

3. Miles J. W. On internal solitary waves. — *Tellus*, 1979, v. 31, N 5.
4. Букреев В. И., Гаврилов Н. В. Экспериментальное исследование уединенных внутренних волн в двухслойной жидкости. — *ПМТФ*, 1983, № 5.
5. Овсянников Л. В. Волновые движения сплошных сред. — Новосибирск: НГУ, 1985.
6. Букреев В. И., Гаврилов Н. В., Знобищев К. Р. Экспериментальное исследование волн в двухслойной жидкости со сдвигом скорости между слоями. — В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1984, вып. 64.
7. Thorpe S. A. Experiments on the instability of stratified shear flows immiscible fluids. — *J. Fluid Mech.*, 1969, v. 39, pt 1.
8. Keulegan G. H. Characteristics of internal solitary waves. — *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 1953, v. 51, N 3.

Поступила 11/VII 1985 г.

УДК 532.593 : 539.3 : 550.3

РАЗВИТИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ПРИ ДВИЖЕНИИ ОБЛАСТИ ДАВЛЕНИЙ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

А. Е. Букатов, А. А. Ярошенко

(Севастополь)

В линейной постановке изучаются трехмерные неустановившиеся изгибно-гравитационные волны, возникающие при движении области гармонически меняющихся со временем давлений по сплошной тонкой упругой пластинке, плавающей на поверхности однородной жидкости конечной глубины.

При отсутствии пластинки установившиеся пространственные волны, генерируемые движущейся областью периодических возмущений, изучались в [1, 2], а неустановившиеся — в [3—5]. Развитие трехмерных изгибно-гравитационных волн, образующихся при движении по пластинке постоянной нагрузки, рассматривалось в [6].

1. Пусть однородная идеальная несжимаемая жидкость конечной глубины H покрыта тонкой упругой пластинкой. Начиная с момента времени $t = 0$ на поверхности пластинки действуют давления вида

$$(1.1) \quad p = p_0 f(x_1, y) \exp(i\sigma t), \quad x_1 = x + vt, \quad v = \text{const.}$$

Исследуем развитие возбуждаемого волнового движения, предполагая, что до начала действия давлений (1.1) жидкость не возмущена, а поверхность пластинки — жидкость (прогиб пластинки) ζ горизонтальна.

Считая движение жидкости потенциальным, а скорости движения частиц жидкости и возвышение поверхности пластинки — жидкость малыми, находим в системе координат x_1, y , связанной с движущейся со скоростью v областью давлений, для определения потенциала скорости φ уравнение Лапласа

$$(1.2) \quad \Delta\varphi = 0, \quad -H < z < 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty$$

с граничными и начальными условиями

$$(1.3) \quad D_1 \nabla^4 \zeta + \kappa_1 F \zeta + \zeta + (\varphi_t + v\varphi_x) \frac{1}{g} = -\frac{p}{\rho g} \quad (z = 0),$$

$$\varphi_z = 0 \quad (z = -H), \quad \varphi(x, y, z, 0) = \zeta(x, y, 0) = 0,$$

$$\bar{D}_1 = \frac{D}{\rho g}, \quad \kappa_1 = \frac{\rho_1 h}{\rho g}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$F = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

где ρ — плотность жидкости; E, h, ρ_1, μ — модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластинки; ζ и φ при $z = 0$ связаны условием $\zeta_t = \varphi_z - v\zeta_x$. Здесь и далее у x_1 опущен индекс 1.

