

УДК 532.5

ВЛИЯНИЕ ИОННОГО СКОЛЬЖЕНИЯ НА СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ ЗАПЫЛЕННОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ ОЛДРОЙДА, ОПРЕДЕЛЯЕМОЙ ВОСЬМЬЮ КОНСТАНТАМИ

Х. А. Аттия, М. А. М. Абдин*, М. Т. М. М. Эльбарави

Университет г. Эль-Файюм, 63514 Эль-Файюм, Египет

* Каирский университет, 12211 Каир, Египет

E-mails: ah1113@yahoo.com, mostafa_a_m_abdeen@hotmail.com, engmenna_2006@yahoo.com

Исследуется стационарное магнитогидродинамическое течение в круглой трубе запыленной несжимаемой электрически проводящей жидкости Олдройда, определяемой восьмью константами, с учетом ионного скольжения. При этом в осевом направлении приложен постоянный градиент давления, в поперечном — однородное внешнее магнитное поле. Для управляющих нелинейных уравнений импульса с использованием метода конечных разностей получено численное решение. Описывается влияние ионного скольжения, характеристик неньютоновских жидкостей и вязкости твердой фазы на скорость, объемные расходы и коэффициенты поверхностного трения жидкой и твердой фаз.

Ключевые слова: течение в круглой трубе, неньютоновская жидкость, нестационарное состояние, проводящая жидкость, ионное скольжение, ток Холла.

Введение. Течение запыленной электрически проводящей жидкости в круглой трубе при наличии поперечного магнитного поля имеет место в магнитогидродинамических (МГД) генераторах, насосах, ускорителях, расходомерах и т. д. На эксплуатационные качества и коэффициент полезного действия таких устройств оказывает влияние наличие взвешенных твердых частиц золы или сажи, которые появляются вследствие коррозии, износа и процессов горения в МГД-генераторах и плазменных МГД-ускорителях. Существует большое количество работ, в которых проводятся моделирование и экспериментальные измерения вязкости фазы частиц в запыленной жидкости [1–4]. Исследованию течения непроводящей жидкости в круглой трубе также посвящено множество работ (см., например, [5–8]). В работе [5] изучалось стационарное двухфазное вертикальное течение в трубе. В [6, 7] получены решения для нестационарного запыленного потока газа в круглой трубе в отсутствие магнитного поля и вязкости фазы частиц. В [8] с учетом магнитных и вязких эффектов твердой фазы найдены точные решения, обобщающие результаты, полученные в [6, 7].

В [9] показано, что ряд важных для промышленности жидкостей, таких как мутоновые пластмассы, полимеры, пульпа, и пищевые продукты обладают свойствами неньютоновских жидкостей. Интерес к исследованию характеристик течения этих жидкостей обусловлен их широким применением во многих производственных и обрабатывающих отраслях промышленности [10, 11]. Следует отметить, что большинство неньютоновских

жидкостей, используемых в химическом машиностроении, являются жидкостями, имеющими предел текучести, который необходимо превысить, для того чтобы жидкость начала двигаться [12, 13].

В настоящей работе исследуется стационарное течение запыленной несжимаемой электрически проводящей неньютоновской жидкости Олдройда, определяемое восьмью константами, в бесконечной круглой трубе с учетом скольжения ионов. Полагается, что твердая фаза является несжимаемой и электрически непроводящей. Течение в трубе начинается из состояния покоя под действием постоянного осевого градиента давления. Управляющие нелинейные уравнения импульса как для жидкой, так и для твердой фазы решаются численно с использованием метода конечных разностей. Исследуется влияние тока Холла, ионного скольжения, характеристик неньютоновских жидкости и вязкости твердой фазы на скорости жидкой и твердой фаз.

Управляющие уравнения. Рассмотрим стационарное осесимметричное горизонтальное течение запыленной электрически проводящей неньютоновской жидкости через бесконечно длинную трубу радиусом d , вызванное постоянным градиентом давления. Однородное магнитное поле с плотностью потока \mathbf{B}_0 приложено перпендикулярно направлению течения. Учитываются ток Холла и ионное скольжение, магнитное число Рейнольдса полагается очень малым, индуцированным магнитным полем пренебрегается [14]. Будем полагать, что обе фазы ведут себя как вязкие жидкости [8] и объемная доля взвешенных частиц конечна и постоянна.

