

связной (II тип на фиг. 2), причем точки, соответствующие начальным условиям и равновесному радиусу, лежат на разных ветвях фазовой кривой.

Обозначим  $\delta = 4i_0 R_0^2 / i R_*^2$ , тогда  $R_1^2 = (2R_0^2 / \delta) (1 + \sqrt{1 - \delta})$  и условие  $R_1^2 > 0$  из (13), (25) можно записать в виде

$$\ln \frac{\delta}{2(1 + \sqrt{1 - \delta})} + \frac{\delta}{4} \left( \frac{2}{\delta} (1 + \sqrt{1 - \delta}) - 1 \right) + 1 - \frac{\delta}{2(1 + \sqrt{1 - \delta})} > 0,$$

что после простых преобразований приводит к следующему:

$$\ln \frac{\delta}{2(1 + \sqrt{1 - \delta})} - \frac{\delta}{4} + 1 + \sqrt{1 - \delta} > 0.$$

Для выполнения этого неравенства в области  $1 > \delta > 0$  достаточно

$$\delta > \delta_* \approx 0,86.$$

Иными словами, кроме (25), должно быть еще выполнено условие  $4i_0 R_0^2 / i R_*^2 > \delta_*$ , что весьма существенным образом сужает область начальных условий, для которых возможна необратимая компрессия.

Плотности тока пучка после и до компрессии удовлетворяют неравенству

$$(26) \quad j_1 / j_* < \delta_* \frac{4i_0}{i}.$$

Соотношение (26) качественно не отличается от (24), в обоих случаях компрессия возможна для сравнительно слабых пучков, причем в плоскости обрыва противотока максимальная плотность тока пучка примерно равна плотности противотока.

Поступила 25 V 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Капчинский И. М. Динамика заряженных частиц в линейных резонансных ускорителях. М., Атомиздат, 1966.
2. Poukey J. W., Toepfer A. J. Theory of superpinched relativistic electron beams.— Phys. Fluids, 1974, vol. 17, p. 1582.
3. Lee E. P., Cooper R. K. General envelope equation for cylindrically symmetric charged-particle beams.— Particle Accelerators, 1976, vol. 7, p. 83.
4. Cooper R. K. Solenoid-lense effect in beam-transport equations.— Particle Accelerators, 1976, vol. 7, p. 41.
5. Poukey J. W., Toepfer A. J., Kelly J. G. Axially dependend equilibria for a relativistic electron beams.— Phys. Rev. Lett., 1971, vol. 26, p. 1620.

УДК 533.92 : 621.039.01

### О МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО ТОКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

В. И. Кучеров, П. Б. Руткевич, В. В. Черный

(Харьков)

Для транспортировки сильноточных электронных пучков, как правило, используются вакуумированные или заполненные газом волноводы. Важной характеристикой такой системы является предельный ток релятивистских электронов, который может быть пропущен через дрейфовое

пространство в отсутствие компенсации заряда (предельный вакуумный ток). Общепринятый метод вычисления предельного вакуумного тока основан на анализе решения электростатической задачи вдали от плоскости инжекции. Таким методом в работе [1] найден предельный ток для нерелятивистского пучка; в [2] результат обобщен для случая релятивистского пучка и получена интерполяционная формула для предельного тока вида

$$(1) \quad J_* = \frac{mc^3}{e} \frac{1}{1 + 2 \ln \left( \frac{R}{a} \right)} (\gamma_0^{2/3} - 1)^{3/2},$$

где  $m$ ,  $-e$  — масса покоя и заряд электрона;  $R$ ,  $a$  — радиусы волновода и пучка соответственно;  $\gamma_0$  — энергия пучка в единицах  $mc^2$ ;  $c$  — скорость света.

В связи с тем, что выражение (1) получено при полном пренебрежении влиянием плоскости инжекции на распределение потенциала в дрейфовом пространстве, возникает вопрос о принципиальной достижимости предельного вакуумного тока (см., например, [3]). Действительно, вблизи плоскости инжекции в принципе может образовываться виртуальный катод (особенность в распределении потенциала), что, в свою очередь, может приводить к заширанию тока пучка при значениях, меньших, чем следует из (1). Иначе говоря, при определении предельного тока на основе анализа одномерной электростатической задачи вдали от плоскости инжекции требуется специальное доказательство его достижимости. Для бесконечно тонкого пучка такое доказательство дано в работе [3]. Представляет несомненный интерес исследование распределения квазистатического потенциала в двумерной транспортирующей системе (волноводе) с учетом плоскости инжекции, на основе которого может быть получено реально достижимое значение предельного тока. В данной работе проведено такое исследование и найдена зависимость предельного вакуумного тока от параметров пучка в двумерной системе.