Методом интегральных преобразований Фурье по x , y и Лапласа по t из (1.2), (1.3) для возвышения поверхности пластинка — жидкость получим

$$\zeta = \frac{a}{8\pi^2} e^{i\sigma t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(m, n) M(r) \psi(m, n, t) e^{i(mx+ny)} dm dn,$$

$$\psi = \frac{2}{\Delta_1 \Delta_2} - \frac{1}{\tau \Delta_1} e^{-i\Delta_1 t} + \frac{1}{\tau \Delta_2} e^{-i\Delta_2 t}, \quad a = \frac{P_0}{\rho g},$$

$$\tau(r) = [l(r)M(r)]^{1/2}, \quad l(r) = 1 + D_1 r^4, \quad r = (m^2 + n^2)^{1/2},$$

$$M(r) = rg(1 + \kappa_1 rg \operatorname{th} rH)^{-1} \operatorname{th} rH, \quad \Delta_j = \sigma + \nu m + \delta_j \tau, \quad \delta_j = (-1)^j,$$

$f^*(m, n)$ — трансформанта Фурье функции $f(x, y)$. Первое слагаемое в выражении ζ является решением рассматриваемой задачи без начальных условий, т. е. представляет установившиеся колебания. Второе и третье слагаемые определяются начальными условиями и характеризуют развитие волнового движения.

Так как

$$\psi = \frac{1}{\tau} \left[\frac{1}{\Delta_1} (1 - e^{-i\Delta_1 t}) - \frac{1}{\Delta_2} (1 - e^{-i\Delta_2 t}) \right], \quad \int_0^t e^{-i\Delta_j \xi} d\xi = -i(1 - e^{-i\Delta_j t})/\Delta_j,$$

то ζ после перехода к полярным координатам в случае осесимметричного распределения давлений (1.1) примет вид

$$(1.4) \quad \zeta = -\frac{a}{8\pi^2} \operatorname{Im} [e^{i\sigma t} (J_1 - J_2)],$$

$$J_j = \int_0^{\infty} \int_0^t \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{r f^{*\prime}(r)}{\tau(r)} M(r) e^{-i[rR \cos(\theta-\gamma) - \Delta_j \xi]} d\theta d\xi dr,$$

$$R = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad x = R \cos \gamma, \quad y = R \sin \gamma, \quad m = r \cos \theta, \quad n = r \sin \theta.$$

Асимптотическое исследование выражения ζ при больших значениях R и t выполним методом стационарной фазы для многомерных интегралов. Стационарные точки (r, θ, ξ) для J_j удовлетворяют системе уравнений

$$(1.5) \quad R \cos(\theta - \gamma) - (v \cos \theta + \delta_j \tau') \xi = 0, \quad v \xi \sin \theta - R \sin(\theta - \gamma) = 0;$$

$$(1.6) \quad \sigma + \delta_j \tau + \nu r \cos \theta = 0,$$

где штрих означает производную по r .

Уравнение (1.6) имеет вещественные корни

$$\theta = \pm \theta_j, \quad \theta_j = \arccos(-\delta_j \tau_j), \quad \tau_j = (\tau + \delta_j \sigma)/(\nu r)$$

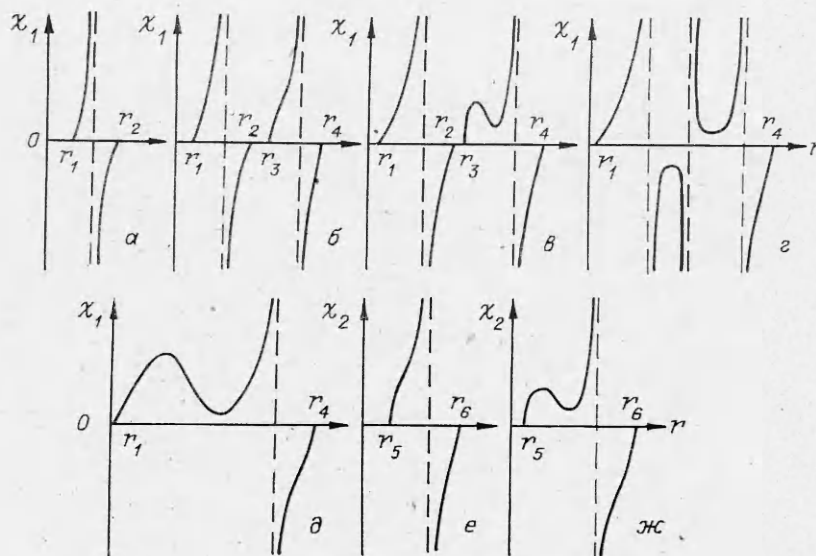
при $|\tau_j| \leq 1$. После подстановки $\theta = \pm \theta_j$ в (1.5) найдем

$$(1.7) \quad \operatorname{tg} \gamma = \chi_j(r), \quad \chi_j = \tau_j' (1 - \tau_j^2)^{1/2} (\nu - \tau_j \tau')^{-1};$$

$$(1.8) \quad \xi = R/u_j, \quad u_j = (\nu - \delta_j \tau') \cos^{-1} \gamma.$$