Уравнение состояния для напряжений Коши в жидкости Олдройда, определяемой восьмью константами, запишем в виде

$$T = -pI + S, \quad (1)$$

где p — давление; I — единичный тензор; S — тензор дополнительных напряжений. Из соотношения (1) следует

$$\begin{aligned} S + \lambda_1 \frac{DS}{Dt} + \frac{\lambda_3}{2} (SA_1 + A_1S) + \frac{\lambda_5}{2} (\text{tr } S)A_1 + \frac{\lambda_6}{2} (\text{tr } (SA_1))I = \\ = \mu \left(A_1 + \lambda_2 \frac{DA_1}{Dt} + \lambda_4 A_1^2 + \frac{\lambda_7}{2} (\text{tr } (A_1^2))I \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где A_1 — первый тензор Ривлина — Эриксона:

$$A_1 = L + L^T, \quad L = \text{grad } \mathbf{v}, \quad (3)$$

λ_i ($i = 1, \dots, 7$) — эмпирические параметры жидкости, полагающиеся постоянными. Контравариантная конвективная производная для стационарного течения имеет вид

$$\frac{D}{Dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)S - LS - SL. \quad (4)$$

Для рассматриваемого движения вектор скорости и тензор напряжений представим в виде

$$\mathbf{v}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V \end{pmatrix}, \quad S(r) = \begin{pmatrix} S_{rr} & S_{r\theta} & S_{rz} \\ S_{\theta r} & S_{\theta\theta} & S_{\theta z} \\ S_{zr} & S_{z\theta} & S_{zz} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где r — расстояние в радиальном направлении; V — скорость жидкой фазы. С использованием уравнений (5) уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно, из уравнений (1)–(5) для проводящей жидкости в запыленном канале, в котором действует однородное магнитное поле, с учетом эффекта Холла [14] получаем следующие скалярные уравнения:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rS_{rr}) - \frac{S_{\theta\theta}}{r}; \quad (6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 S_{r\theta}); \quad (7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r S_{rz}) + \frac{\rho_p \varphi}{1 - \varphi} N (V_p - V) - \frac{\sigma B_0^2 (1 + \beta_i \beta_e)}{(1 + \beta_i \beta_e)^2 + \beta_e^2} V; \quad (8)$$

$$S_{rr} + (\lambda_3 + \lambda_6) S_{rz} \frac{dV}{dr} = \mu (\lambda_4 + \lambda_7) \left(\frac{dV}{dr} \right)^2; \quad (9)$$

$$S_{r\theta} + \frac{\lambda_3}{2} S_{z\theta} \frac{dV}{dr} = 0; \quad (10)$$

$$S_{rz} + \frac{\lambda_3 + \lambda_5}{2} (S_{rr} + S_{zz}) \frac{dV}{dr} + \frac{\lambda_5}{2} S_{\theta\theta} \frac{dV}{dr} - \lambda_1 S_{rr} \frac{dV}{dr} = \mu \frac{dV}{dr}; \quad (11)$$

$$S_{\theta\theta} + \lambda_6 S_{rz} \frac{dV}{dr} = \mu \lambda_7 \left(\frac{dV}{dr} \right)^2; \quad (12)$$

$$S_{\theta z} + \frac{\lambda_3 - 2\lambda_1}{2} S_{\theta r} \frac{dV}{dr} = 0; \quad (13)$$

$$S_{zz} + (\lambda_3 + \lambda_6 - 2\lambda_1) S_{rz} \frac{dV}{dr} = \mu (\lambda_4 + \lambda_7 - 2\lambda_2) \left(\frac{dV}{dr} \right)^2, \quad (14)$$

где V_p — скорость фазы частиц; ρ — плотность жидкой фазы; σ — электропроводность жидкости; $\beta_e = \sigma \beta B_0$ — параметр Холла; β — коэффициент Холла [14]; B_0 — магнитная индукция; β_i — параметр ионного скольжения [14]; ρ_p — плотность фазы частиц; p — давление жидкости; φ — объемная доля твердой фазы; N — коэффициент передачи импульса. Из уравнений (9)–(14) получаем

$$S_{r\theta} = S_{\theta z} = 0; \quad (15)$$

$$S_{rr} = \frac{\mu (\lambda_4 + \lambda_7 - \lambda_3 - \lambda_6) (dV/dr)^2 + \mu \{ (\lambda_4 + \lambda_7) a_2 - (\lambda_3 + \lambda_6) a_1 \} (dV/dr)^4}{1 + a_2 (dV/dr)^2},$$

$$S_{rz} = \frac{\mu dV/dr + \mu a_1 (dV/dr)^3}{1 + a_2 (dV/dr)^2}; \quad (16)$$

$$S_{\theta\theta} = \frac{\mu (\lambda_7 - \lambda_6) (dV/dr)^2 + \mu \{ \lambda_7 a_2 - \lambda_6 a_1 \} (dV/dr)^4}{1 + a_2 (dV/dr)^2},$$