Пусть пучок с током  $J_b$  проходит вдоль оси волновода, помещенного в сильное внешнее магнитное поле  $H_0$ , обеспечивающее полную замагниченность движения электронного пучка

$$H_0^2/8\pi \gg n_b mc^2 \gamma_0,$$

где  $n_b$  — плотность электронов в пучке. При токах пучка, меньших предельного, движение электронов является однотоковым и описывается следующей системой уравнений:

$$\Delta \varphi = 4\pi en_e(r, z), \quad mc^2(\gamma - \gamma_0) = e\varphi(r, z), \\ n_e(r, z) v_e(r, z) = n_b v_b,$$

где  $n_e(r, z)$ ,  $v_e(r, z)$  — зависящие от координат плотность и скорость электронного пучка;  $v_b$  — скорость инжектируемого пучка.

Исключая из системы уравнений  $v_e$  и  $n_e$  и переходя к безразмерным переменным вида

$$x \equiv r/R, \quad y \equiv z/R, \quad \Phi \equiv e\varphi/mc^2, \quad \alpha \equiv a/R, \quad I_b \equiv (4e/mc^3)J_b,$$

получим следующее нелинейное уравнение для безразмерного потенциала  $\Phi$ :

$$(2) \quad \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{I_b (\gamma_0 + \Phi) \Theta(\alpha - x)}{\alpha^2 \sqrt{(\gamma_0 + \Phi)^2 - 1}},$$

где  $\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$

Решение уравнения (2), полученное методом итераций по параметру  $I_b$ , имеет вид

$$(3) \quad \begin{aligned} \Phi_0 &= 0, \\ \Phi_1 &= \int dx' dy' G(x, x'; y, y') \Pi[\Phi_0(x', y')], \\ &\dots \\ \Phi_n &= \int dx' dy' G(x, x'; y, y') \Pi[\Phi_{n-1}(x', y')], \end{aligned}$$

где  $G(x, x'; y, y')$  — функция Грина уравнения (2), а функция  $\Pi(\Phi)$  определена соотношением

$$\Pi[\Phi(x, y)] = \frac{I_b [\gamma_0 + \Phi(x, y)] \Theta(\alpha - x)}{\alpha^2 \sqrt{[\gamma_0 + \Phi(x, y)]^2 - 1}}.$$

Как показано в работе [4], такое решение оказывается справедливым вплоть до предельных значений тока пучка, определяемых выражением (1). Поэтому представляется возможным найти предельный ток из решения (3), приравнявая потенциал на оси кинетической энергии пучка. Заметим, что в действительности ситуация оказывается более тонкой: по достижении током пучка предельного значения появляется поток отраженных электронов. При этом однопотокное уравнение (2) становится несправедливым (его правая часть обращается в бесконечность) и итерационный ряд (3) расходится. Поэтому предельный ток может быть определен как максимальный, при котором еще справедливо решение вида (3).

Ниже покажем эквивалентность предлагаемого определения предельного тока введенному ранее в работах [1—3] и найдем предельные токи для цилиндрического волновода без учета и с учетом плоскости инжекции.

В простейшем случае бесконечных плоских электродов, вдоль которых движется пучок электронов, решение уравнения (2) можно выразить в квадратурах. Это приближение соответствует движению электронов в промежутке между двумя бесконечными коаксиальными цилиндрами, расстояние между которыми равно  $2d$ , при условии  $R_1 \rightarrow \infty$  и бесконечно удаленной плоскости инжекции ( $R_1$  — радиус внутреннего цилиндра). Тогда в результате замены переменной  $x = x_1 + R_1/d$  уравнение (2) принимает вид (всюду далее  $\alpha = 1$ )

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = I_b \frac{\gamma_0 + \Phi}{\sqrt{(\gamma_0 + \Phi)^2 - 1}}, \quad \Phi(1) = \Phi'(0) = 0.$$

Решение этого уравнения, определяющее связь между потенциалом  $\Phi$  при  $\bar{x} = 0$  ( $\Phi_* = \Phi(0)$ ) и током, имеет вид

$$\int_0^{\Phi_*} \frac{d\Phi}{\sqrt{\sqrt{(\gamma_0 + \Phi)^2 - 1} - \sqrt{(\gamma_0 + \Phi_*)^2 - 1}}} = -\sqrt{2I_b}.$$

На фиг. 1 приведена зависимость потенциала  $\Phi_*$  от тока пучка  $I_b$  для различных значений энергии пучка  $\gamma_0$  ( $I - \gamma_0 = 2$ ;  $2 - \gamma_0 = 3$ ;  $3 - \gamma_0 = 5$ ). Хотя эта зависимость двужанчна, физический смысл имеет лишь нижняя ветвь кривых на фиг. 1. Предельный ток при этом определяется как ток, соответствующий  $dI_b/d\Phi_* = 0$  [1, 3].

