ПМТФ, № 6, 1963

СПИРАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ГАЗА МЕЖДУ КОАКСИАЛЬНЫМИ ПРОНИЦАЕМЫМИ ЦИЛИНДРАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

И. Б. Чекмарев, И. И. Шахнов

(*Ленинград*)

Стационарное вихревое движение электропроводного газа между бесконечно длинными коаксиальными цилиндрами в присутствии внешнего магнитного поля неоднократно рассматривалось в литературе. Причем, если предположение о несжимаемости среды позволяет получить решение задачи в квадратурах [1], то учет сжимаемости газа приводит к необходимости численного интегрирования уравнения для радиальной составляющей скорости.

В известных работах [2-3], где сжимаемость принималась во внимание, определение указанной составляющей скорости не проводилось. Между тем, как будет показано ниже, именно радиальная составляющая скорости определяет эффект «запирания» в канале, когда нарушается непрерывность газодинамических параметров потока.

Ниже исследуются характеристики течения при условии, что внутри канала не происходит запирания.

Рассмотрим следующую задачу. В кольцевой канал, образованный двумя коаксиальными пористыми электродами, поступает электропроводный невязкий газ. Будем считать, что газ подводится через внешний электрод радиуса b^* и отводится через внутренний электрод радиуса a^*. Пусть при $r^* = b^*$ газ имеет скорость v_b^*, которая составляет с радиальным направлением угол φ (фиг. 1), давление p_b^*, плотность ρ_b^* и температуру T_b^*. Заданы также величина магнитной индукции внешнего продольного магнитного поля B_0^* и радиальная составляющая плотности тока на внешнем электроде j_{rb}^*. Электропроводность газа σ^* полагается постоянной.

Введем безразмерные переменные соотношения

$$\begin{gathered}
r^* = rb^*, \qquad \mathbf{v}^* = \mathbf{v} v_b^*, \qquad p^* = p p_b^*, \qquad \rho^* = \rho \rho_b^* \\
T^* = T T_b^*, \qquad h^* = h\, h_b^*, \qquad \mathbf{j}^* = \mathbf{j} \sigma^* B_0^* v_b^* \\
\mathbf{E}^* = \mathbf{E} B_0^* v_b^* \qquad (h^* = c_p^* T^* + {}^1/_2 v^{*2})
\end{gathered} \tag{1}$$

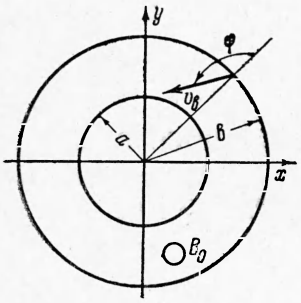
где h^* — полная энтальпия газа. Тогда, ограничиваясь случаем малых магнитных чисел Рейнольдса, имеем систему уравнений:

$$\begin{gathered}
\rho \left(v_r \frac{dv_r}{dr} - \frac{v_\varphi^2}{r} \right) = - \frac{1}{\gamma M_b^2} \frac{dp}{dr} + S j_\varphi \\
\frac{\rho v_r}{r} \frac{d}{dr}(r v_\varphi) = - S j_r, \qquad \rho r v_r = \cos\varphi, \qquad p = \rho T \\
\rho v_r \frac{dh}{dr} = \frac{(\gamma - 1) M_b^2}{1 + {}^1/_2 (\gamma - 1) M_b^2} S j_r E_r \\
j_r = E_r + v_\varphi, \qquad j_\varphi = - v_r, \qquad r j_r = K
\end{gathered} \tag{2}$$

где

$$S = \frac{\sigma^* B_0^{*2} b^*}{\rho_b^* v_b^*}, \qquad M_b = \frac{v_b^*}{\sqrt{(\gamma - 1) c_p^* T_b^*}}, \qquad \gamma = \frac{c_p^*}{c_v^*}, \qquad K = \frac{j_{rb}^*}{\sigma^* B_0^* v_b^*} \tag{3}$$

Соответствующие граничные условия имеют следующий вид:



Фиг. 1

$$
v_r = \cos\varphi, \qquad v_\varphi = \sin\varphi
$$
$$
p = \rho = T = h = 1 \tag{4}
$$
$$
j_r = K \quad \text{при } r = 1
$$

Используя соотношения $\rho v_r = r^{-1}\cos\varphi$, $j_r = r^{-1}K$, получим для азимутальной скорости следующее выражение

$$
v_\varphi = \frac{1}{r}\left(\frac{KS}{\cos\varphi}\,\frac{1-r^2}{2} + \sin\varphi\right) \tag{5}
$$

Для единственной составляющей напряженности электрического поля E_r находим

$$
E_r = \frac{1}{r}\left(\frac{KS}{\cos\varphi}\,\frac{r^2-1}{2} - \sin\varphi + K\right) \tag{6}
$$