Из (1.7) определяются значения r , соответствующие стационарным точкам интегралов J_j , в установившемся и неустановившемся режимах. Принадлежность стационарных точек области интегрирования определяется условием $0 \leq \xi \leq t$. Это условие и соотношение (1.8) характеризуют распространение колебаний.

Поведение функций $\chi_1(r)$ для $0 < \sigma < \sigma_0$ и $\chi_2(r)$ для $\sigma > 0$ в качественном отношении показано на рис. 1, а—ж при $0 < \nu < \nu_{01}$, $\nu_{01} < \nu < \nu_{11}$, $\nu_{11} < \nu < \nu_{02}$, $\nu_{02} < \nu < \nu_{10}$, $\nu > \nu_{10}$, $\nu_{03} < \nu < \nu_{12}$, $\nu > \nu_{12}$ соот-



Р и с. 1

ответственно. В случае $\sigma > \sigma_0$ графики $\chi_1(r)$ при $0 < v < v_{11}$ и $v > v_{11}$ похожи на графики $\chi_2(r)$ при $v_{03} < v < v_{12}$ и $v > v_{12}$. Здесь

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= [\beta_2 \tau(\beta_1) - \beta_1 \tau(\beta_2)](\beta_2 - \beta_1)^{-1}, \quad v_{01} = \tau_5(\beta_2), \\ v_{02} &= \tau_5(\beta_1), \quad v_{03} = \tau_6(\beta_3), \quad v_{11} = [\tau_7(\beta_4)]^{1/2}, \quad v_{12} = [\tau_8(\beta_6)]^{1/2}, \\ v_{10} &= [\tau_9(\beta_8)]^{1/2}, \quad \tau_{5,6} = (\tau \pm \sigma)/r, \quad \tau_7 = \tau_5^2 - r(\tau_5')^2 \tau'/\tau'', \\ \tau_8 &= \tau_6^2 - r(\tau_6')^2 \tau'/\tau'', \quad \tau_9 = \tau_5 \tau', \quad \tau_5'(\beta_{1,2}) = 0, \\ \tau_6'(\beta_3) &= 0, \quad \chi_1''(\beta_{4,5}) = 0, \quad \chi_2''(\beta_{6,7}) = 0, \quad \tau_9'(\beta_{8,9}) = 0, \\ \beta_1 &< \beta_2, \quad \beta_4 < \beta_5, \quad \beta_6 < \beta_7, \quad \beta_8 < \beta_9, \\ r_1 &< r_2 < \beta_1 < r_3 < \beta_2 < r_4, \quad r_5 < \beta_3 < r_6, \end{aligned}$$

Т а б л и ц а 1

v	γ	k	σ
$0 < v < v_{01}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	4	$0 < \sigma < \sigma_0$
$v_{01} < v < v_{11}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	3, 4	
	$0 \leq \gamma < \gamma_2$	1, 4	
$v_{11} < v < v_{02}$	$\gamma_2 < \gamma < \gamma_1$	1, 2, 3, 4	
	$\gamma_1 < \gamma \leq \pi$	3, 4	
$v_{02} < v$	$0 \leq \gamma < \gamma_2$	4	
	$\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$	2, 3, 4	
	$\gamma_3 < \gamma \leq \pi$	3	
$0 < v < v_{11}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	4	$\sigma > \sigma_0$
$v > v_{11}$	$0 \leq \gamma < \gamma_2$	4	
	$\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$	2, 3, 4	
	$\gamma_3 < \gamma \leq \pi$	3	

r_k ($k = 1, 2, 3, 4$) — положительные корни уравнения $1 - \tau_1^2 = 0$, а $r_{5,6}$ — уравнения $1 - \tau_2^2 = 0$.