где

$$a_1 = \lambda_1 (\lambda_4 + \lambda_7) - (\lambda_3 + \lambda_5) (\lambda_4 + \lambda_7 - \lambda_2) - \lambda_5 \lambda_7 / 2,$$

$$a_2 = \lambda_1 (\lambda_3 + \lambda_6) - (\lambda_3 + \lambda_5) (\lambda_3 + \lambda_6 - \lambda_1) - \lambda_5 \lambda_6 / 2.$$

Из уравнений (6)–(8) с учетом (15) получаем

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r S_{rr}) - \frac{S_{\theta\theta}}{r}; \quad (17)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0;$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r S_{rz}) + \frac{\rho_p \varphi}{1 - \varphi} N (V_p - V) - \frac{\sigma B_0^2 (1 + \beta_i \beta_e)}{(1 + \beta_i \beta_e)^2 + \beta_e^2} V. \quad (18)$$

Производная по z от давления постоянна, так как течение происходит под действием заданного градиента давления. Поле скорости можно определить из уравнения (18), поле

давления — из уравнения (17). Подставляя S_{rz} из уравнения (16) в уравнение (18), получаем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{\mu dV/dr + \mu a_1 (dV/dr)^3}{1 + a_2 (dV/dr)^2} \right) + \frac{\rho_p \varphi}{1 - \varphi} N(V_p - V) - \frac{\sigma B_0^2 (1 + \beta_i \beta_e)}{(1 + \beta_i \beta_e)^2 + \beta_e^2} V = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (19)$$

(μ — вязкость жидкости). Уравнение импульса для частиц пыли имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\mu_p r \frac{dV_p}{dr} \right) + \rho_p N(V - V_p) = 0, \quad (20)$$

где μ_p — вязкость фазы частиц, которая полагается постоянной. Уравнения (19), (20) можно записать в форме

$$\begin{aligned} \mu \frac{1 + (3a_1 - a_2)(dV/dr)^2 + a_1 a_2 (dV/dr)^4}{(1 + a_2 (dV/dr)^2)^2} \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{1 + a_1 (dV/dr)^2}{1 + a_2 (dV/dr)^2} \frac{dV}{dr} + \\ + \frac{\rho_p \varphi}{1 - \varphi} N(V_p - V) - \frac{\sigma B_0^2 (1 + \beta_i \beta_e)}{(1 + \beta_i \beta_e)^2 + \beta_e^2} V = \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \mu_p \left(\frac{d^2 V_p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_p}{dr} \right) + \rho_p N(V - V_p) = 0. \end{aligned}$$

Следует отметить, что давление твердой фазы полагается незначительным и частицы движутся вместе с жидкой фазой.

Граничные условия задачи зададим в виде

$$\frac{dV(0)}{dr} = 0, \quad \frac{dV_p(0)}{dr} = 0, \quad V(d) = 0, \quad V_p(d) = 0.$$

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\bar{r} = \frac{r}{d}, \quad G_0 = -\frac{\partial p}{\partial z}, \quad k = \frac{\rho_p \varphi}{\rho(1 - \varphi)}, \quad \bar{V}(r) = \frac{\mu V(r)}{G_0 d^2}, \quad \bar{V}_p(r) = \frac{\mu V_p(r)}{G_0 d^2},$$