Итерационный ряд типа (3) в данном случае определяется выражением

$$(4) \quad \begin{aligned} \Phi_0(x) &= 0, \\ &\dots \\ \Phi_n(x) &= I_b \int_0^1 G(x, x') \Pi[\Phi_{n-1}(x')] dx', \end{aligned}$$

где

$$G(x, x') = \begin{cases} 1 - x', & 0 \leq x \leq x', \\ 1 - x, & x' \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Численное суммирование итерационного ряда (4) позволяет получить зависимости потенциала от тока пучка и рассчитать по ним значения предельных токов. Полученные значения совпадают с приведенными на фиг. 1 аналитическими результатами в пределах точности машинного расчета\*. Это означает, что используемый нами итерационный процесс позволяет с достаточной степенью точности определять значения предельных токов.

Исследуем прежде всего поведение потенциала вдали от плоскости инжекции и найдем зависимость предельного тока от энергии пучка. В этом приближении уравнение (2) сводится к виду

$$(5) \quad \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{d\Phi}{dx} \right) = I_b \frac{\gamma_0 + \Phi}{\sqrt{(\gamma_0 + \Phi)^2 - 1}}.$$

Решение этого уравнения может быть получено численным суммированием итерационного ряда (4), где

$$(6) \quad G(x, x') = \begin{cases} \ln x', & 0 \leq x \leq x', \\ \ln x, & x' \leq x \leq 1. \end{cases}$$

На фиг. 2 приведены полученные таким методом зависимости потенциала  $\Phi_*$  на оси пучка от тока пучка  $I_b$  для цилиндрического волновода вдали от плоскости инжекции ( $1 - \gamma_0 = 1,5$ ;  $2 - \gamma_0 = 2$ ;  $3 - \gamma_0 = 3$ ).

Предельный ток  $I_*$  для данного  $\gamma_0$  определяется условием  $dI_b/d\Phi_* = 0$ . Заметим, что с помощью итерационного решения (5) можно получить аппроксимационную формулу (1). В качестве нулевого приближения примем  $\Phi_0(x) = \Phi_*$ . Тогда распределение потенциала в первом приближении имеет вид

$$\Phi_1(x) = I_b \int_0^1 x' dx' G(x, x') \frac{\gamma_0 + \Phi_*}{\sqrt{(\gamma_0 + \Phi_*)^2 - 1}}.$$

Проводя интегрирование, полагая  $x = 0$  и выражая  $I_b$  через остальные параметры, получим

$$I_b = -4\Phi_* \sqrt{1 - 1/(\gamma_0 + \Phi_*)^2}.$$

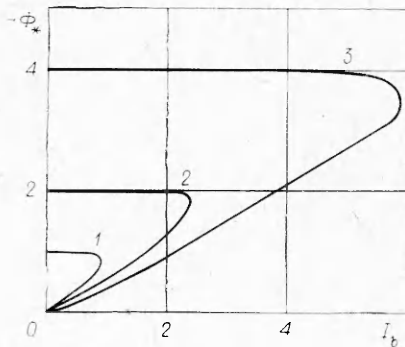
Последнее выражение позволяет найти значение предельного тока в первом приближении

$$(7) \quad I_{*1} = 4(\gamma_0^{2/3} - 1)^{3/2},$$

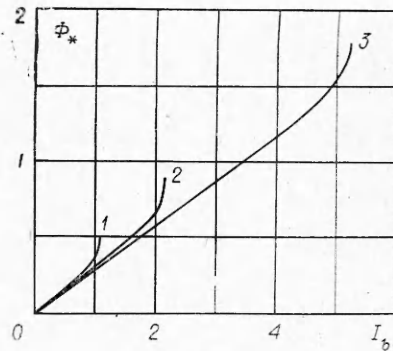
которое в размерных переменных совпадает с формулой (1).

На фиг. 3 приведены зависимости предельного тока от энергии пучка. Кривая 2 соответствует формуле (7), кривая 1 получена из итерационного решения (6). Из их сравнения следует, что абсолютная погрешность формулы (7) по мере увеличения энергии пучка возрастает. В то же время относительная погрешность  $(I_* - I_{*1})/I_*$  в интервале значений  $1 < \gamma_0 < 5$  имеет значение  $\approx 10-20\%$ , возрастая по мере приближения  $\gamma_0$

\* При расчете ограничились относительной точностью  $\approx 1\%$ , так как, с одной стороны, такая точность вполне удовлетворительна для сравнения с приближенными формулами и экспериментами, а с другой — не требует больших затрат машинного времени.



Ф и г. 1



Ф и г. 2

к 1. Аппроксимационная формула для кривой 1 определяется выражением

$$(8) \quad I_* = 4 (\gamma_0^{2/3} - 1)^{3/2} \left( 1 + \frac{1}{4\gamma_0^{1/4}} \right)$$

с точностью 3% для значений энергии  $1 < \gamma_0 < 20$ .