Из анализа поведения функций $\chi_j(r)$ следует, что число k положительных корней α_{jk} уравнений (1.7) зависит от величины угла γ , частоты колебаний σ и скорости v перемещения давлений. Это видно из табл. 1, 2, где приведены значения k для α_{1k} .

Т а б л и ц а 2

v	γ	k	σ	
$v_{03} < v < v_{12}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	3	$\sigma > 0$	
	$v > v_{12}$	$0 \leq \gamma < \gamma_{22}$		1
		$\gamma_{22} < \gamma < \gamma_{11}$		1, 2, 3
	$\gamma_{11} < \gamma \leq \pi$	3		

и α_{2k} . Вследствие симметрии волнового движения относительно оси x в таблицах рассмотрены величины γ из диапазона $0 \leq \gamma \leq \pi$. Здесь $\gamma_2 = \arctg \chi_1(\alpha_2)$, $\gamma_{11} = \arctg \chi_2(\alpha_3)$, $\gamma_{22} = \arctg \chi_2(\alpha_4)$, а по формуле $\gamma = \arctg \chi_1(\alpha_1)$ определяется угол γ_1 , если $v_{11} < v < v_{02}$, и угол γ_3 , если $v > v_{02}$. Отметим, что

$$\chi_1(\alpha_{1,2}) = 0, \quad \chi_2(\alpha_{3,4}) = 0, \quad \alpha_1 < \alpha_2, \quad \alpha_3 < \alpha_4.$$

При $\sigma > 0$ для α_{2k} справедливы оценки

$$r_5 \leq \alpha_{23} \leq r_6 \quad (v_{03} < v < v_{12}), \quad r_5 \leq \alpha_{21} \leq \alpha_3 \leq \alpha_{22} \leq \alpha_4 \leq \alpha_{23} \leq \\ \leq r_6 \quad (v > v_{12}).$$

Кроме того,

$$r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2 \quad (0 < v < v_{01}), \quad r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2 < r_3 \leq \alpha_{13} \leq r_4 \quad (v_{01} < v < \\ < v_{11}), \\ r_1 \leq \alpha_{15} \leq r_2 < r_3 \leq \alpha_{11} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{12} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{13} \leq r_4 \quad (v_{11} < v < v_{02}), \\ r_1 \leq \alpha_{14} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{12} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{13} \leq r_4 \quad (v > v_{02})$$

для $\sigma < \sigma_0$ и

$$r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2 \quad (0 < v < v_1), \quad r_1 \leq \alpha_{14} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{12} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{13} \leq r_2 \\ (v > v_{11})$$

для $\sigma > \sigma_0$.

Каждый корень α_{jk} уравнений (1.7) характеризует систему волн ζ_{jk} вида

$$\zeta_{jk} = \frac{1}{\sqrt{R}} \psi_j(\alpha_{jk}) \cos \left[R\Phi_j(\alpha_{jk}) + \sigma t + \delta_{jk} \frac{\pi}{4} \right] + O \left(\frac{1}{R} \right),$$

$$\psi_j = -af^*(r) M(r) [(1 - \tau_j^2) \tau v]^{-1} (2\pi |\Phi_j|)^{-1/2},$$

$$\Phi_j = \delta_{jr} [(1 - \tau_j^2)^{1/2} \sin \gamma - \tau_j \cos \gamma],$$

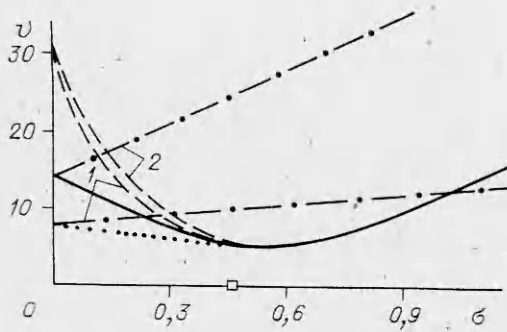
$$j = 1, k = 1 - 4; j = 2, k = 1, 2, 3; \delta_{jk} = (-1)^{j+k} (k \neq 4), \delta_{14} = 1,$$