$\alpha = Nd^2 \rho / \mu$ — обратное число Стокса, $B = \mu_p / \mu$ — относительная вязкость, $\text{Ha} = B_0 d \sqrt{\sigma / \mu}$ — число Гартмана [14] (далее черта над безразмерными величинами опускается). Тогда уравнения (1)–(3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1 + (3a_1 - a_2)(dV/dr)^2 + a_1 a_2 (dV/dr)^4}{(1 + a_2 (dV/dr)^2)^2} \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{1 + a_1 (dV/dr)^2}{1 + a_2 (dV/dr)^2} \frac{dV}{dr} + \\ + k\alpha(V_p - V) - \frac{\text{Ha}^2 (1 + \beta_i \beta_e)}{(1 + \beta_i \beta_e)^2 + \beta_e^2} V + 1 = 0; \quad (21) \end{aligned}$$

$$B \left(\frac{d^2 V_p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_p}{dr} \right) + \alpha(V - V_p) = 0; \quad (22)$$

$$\frac{dV(0)}{dr} = 0, \quad \frac{dV_p(0)}{dr} = 0, \quad V(1) = 0, \quad V_p(1) = 0. \quad (23)$$

Объемные расходы и коэффициенты поверхностного трения жидкой и твердой фаз определяются следующим образом [8]:

$$Q = 2\pi \int_0^1 rV(r) dr, \quad Q_p = 2\pi \int_0^1 rV_p(r) dr, \quad C = -\frac{dV(1)}{dr}, \quad C_p = -Bk \frac{dV_p(1)}{dr}.$$

Результаты исследования и их обсуждение. Уравнения (21), (22) представляют собой связанную систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями (23), которые решались численно с использованием метода конечных разностей. Сначала применялся метод линеаризации, чтобы заменить нелинейные члены на линейной стадии с последующей их коррекцией с помощью итерации, до тех пор пока не будет достигнута сходимость. Для решения полученной линеаризованной системы уравнений в конечных разностях использовалась итерационная схема. Полученная блочная трехдиагональная система решалась с использованием обобщенного алгоритма Томаса [15]. Вычисления проводились при $\alpha = 1$, $k = 10$. Из численных экспериментов на различных сетках следует, что вычислительную область $0 < r < 1$ можно разделить на интервалы с шагом $\Delta r = 0,005$.

На рис. 1 показаны профили скорости жидкости V и частиц пыли V_p при $Na = 1$, $\beta_e = 1$, $\beta_i = 1$, $B = 0,5$ и различных значениях неньютоновских параметров a_1 , a_2 . Видно, что при $a_1 < a_2$ ($a_1 > a_2$) скорости V и V_p больше (меньше), чем в случае неньютоновской жидкости ($a_1 = a_2 = 2$). Также видно, что параметр a_2 оказывает более существенное влияние на скорости V , V_p , чем параметр a_1 .

На рис. 2 показаны профили скорости жидкости V и частиц пыли V_p при $Na = 3$, $\beta_e = 1$, $B = 0,5$ и различных значениях параметров a_1 , a_2 , β_i . При увеличении β_i при всех значениях a_1 , a_2 скорости V и V_p увеличиваются вследствие уменьшения эффективной удельной проводимости, которая уменьшает магнитную силу демпфирования g для V и как следствие увеличивает скорости обеих фаз. Видно, что при всех значениях β_i и $a_1 < a_2$ ($a_1 > a_2$) скорости V и V_p больше (меньше), чем в случае неньютоновской жидкости ($a_1 = a_2 = 2$).

В табл. 1 для установившегося течения приведены значения объемного расхода Q , Q_p , коэффициента поверхностного трения C , C_p жидкой и твердой фаз при $Na = 3$, $\beta_e = 1$, $B = 0,5$ и различных значениях параметров a_1 , a_2 , β_i . Видно, что при всех значениях a_1 , a_2 при увеличении параметра β_i значения Q , Q_p , C , C_p увеличиваются. Это обусловлено тем, что при увеличении β_i уменьшается магнитная сила демпфирования и, следовательно, значительно увеличиваются расходы обеих фаз и поверхностное трение жидкой фазы. В табл. 1 также показано, что при $a_1 < a_2$ значения Q , Q_p , C , C_p увеличиваются, а при $a_1 > a_2$ уменьшаются. Это обусловлено изменением параметра a_1 или a_2 , вследствие чего увеличиваются или уменьшаются скорости и их градиенты, а также увеличиваются средние скорости, расходы и коэффициенты поверхностного трения обеих фаз.

