбора B, в виде следующей суммы:

$$\frac{\partial E}{\partial l}(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(l), \Gamma(l)) = I_1(\boldsymbol{u}(l), \Omega \setminus B) - I(\boldsymbol{u}(l), \partial B) + \frac{2\gamma_0}{\delta_0}\,\min(\delta_0, [u_\nu(l)])|_{\partial B\cap\Gamma(l)}. \qquad (43)$$

Здесь первое слагаемое

$$I_1(\boldsymbol{u}(l), \Omega \setminus B) = \int\limits_{\Omega\setminus B} \Big(\frac{1}{2}\,D_\tau(c_{ijkl})\varepsilon_{kl}(u(l))\varepsilon_{ij}(u(l)) - f_i D_\tau(u_i(l))\Big)\,d\boldsymbol{x}$$

можно положить равным нулю в предположении, что $c_{ijkl} = \mathrm{const}$ и $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ в B. Второе слагаемое

$$I(\boldsymbol{u}(l), \partial B) = \int\limits_{\partial B} \sigma_{ij}(u(l))\Big(\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ij}(u(l))(q_k V_k) - D_\tau(u_i(l))q_j\Big)\,ds \qquad (44)$$

($\boldsymbol{q} = (q_1, q_2)^{\mathrm{T}}$ — внешняя нормаль к ∂B) представляет собой известный в теории хрупкого разрушения интеграл Черепанова — Райса. Третье слагаемое определено в точке $\partial B\cap\Gamma(l)$ пересечения контура с трещиной.

Отметим, что в случае трещины Гриффитса согласно (5) имеем $I(\boldsymbol{u}(l), \partial B) = \mathrm{const}$ независимо от пути интегрирования. В рассматриваемом случае из леммы 3 (равенство (39)) и (43) следует

Теорема 6. *Для прямолинейного пути трещины* Σ *производная* (41) *обращается в нуль на решении* $l(t)$ *задачи оптимизации* (26)–(29)*:*

$$\frac{\partial E}{\partial l}(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(l(t)), \Gamma(l(t))) = 0, \qquad (45)$$

и в силу (45) *справедливо равенство*

$$I(\boldsymbol{u}(l(t)), \partial B) = \frac{2\gamma_0}{\delta_0}\,\min(\delta_0, [u_\nu(l(t))])\big|_{\partial B\cap\Gamma(l(t))} \qquad (46)$$

с интегралом I*, определенным в* (44) *по произвольному гладкому контуру* ∂B *вокруг вершины прямолинейной трещины* $\Gamma(l(t))$.

Из формулы (46) можно вывести обобщенный критерий роста (или зарастания) трещины. Действительно, если $[u_\nu(l(t))] \geqslant \delta_0$ в некоторой точке $\partial B \cap \Gamma(l(t))$, то имеем равенство $I(\boldsymbol{u}(l(t)), \partial B) = 2\gamma_0$, которое совпадает с критерием Черепанова — Райса для хрупкого разрушения (когда I является постоянной независимо от выбора контура ∂B). В общем случае из (46) следует, что I зависит от ∂B, и можно оценить $0 \leqslant I(\boldsymbol{u}(l(t)), \partial B) \leqslant 2\gamma_0$. Поэтому определим концевую точку $\boldsymbol{x}_0$ пластической зоны в окрестности вершины трещины, где $[u_\nu(l(t))](\boldsymbol{x}_0) = \delta_0$, и сформулируем критерий разрушения в виде

$$I(\boldsymbol{u}(l(t)), \partial B) = 2\gamma_0$$

для произвольного контура ∂B, такого что $\partial B \cap \Gamma(l(t)) = \boldsymbol{x}_0$. Следует отметить, что условие $[u_\nu(l(t))](\boldsymbol{x}_0) = \delta_0$ в некоторой фиксированной точке $\boldsymbol{x}_0$ трещины используется также как критерий роста трещины [5].

К выбору пути развития трещины. Зафиксируем некоторое $t > 0$. Пусть $\Gamma(t)$ — решение задачи оптимизации (6)–(9). Согласно (13) путь развития $\Sigma \in \Sigma(\Omega)$ трещины $\Gamma(t) \subset \Sigma$ отличается от ее произвольного гладкого продолжения в область Ω условием отсутствия касательных напряжений

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{u}(\Gamma(t))) = \mathbf{0} \quad \text{на} \quad \Sigma. \tag{47}$$

Это необходимое условие выбора пути развития трещины Σ. В частном случае задачи, симметричной относительно некоторой прямой линии Σ, условие отсутствия касательных напряжений реализуется автоматически для всех $\Gamma \subset \Sigma$.