образующихся в областях $R < u_{jk}t$, $u_{jk} = u_j(\alpha_{jk})$ угловых зон, соответствующих диапазону изменения скорости перемещения области давлений (см. табл. 1, 2). Размеры угловых зон определяются величинами углов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{11}, \gamma_{22}$.

Таким образом, при движении области давлений (1.1) может возбуждаться одна (ζ_{14}), две ($\zeta_{13}, \zeta_{14}; \zeta_{14}, \zeta_{23}$), три ($\zeta_{23}, \zeta_{1k}, k = 3, 4; \zeta_{1k}, k = 2-4$), четыре ($\zeta_{1k}, k = 1-4; \zeta_{23}, \zeta_{1k}, k = 2-4$), пять ($\zeta_{23}, \zeta_{1k}, k = 1-4$), шесть ($\zeta_{1k}, k = 2-4, \zeta_{2k}, k = 1-3$) или семь ($\zeta_{1k}, k = 1-4, \zeta_{2k}, k = 1-3$) систем волн с амплитудами порядка $R^{-1/2}$. Они формируют колебание пластинки и волновое движение жидкости перед областью давлений и за ней.

Волны $\zeta_{14}, \zeta_{21}, \zeta_{22}$ обусловлены периодическими изменениями давлений со временем ($\sigma > 0$). Из них ζ_{21} имеют характер поперечных, а ζ_{22} продольных корабельных волн, возникающих в соответствующих угловых зонах за движущейся областью периодических давлений. Однако в случае упругой пластинки ($E > 0$) они образуются при $v > v_{12}$, а в жидкости с абсолютно гибкой пластинкой ($E = 0$) или открытой поверхностью ($h = 0$) — при $v > 0$.

Волны ζ_{14} генерируются как при $v > 0$, так и в случае, когда область периодических давлений не перемещается [7]. Они имеют вид кольцевых. Такие волны образуются и в жидкости с открытой поверхностью, и в жидкости с абсолютно гибкой пластинкой. В зависимости от скорости v волны ζ_{14} могут находиться вокруг области давлений ($v < v_{02}$) или в угловой зоне $|\gamma| \leq \gamma_3$ за ней ($v > v_{02}$). При $v_{02} < v < v_{10}$ непосредственно перед областью давлений по курсу ее следования волны ζ_{14} не образуются, а на параллельных этому курсу направлениях возмущения, обусловленные



Р и с. 2

волнами ζ_{14} , опережают давления ($\gamma_3 > \pi/2$). При $v > v_{10}$ опережения нет ($\gamma_3 < \pi/2$).

Поперечными и продольными корабельными волнами являются соответственно и волны ζ_{11} , ζ_{12} , возникающие за движущейся областью возмущений. Они образуются и при движении по пластинке (свободной поверхности) области давлений постоянной интенсивности [6, 8]. В условиях упругой пластинки ζ_{11} и ζ_{12} генерируются при $v_{11} < v < v_{02}$ и $v > v_{11}$. В случае абсолютно гибкой пластинки или свободной поверхности ζ_{11} образуются при $0 < v < v_{02}$, а ζ_{12} — при $v > 0$.