В табл. 2 для установившегося течения приведены значения объемного расхода Q , Q_p , коэффициента поверхностного трения C , C_p жидкой и твердой фаз при $Na = 3$, $\beta_e = 3$, $B = 0,5$ и различных значениях параметров a_1 , a_2 , β_i . Сравнение данных, приведенных в табл. 1, 2, показывает, что при всех значениях a_1 , a_2 увеличение параметра β_e приводит к увеличению Q , Q_p , C , C_p . Это обусловлено тем, что при увеличении β_e уменьшается эффективная удельная проводимость и, следовательно, магнитная сила демпфирования, а расходы обеих фаз и поверхностное трение жидкой фазы увеличиваются. Из табл. 2 следует, что при малых значениях параметра β_i при его увеличении Q , Q_p , C , C_p уменьшаются, однако при дальнейшем увеличении β_i эти параметры увеличиваются. Это можно объяснить тем, что в случае больших β_e ($\beta_e = 3$) и малых β_i влияние параметра β_i проявляется в увеличении силы демпфирования, однако при увеличении β_i его влияние приводит к уменьшению силы демпфирования и, следовательно, к увеличению расходов обеих фаз, а также поверхностного трения жидкой фазы.

Заключение. Изучено стационарное МГД-течение в круглой трубе запыленной проводящей неньютоновской жидкости Олдройда, определяемой восьмью константами, с учетом ионного скольжения. С использованием метода конечных разностей численно решены

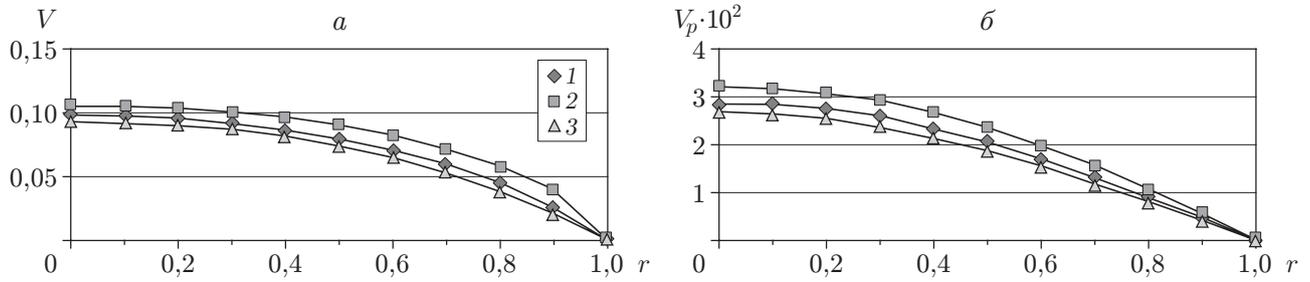


Рис. 1. Профили скоростей V (а) и V_p (б) при $Na = 1$, $\beta_e = 1$, $\beta_i = 1$, $B = 0,5$ и различных значениях a_1, a_2 :
 1 — $a_1 = 2, a_2 = 2$, 2 — $a_1 = 2, a_2 = 10$, 3 — $a_1 = 10, a_2 = 2$