Вводя электрический потенциал равенством $E_r = -\,dV\,/\,dr$, определяем разность потенциалов между электродами

$$
\Delta V = V_b - V_a = -\left[\frac{KS}{2\cos\varphi}\left(\frac{1-a^2}{2} + \ln a\right) + (\sin\varphi - K)\ln a\right] \tag{7}
$$

В случае режима холостого хода ($K = 0$) разность потенциалов максимальна и равна

$$
\Delta V_{\max} = -\ln a \sin\varphi \tag{8}
$$

Из формулы (7) нетрудно получить для коэффициента нагрузки

$$
K = \frac{2\cos\varphi\,(\Delta V + \ln a \sin\varphi)}{2\ln a\cos\varphi - S\,[{}^1/_2\,(1-a^2) + \ln a]} \tag{9}
$$

В случае режима короткого замыкания при $\Delta V = 0$ отсюда имеем очевидное выражение для $K_{\max}$.

Интегрируя уравнение энергии при помощи полученных соотношений для v_r, j_r и E_r, находим

$$
h = 1 - \frac{(\gamma-1)\,M_b^2}{1 + {}^1/_2\,(\gamma-1)\,M_b^2}\,\frac{KS}{\cos\varphi}\left[\frac{KS}{2\cos\varphi}\left(\frac{1-r^2}{2} + \ln r\right) + \right.
$$
$$
\left. + (\sin\varphi - K)\ln r\right] \tag{10}
$$

Отсюда для относительного перепада энтальпии получаем формулу

$$
\eta = \frac{h_b{}^* - h_a{}^*}{h_b{}^*} = 1 - h_a =
$$
$$
= \frac{(\gamma-1)\,M_b^2}{1 + {}^1/_2\,(\gamma-1)\,M_b^2}\,\frac{KS}{\cos\varphi}\left[\frac{KS}{2\cos\varphi}\left(\frac{1-a^2}{2} + \ln a\right) + (\sin\varphi - K)\ln a\right] \tag{11}
$$

Исследование выражения (11) показывает, что при

$$
K_0 = \frac{\ln a \sin\varphi\cos\varphi}{2\ln a\cos\varphi - S\,({}^1/_2\,(1-a^2) + \ln a)} = \frac{1}{2}K_{\max} \tag{12}
$$

что соответствует разности потенциалов

$$
\Delta V_0 = -\frac{1}{2}\ln a\sin\varphi = \frac{1}{2}\Delta V_{\max} \tag{13}
$$

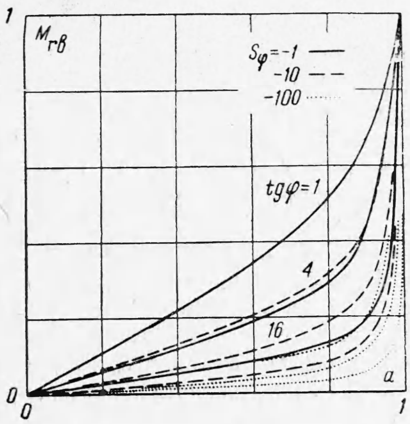
относительный перепад энтальпии имеет максимальное значение

$$\eta_0 = \frac{1}{2}\,\frac{(\gamma-1)\,M_b^2}{1+{}^1/_2\,(\gamma-1)M_b^2}\,\frac{S\ln^2 a\sin^2\varphi}{2\ln a\cos\varphi - S\,({}^1/_2\,(1-a^2)+\ln a)} \tag{14}$$

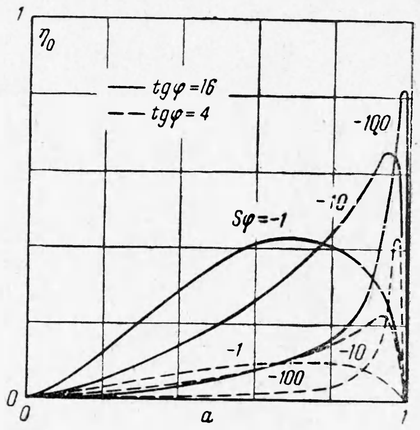
Заметим, что при изменении расстояния между электродами от 0 до 1 коэффициент нагрузки меняется

$$\text{от}\quad K_0 = \frac{1}{2}\sin\varphi \quad\text{до}\quad K_0 = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2\cos\varphi - S}$$

Если в формуле (11) величины a, M_b, S считать независимыми, то экстремального значения η по этим параметрам не существует. Условие



Фиг. 2



Фиг. 3

непрерывности течения в канале налагает на эти параметры определенную связь, которая может быть найдена при помощи анализа уравнения для радиальной составляющей скорости.