Волны ζ_{13} , ζ_{23} изгибаемые. Они генерируются движущейся областью давлений только при наличии сплошной упругой пластинки ($E > 0$). Волны ζ_{13} образуются при $v > v_{01}$, а ζ_{23} — при $v > v_{03}$. Из них ζ_{13} возбуждаются давлениями переменной ($\sigma > 0$) и постоянной ($\sigma = 0$) интенсивности, а ζ_{23} — только при перемещении периодических по времени давлений. Направление гребней волн ζ_{13} и ζ_{23} характеризуют углы

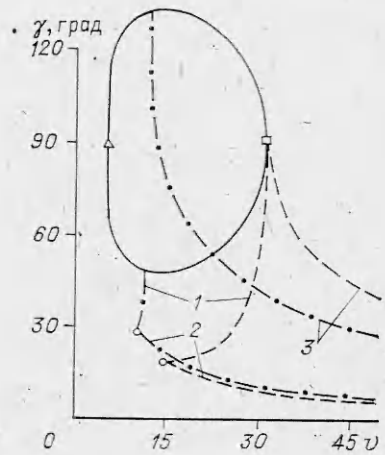
$$\gamma_{01} = \arctg \left(\frac{v^2}{v_{01}^2} - 1 \right)^{1/2}, \quad \gamma_{02} = \arctg \left(\frac{v^2}{v_{03}^2} - 1 \right)^{1/2}.$$

Волны ζ_{13} при $v_{01} < v < v_{11}$ и ζ_{23} при $v_{03} < v < v_{12}$ находятся вокруг области давлений, а при $v > v_{11}$ и $v > v_{12}$ — в угловых зонах $\gamma_2 < |\gamma| \leq \pi$ и $\gamma_{22} < |\gamma| \leq \pi$.

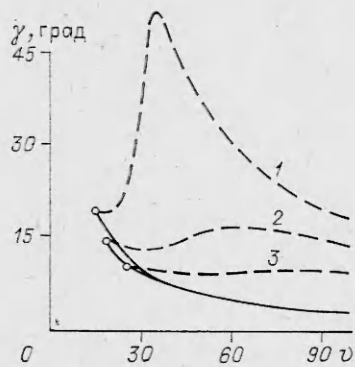
Передние фронты возмущений ζ_{jk} ($j = 1, k = 1-4; j = 2, k = 1, 2, 3$) перемещаются со скоростью u_{jk} .

2. Для количественной оценки критических скоростей перемещения области, в окрестности которых меняется характер волнового движения, и размеров угловых зон, покрытых волнами, проводились численные расчеты для ледяной пластинки [9—11]. При этом модуль упругости, плотность и коэффициент Пуассона ледяной пластинки принимались равными $3 \cdot 10^9$ Н/м², 870 кг/м³, 0,34, а плотность и глубина жидкости — 10^3 кг/м³ и 100 м. Распределение v_{jk} ($j = 0, k = 1, 2, 3; j = 1, k = 0, 1, 2$) по частоте колебаний при $h = 0,2$ м показано на рис. 2, где штриховыми и штрихпунктирными линиями 1 представлены скорости v_{02} , v_{03} , а 2 — скорости v_{10} , v_{12} . Пунктирная линия характеризует v_{01} , а сплошная — v_{11} . Квадратом на оси σ отмечено значение σ_0 .

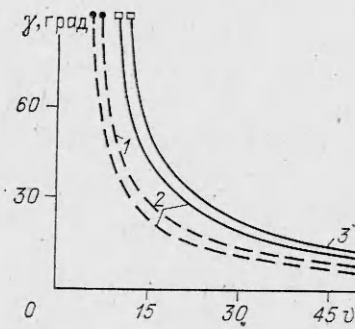
Из рис. 2 следует, что v_{12} , v_{03} растут с увеличением σ . Скорости v_{01} , v_{02} , v_{10} убывают при этом, а v_{11} имеет минимум. При движении по сплошной упругой пластинке области давлений постоянной интенсивности ($\sigma = 0$) есть три критических значения v : $v_0 = v_{01} = v_{03}$, $v_1 = v_{11} = v_{12}$, $\sqrt{gH} = v_{10} = v_{02}$. В случае абсолютно гибкой пластинки (битого льда) или открытой поверхности жидкости для движущейся области периодических давлений критическими скоростями будут v_{02} и v_{10} , убывающие с ростом σ , а для области давлений постоянной интенсивности есть только одна критическая скорость $v = \sqrt{gH}$.