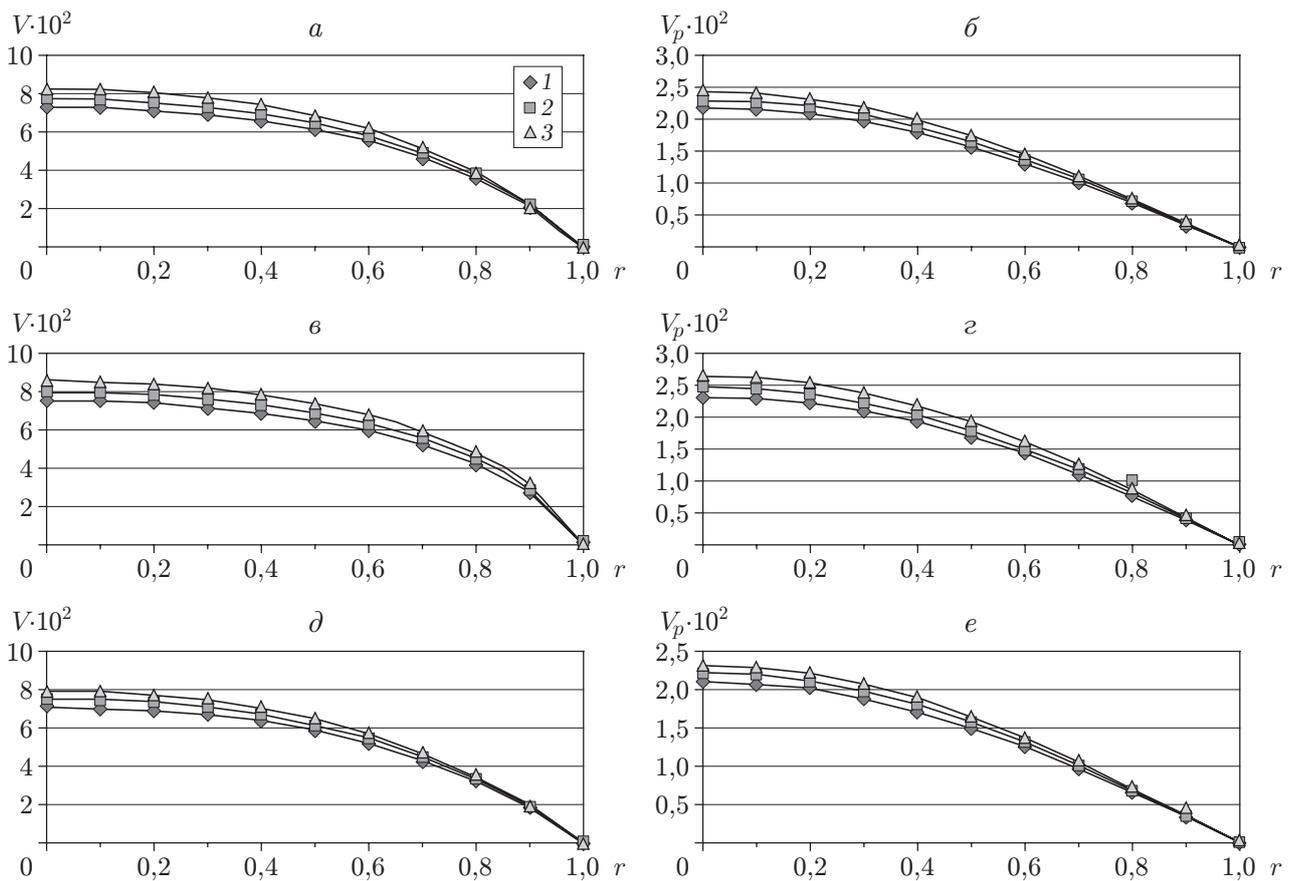


Рис. 2. Профили скорости жидкой фазы V (а, в, д) и твердой фазы V_p (б, г, е) при $Na = 3$, $\beta_e = 1$, $B = 0,5$ и различных значениях a_1, a_2, β_i :
 а, б — $a_1 = 2, a_2 = 2$, в, г — $a_1 = 2, a_2 = 10$, д, е — $a_1 = 10, a_2 = 2$; 1 — $\beta_i = 0$,
 2 — $\beta_i = 1$, 3 — $\beta_i = 2$

Таблица 1

Значения Q , Q_p , C , C_p для установившегося течения
при $Na = 3$, $\beta_e = 1$, $B = 0,5$ и различных значениях a_1 , a_2 , β_i

β_i	$a_1 = 2, a_2 = 2$				$a_1 = 2, a_2 = 10$				$a_1 = 10, a_2 = 2$			
	Q	Q_p	C	C_p	Q	Q_p	C	C_p	Q	Q_p	C	C_p
0	0,1361	0,0325	0,2395	0,1635	0,1513	0,0350	0,4465	0,1835	0,1278	0,0309	0,1967	0,1529
1	0,1429	0,0342	0,2469	0,1715	0,1610	0,0373	0,4850	0,1953	0,1335	0,0323	0,2012	0,1595
2	0,1505	0,0361	0,2549	0,1805	0,1723	0,0399	0,5291	0,2089	0,1396	0,0339	0,2061	0,1666
3	0,1559	0,0374	0,2606	0,1868	0,1806	0,0418	0,5582	0,2189	0,1439	0,0350	0,2095	0,1716

Таблица 2

Значения Q , Q_p , C , C_p для установившегося течения
при $Na = 3$, $\beta_e = 3$, $B = 0,5$ и различных значениях a_1 , a_2 , β_i