Проиллюстрируем необходимые условия для задачи о зарождении криволинейной трещины в сплошном теле Ω, т. е. $\Gamma_0 = \emptyset$. Выберем монотонно возрастающую нагрузку

$$\boldsymbol{f}(t) = t\boldsymbol{f}^0 \tag{48}$$

и предположим, что решением задачи (6)–(9) является

$$\Gamma(t) = \emptyset \quad \text{для всех } 0 \leqslant t < t^*, \tag{49}$$

т. е. тело остается сплошным, без возникновения пластических зон, до некоторого критического значения $t = t^*$. Зафиксируем произвольное $t < t^*$. Тогда из (6) следует, что $\boldsymbol{u}(\Gamma(t)) \in H_0^1(\Omega)^2$ и удовлетворяет неравенству

$$E(t\boldsymbol{f}^0, \boldsymbol{u}(\Gamma(t)), \emptyset) \leqslant E(t\boldsymbol{f}^0, \boldsymbol{v}, \emptyset) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{v} \in K(\Omega \setminus \emptyset). \tag{50}$$

Очевидно, что решение задачи (50) единственное, и в силу (48) справедливо его представление в линейном по t виде $\boldsymbol{u}(\Gamma(t)) = t\boldsymbol{u}^0$ с функцией $\boldsymbol{u}^0 \in K(\Omega \setminus \emptyset) = H_0^1(\Omega)^2$, удовлетворяющей неравенству

$$E(\boldsymbol{f}^0, \boldsymbol{u}^0, \emptyset) \leqslant E(\boldsymbol{f}^0, \boldsymbol{v}, \emptyset) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{v} \in K(\Omega \setminus \emptyset). \tag{51}$$

Для произвольной гладкой трещины $\emptyset \subset \Gamma \subset \Sigma$ из (25) следует, что $t\,\boldsymbol{u}^0 \in K(\Omega \setminus \Gamma)$ удовлетворяет также (8). Согласно теореме 2, примененной к (51), и с учетом (13) необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{u}^0) = \mathbf{0} \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{52}$$

а из (20) с $O = \Sigma$ необходимо следует, что $t\sigma_\nu(\boldsymbol{u}^0) \leqslant 2\gamma_0/\delta_0$ на Σ, т. е.

$$t^* \leqslant \frac{2\gamma_0}{\delta_0} \, \frac{1}{\max\,(0, \max\limits_{\boldsymbol{x} \in \Sigma} \sigma_\nu(\boldsymbol{u}^0)(\boldsymbol{x}))}. \tag{53}$$

Поэтому справедлива

Теорема 7. *При монотонной нагрузке* (48) *необходимое условие* (52) (*как частный случай* (47)) *характеризует путь зарождения трещины* Σ *и* (53) *является оценкой сверху критического времени* $0 \leqslant t^* \leqslant \infty$ *до момента появления пластической зоны* (*или трещины*) *в первоначально сплошном теле согласно* (49).

На основе равенства (47) можно искать также множество $\Sigma(\Omega)$ возможных путей Σ развития уже имеющейся в теле трещины Γ_0, после чего условие (7) определяет истинный путь развития трещины $\Gamma(t) \in \Sigma$, $\Gamma(0) = \Gamma_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Леонов М. Я., Панасюк В. В.** Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. механика. 1959. Т. 5, № 4. С. 797–812.
2. **Dugdale D. S.** Yelding steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 23. P. 100–104.

3. **Баренблатт Г. И.** О некоторых общих представлениях математической теории хрупкого разрушения // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, № 4. С. 630–643.
4. **Новожилов В. В.** К основам теории равновесных трещин в упругих телах // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, № 5. С. 797–812.
5. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
6. **Астафьев В. И., Радаев Ю. Н., Степанова Л. В.** Нелинейная механика разрушения. Самара: Самар. гос. ун-т, 2001.
7. **Левин В. А., Морозов Е. М., Матвиенко Ю. Г.** Избранные нелинейные задачи механики разрушения. М.: Физматлит, 2004.
8. **Zhao L. G., Tong J., Byrne J.** The evolution of the stress-strain fields near a fatigue crack tip and plasticity-induced crack closure revisited // Fatigue Fract. Engng Materials Struct. 2004. V. 27. P. 19–29.
9. **Marigo J.-J., Truskinovsky L.** Initiation and propagation of fracture in the models of Griffith and Barenblatt // Continuum Mech. Thermodyn. 2004. V. 16. P. 391–409.
10. **Соколовски Я., Хлуднев А. М.** О дифференцировании функционалов энергии в теории трещин с возможным контактом берегов // Докл. РАН. 2000. Т. 374, № 6. С. 776–779.
11. **Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.** Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT-Press, 2000.
12. **Kovtunenko V. A.** Nonconvex problems for crack with nonpenetration // Z. angew. Math. Mech. 2005. Bd 85, N 4. S. 242–251.
13. **Francfort G. A., Marigo J.-J.** Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem // J. Mech. Phys. Solids. 1998. V. 46, N 8. P. 1319–1342.
14. **Dal Maso G., Toader R.** A model for the quasistatic growth of brittle fractures: Existence and approximation results // Arch. Rational Mech. Anal. 2002. V. 162. P. 101–135.
15. **Kovtunenko V. A.** Interface cracks in composite orthotropic materials and their delamination via global shape optimization. Graz, 2004. (Bericht / Univ. Graz; Tech. Univ. Graz. SFB F003; N 307).

Поступила в редакцию 25/VII 2005 г.,
в окончательном варианте — 20/X 2005 г.