Р и с. 3



Р и с. 4



Р и с. 5

Скорости v_{01} , v_{02} , v_{03} критические и при перемещении по упругой пластинке (сплошному льду) плоского фронта периодических давлений [12]. Если по упругой пластинке движется плоский фронт давлений постоянной интенсивности, то критическими будут $v = v_0$ и $v = \sqrt{gH}$. В жидкости с абсолютно гибкой пластинкой (битым льдом) или открытой поверхностью для плоского фронта периодических давлений критической будет скорость $v = v_{02}$, а для плоского фронта постоянных давлений — $v = \sqrt{gH}$.

Зависимость размеров угловых зон, покрытых волнами, от частоты колебаний и скорости перемещения области давлений приведена на рис. 3–5 при $h = 0,2$ м.

Распределение γ_k ($k = 1, 2, 3$) по скорости v представлено на рис. 3, где штриховые и штрихпунктирные кривые — значения частоты $\sigma = 0$ и $0,2$ с⁻¹, линии 1–3 соответствуют γ_1 , γ_2 , γ_3 . Верхняя часть замкнутой сплошной кривой между треугольником и квадратом представляет максимальные значения угла γ_2 , а нижняя — угла γ_1 . Эти значения достигаются при $v = v_{02}$. Квадратом и треугольником помечены максимальные величины углов $\gamma_{1,3}$, отвечающие частотам $\sigma = 0$ и σ_0 . Значения, помеченные кружками, достигаются при $v = v_{11}$. Приведенные на рис. 3 зависимости показывают, что с увеличением v углы γ_2 , γ_3 убывают, а γ_1 растет для частот, меньших величины σ_0 , которая для рассматриваемых значений исходных параметров $\sim 0,46$ с⁻¹. Большей частоте отвечает меньший угол γ_3 и большие углы $\gamma_{1,2}$. Отметим, что для частот $\sigma > \sigma_0$ углы γ_2 , γ_3 также убывают с ростом v . Увеличение σ в этом случае приводит к уменьшению не только γ_3 , но и γ_2 .

На рис. 4 дано распределение γ_{11} (штриховые линии) и γ_{22} (сплошные) по скорости v , линии 1–3 — частоты 0,01; 0,2; 0,5 с⁻¹. Кружками отмечены значения углов при $v = v_{12}$. Эти зависимости показывают, что γ_{22} убывает с ростом v и σ . Убывает с увеличением частоты и угол γ_{11} . Как функция v угол γ_{11} имеет экстремумы, величина и расположение которых зависят от σ . При $\sigma = 0$ часть кривой $\gamma_{11}(v)$ справа от вершины максимума совпадает с $\gamma_3(v)$, а часть кривой слева от вершины — с функцией $\gamma_1(v)$ (см. рис. 3). Угол γ_{22} при этом совпадает с γ_2 .

Углы γ_{01} и γ_{02} убывают с ростом v . Это иллюстрируется на рис. 5, где $\gamma_{01}(v)$ изображено штриховыми, а $\gamma_{02}(v)$ — сплошными линиями, 1–3 — частоты 0,2; 0,4; 0,8 с⁻¹. Значения в кружках достигаются при $v = v_{01}$, а в квадратах — при $v = v_{03}$. Из рис. 5 следует также, что увеличение σ привело к уменьшению γ_{01} и росту γ_{02} . Если $\sigma = 0$, то $\gamma_{01} = \gamma_{02}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. И. Движение вибратора под поверхностью жидкости. — Тр. Моск. мат. о-ва, 1954, т. 3, с. 3.
2. Войт С. С. Образование волн давлениями, приложенными к поверхности текущей жидкости. — Тр. МГИ АН УССР, 1963, т. 27, с. 103.