β_i	$a_1 = 2, a_2 = 2$				$a_1 = 2, a_2 = 10$				$a_1 = 10, a_2 = 2$			
	Q	Q_p	C	C_p	Q	Q_p	C	C_p	Q	Q_p	C	C_p
0	0,1686	0,0406	0,2738	0,2017	0,2011	0,0464	0,6279	0,2439	0,1536	0,0375	0,2171	0,1829
1	0,1627	0,0391	0,2678	0,1948	0,1914	0,0442	0,5960	0,2321	0,1492	0,0364	0,2136	0,1777
2	0,1665	0,0401	0,2717	0,1993	0,1976	0,0457	0,6120	0,2397	0,1521	0,0371	0,2159	0,1811
3	0,1694	0,0408	0,2747	0,2027	0,2025	0,0468	0,6427	0,2456	0,1543	0,0377	0,2176	0,1837

управляющие нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения. Изучено влияние ионного скольжения и характеристик неньютоновских жидкостей (параметры a_1 , a_2) на скорость, объемный расход и коэффициент поверхностного трения жидкой и твердой фаз. Установлено, что в случае $a_1 < a_2$ ($a_1 > a_2$) все параметры больше (меньше), чем в случае ньютоновской жидкости ($a_1 = a_2$). При увеличении параметра ионного скольжения скорость, объемный расход и коэффициент поверхностного трения обеих фаз увеличиваются при всех значениях a_1 , a_2 . Также установлено, что влияние скольжения ионов на скорость, объемный расход и коэффициент поверхностного трения как жидкой, так и твердой фазы зависит от параметра Холла.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Soo S. L.** Pipe flow of suspensions // Appl. Sci. Res. 1969. V. 21, N 1. P. 68–84.
2. **Gidaspow D., Tsuo Y. P., Luo K. M.** Computed and experimental cluster formation in velocity profiles in circulating fluidized beds // Proc. of the Intern. conf. on fluidization, Alberta (Canada), May 1989. N. Y.: Engng Foundat., 1989. P. 81–88.
3. **Grace J. R.** Fluidized-bed hydrodynamics // Handbook of multiphase systems. Chap. 8.1. N. Y.: McGraw-Hill, 1982.
4. **Sinclair J. L., Jackson R.** Gas-particle flow in a vertical pipe with particle-particle interactions // AIChE J. 1989. V. 35. P. 1473–1486.
5. **Gadiraju M., Peddieson J., Munukutla S.** Exact solutions for two phase vertical pipe flow // Mech. Res. Comm. 1992. V. 19, N 1. P. 7–13.
6. **Dube S. N., Sharma C. L.** A note on unsteady flow of a dusty viscous liquid in a circular pipe // J. Phys. Soc. Japan. 1975. V. 38, N 1. P. 298–310.
7. **Ritter J. M., Peddieson J.** Transient two-phases flows in channels and circular pipes // Proc. of the 6th Canad. congr. of appl. mech., Vancouver (Canada), 30 May — 3 June 1977. S. 1.: Univ. British Columbia, 1977.

8. **Chamkha A. J.** Unsteady flow of a dusty conducting fluid through a pipe // Mech. Res. Comm. 1994. V. 21, N 3. P. 281–288.
9. **Nakayama A., Koyama H.** An analysis for friction and heat transfer characteristics of power-law non-Newtonian fluid flows past bodies of arbitrary geometrical configuration // Wärme- und Stoffübertrag. 1988. Bd 22, N 1/2. S. 29–36.
10. **Larson R. G.** Instabilities in viscoelastic flows // Rheol. Acta. 1992. V. 31, N 3. P. 213–263.
11. **Vinogradov G., Malkin A., Yanovskii Yu., et al.** Viscoelastic properties and flow of narrow distribution polybutadienes and polyisoprenes // J. Polymer Sci. Pt A-2: Polymer Phys. 1972. V. 10, N 6. P. 1061–1084.
12. **Metzner A. B.** Heat transfer in non-Newtonian fluids // Adv. Heat Transfer. 1965. V. 2. P. 357–397.
13. **Brutyan M. A., Kulikovskii A. G.** Instability and nonuniqueness of quasisteady flows of a viscoelastic liquid // Fluid Dynamics. 1996. V. 31, N 6. P. 819–827.
14. **Sutton G. W.** Engineering magnetohydrodynamics / G. W. Sutton, A. Sherman. N. Y.: McGraw-Hill, 1965.
15. **Evans G. A.** Numerical methods for partial differential equations / G. A. Evans, J. M. Blackledge, P. D. Yardley. N. Y.: Springer Verlag, 2000.

*Поступила в редакцию 24/II 2012 г.,
в окончательном варианте — 26/III 2013 г.*