Учет плоскости инжекции требует рассмотрения уравнения (2) без упрощающих предположений. Граничные условия для него в случае полуограниченного цилиндрического волновода имеют вид

$$\Phi'_x(0, y) = \Phi(1, y) = 0, \quad \Phi(x, 0) = \Phi'_y(x, \infty) = 0.$$

Решение уравнения (2) ищем в виде разложения

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\lambda_k x) U_k(y),$$

где  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка ( $J'_0(\lambda_k) = 0$ ).

Тогда для функций  $U_k(y)$  получим уравнение

$$\frac{d^2 U_k}{dy^2} - \lambda_k^2 U_k = \frac{2I_b}{J_1^2(\lambda_k)} \int_0^1 dx' x' J_0(\lambda_k x') \Pi[\Phi(x', y)].$$

Функция Грина для этого уравнения имеет вид

$$G(y, y') = -\frac{1}{2\lambda_k} \left( e^{-\lambda_k |y-y'|} - e^{-\lambda_k |y+y'|} \right).$$

Для потенциала  $\Phi(x, y)$  получаем итерационный ряд вида

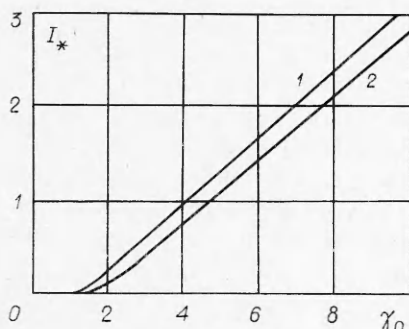
$$\Phi_0(x, y) = 0,$$

$$\Phi_1(x, y) = 2I_b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_k x)}{J_1^2(\lambda_k)} \int_0^{\infty} G(y, y') dy' \int_0^1 x' dx' J_0(\lambda_k x') \Pi(\Phi_0),$$

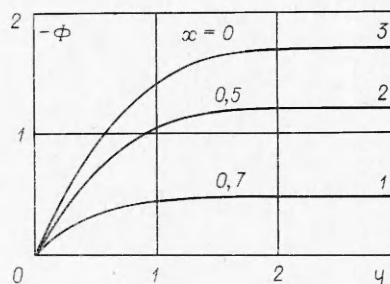
...

$$\Phi_n(x, y) = 2I_b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_k x)}{J_1^2(\lambda_k)} \int_0^{\infty} G(y, y') dy' \int_0^1 x' dx' J_0(\lambda_k x') \Pi(\Phi_{n-1}).$$

Зависимость предельного тока пучка от его энергии была рассчитана с помощью ЭВМ для  $\alpha = 1$ . Эта зависимость в пределах точности расчета ( $\approx 1\%$ ) совпадает с формулой (8).



Ф и г. 3



Ф и г. 4

Наличие плоскости инжекции практически не влияет на значения предельного достижимого вакуумного тока. Этот результат связан с тем, что потенциал в системе, как видно из фиг. 4, имеет гладкий характер (виртуальный катод при токах, меньших, чем определяемый (8), не образуется). Из фиг. 4 также следует, что на расстояниях порядка двух радиусов волновода от плоскости инжекции потенциал становится таким же, как и в случае неограниченного волновода.

Таким образом, в данной работе исследована зависимость распределения электростатического потенциала сильноточного электронного пучка от его энергии в двумерной транспортирующей системе и найдены значения предельного вакуумного тока. Показано, что учет влияния плоскости инжекции на распределение потенциала практически не сказывается на значениях предельного тока, что обусловлено отсутствием особенностей в поведении потенциала вблизи плоскости инжекции.

Авторы выражают благодарность В. И. Курилко за ценные замечания.

Поступила 8 VIII 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Smith L. P., Hartman P. L. The formation maintenance of electron and ion beams. — J. Appl. Phys., 1940, vol. 11, N 3.
2. Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Устойчивость релятивистских электронных пучков в плазме и проблема критических токов. — УФН, 1971, т. 103, вып. 4.
3. Рютов Д. Д. О критическом вакуумном токе релятивистских электронных пучков. — ЖТФ, 1977, т. 47, № 4.
4. Кучеров В. И. Коллективное ускорение ионов сильноточным релятивистским электронным пучком. — ЖТФ, 1975, т. 45, с. 1307.

УДК 535+534.222

### О СТРИКЦИОННОЙ САМОФОКУСИРОВКЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ИМПУЛЬСОВ В ПЛАЗМЕ

А. Ф. Мاستрюков, В. С. Сынах

(Новосибирск)

Как известно [1], при распространении электромагнитных волн в плазме возможно возникновение самофокусировки, обусловленной перераспределением плотности плазмы под действием поля. Такое перераспределение возможно как из-за нагрева плазмы, так и вследствие электрострикционного давления. Можно