3. Черкесов Л. В. Поверхностные и внутренние волны. — Киев: Наук. думка, 1973.
4. Федосенко В. С. О развитии волн, возникающих от движущихся периодических возмущений. — Морск. гидрофиз. исслед., 1971, № 1.
5. Доценко С. Ф., Савоськин В. М. Неустановившиеся поверхностные волны в потоке конечной глубины, генерируемые областью переменных давлений. — В кн.: Теоретическое моделирование волновых процессов в океане. Севастополь: МГИ АН УССР, 1982.
6. Доценко С. Ф. О гравитационно-упругих и гравитационно-капиллярных неустановившихся корабельных волнах. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 5.
7. Бугатов А. Е., Черкесов Л. В. Неустановившиеся колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности жидкости. — ПМ, 1970, т. 6, № 8.
8. Бугатов А. Е., Черкесов Л. В., Ярошенко А. А. Изгибно-гравитационные волны от движущихся возмущений. — ПМТФ, 1984, № 2.
9. Красильников В. Н. О возбуждении изгибно-гравитационных волн. — Акуст. журн., 1962, т. 8, вып. 1.
10. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. — Л.: Гидрометеоздат, 1967.
11. Богородский В. В., Гаврило В. П. Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии. — Л.: Гидрометеоздат, 1980.
12. Бугатов А. Е. Влияние продольно сжатой упругой пластинки на неустановившееся волновое движение однородной жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 5.

Поступила 27/V 1985 г.

УДК 532,5 : 532,5172.4

ВАРИАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ОРГАНИЗОВАННОЙ ЗАВИХРЕННОСТИ В ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЯХ

Ю. Н. Григорьев, В. Б. Левинский

(Новосибирск)

В исследованиях последнего десятилетия, в первую очередь экспериментальных, обзор которых приведен в [1], и численных (см. библиографию в [2]), широко изучались новые объекты в турбулентных потоках — организованные или когерентные структуры (КС). В результате сформулированы характерные черты КС, общие для различных течений. В частности, отмечено преимущественное влияние невязких механизмов на их формирование и развитие. В этой связи в аналитических моделях КС используются точные и приближенные решения уравнений Эйлера динамики идеальной жидкости. Однако такой подход, естественно, приводит к вынужденным упрощениям и не позволяет достаточно полно учесть имеющуюся информацию о КС. Так, в моделях сдвиговых слоев [3—5] рассматривались цепочки КС с однородным распределением завихренности внутри отдельных структур. В [3, 5] КС представлялись вихрями Кирхгофа и Ранкина. В [6—8] для замыкания модельных цепочек КС использовались круглые вихри из однопараметрического семейства [9]:

В большинстве моделей сдвиговых слоев взаимодействие отдельной структуры с остальными КС учитывалось приближенно. Например, в [3] результат воздействия цепочки заменялся полем однородной деформации. В [4, 5] использовались вихри заданной формы, а в [6—8] — простейшее приближение точечных вихрей.

В данной работе для построения аналитических моделей КС в плоских течениях предлагается использовать вариационный принцип, заимствованный из теории информации. Поле завихренности в КС находится из условия максимума функционала информационной энтропии. При этом в форме дополнительных ограничений можно учесть разнообразную информацию об основных свойствах КС в конкретном течении — динамических инвариантах, особенностях симметрии структур, характеристиках осредненного потока.

Ниже вариационный принцип применен к задаче о прямолинейной цепочке КС в бесконечном слое сдвига. Выведено функциональное уравнение для поля завихренности в отдельной КС, в котором последовательно учтено невязкое взаимодействие структур. Найдено, что одно из его аналитических решений, допускающих представление в замкнутой форме, — однопараметрическое семейство вихрей Стюарта [10]. На его основе построена модель цепочки КС для развивающегося во времени сдвигового слоя, которая в общих чертах отражает схему его эволюции. Показано, что при определенном выборе значения параметра семейства с помощью вихрей Стюарта можно получить некоторые осредненные характеристики турбулентных слоев смешения, удовлетворительно соответствующие экспериментальным данным.

1. Известны многочисленные примеры успешных приложений принципа максимума информационной энтропии в различных областях физики (см. библиографию в [11, 12]). Принцип позволяет строить объективные оценки физических полей, согласованные с имеющейся о них информацией. Применительно к задаче о распределении скалярной завихренности