Путем несложных преобразований получаем для неизвестных функций v_r и p следующую систему уравнений:

$$\frac{dv_r}{dr} = \frac{1}{(M_b^2\cos\varphi v_r - \gamma rp)}\Big[pv_r + \gamma M_b^2\cos\varphi\frac{v_\varphi^2}{r} - \gamma M_b^2 S r v_r^2 +$$

$$+ (\gamma-1)\,M_b^2\cos\varphi v_\varphi\frac{dv_\varphi}{dr} - \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_b^2\right)\cos\varphi\,\frac{dh}{dr}\Big] \tag{15}$$

$$rpv_r = \cos\varphi\left[\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_b^2\right)h - \frac{\gamma-1}{2}M_b^2 v_r^2 - \frac{\gamma-1}{2}M_b^2 v_\varphi^2\right] \tag{16}$$

Запирание, как видно из уравнения (15), имеет место при

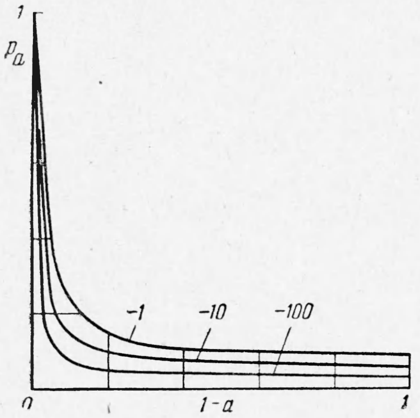
$$M_b^2\cos\varphi v_r - rp = 0$$

т. е. когда число Маха, определенное по радиальной скорости v_r

$$M_r = v_r^*\sqrt{\frac{\rho^*}{\gamma p^*}} = M_b v_r\sqrt{\frac{\rho}{p}} = 1 \tag{17}$$

Система (15) — (16) для случая одноатомного газа ($\gamma = {}^5/_3$) решалась на ЭВМ «БЭСМ-2» методом Эйлера с шагом интегрирования $\Delta r = 10^{-2}$. Интегрирование производилось в диапазоне $0.1 \leqslant a \leqslant 0.9$ и $0.1 \leqslant M_b \leqslant 4$ с интервалом, равным 0.1.

При этом величина $S_\varphi = S / \sin\varphi$ последовательно принимала значения $S_\varphi = -1$, -10, -100, а $\operatorname{tg}\varphi = 1, 4, 16$. Коэффициент нагрузки K вычислялся по формуле (12), соответствующей значению η_0. В ходе вычислений определялись величины v_r, v_φ, p, h, ΔV — причем машиной было проанализировано всего 3240 вариантов. Кроме вариантов, когда внутри канала запирание не происходило, были отобраны варианты, соответствующие запиранию на поверхности внутреннего электрода. В последнем случае с целью сокращения машинного времени условно принималось, что запирание имеет место на поверхности внутреннего электрода, если при $|r - a| \leqslant 0.05$ производная dv_r / dr меняет знак или выполняется неравенство $|M_r^2 - 1| \leqslant 0.05$. В результате были получены максимально допустимые значения входного числа Маха M_b в зависимости от параметров φ и S_φ при различных a. Соответствующие графики в координатах a и $M_{rb} = M_b |\cos\varphi|$ приведены на фиг. 2, причем для каждого данного значения S_φ верхняя кривая соответствует $\operatorname{tg}\varphi = 1$, средняя — $\operatorname{tg}\varphi = 4$ и нижняя — $\operatorname{tg}\varphi = 16$.



Фиг. 4

В значительном диапазоне изменения размера a ($a < 0.7$) при $|\operatorname{tg}\varphi| > 1$ и $0 \leqslant |S_\varphi| \leqslant 100$ эта зависимость может быть аппроксимирована формулой

$$M_{rb} = a \left[\sqrt{|\operatorname{tg}\varphi|}\,(1.67 + 0.117\,|S_\varphi| - 6.21 \cdot 10^{-4} S_\varphi^2)\right]^{-1} \tag{18}$$

На фиг. 3 для случаев $\operatorname{tg}\varphi = 16$ и $\operatorname{tg}\varphi = 4$ приведены кривые, показывающие изменение η_0 в зависимости от размера a при различных S_φ и максимально допустимых значениях M_b; функция η_0 имеет ясно выраженный экстремальный характер, причем максимум величины η_0 возрастает с увеличением $|\operatorname{tg}\varphi|$.

С увеличением параметра $|S_\varphi|$ максимум η_0 также возрастает, причем положение максимума смещается в сторону больших a, а его область сужается.

Перепад давления увеличивается с ростом $|S_\varphi|$, причем, если $a < 0.7$, то он практически не зависит от a. Для случая $\operatorname{tg}\varphi = 16$ зависимость величины p_a, обратной перепаду давления, от радиуса a при значениях $S_\varphi = -1, -10, -100$ приведена на фиг. 4.

Поступила 15 VII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Чекмарев И. Б. Некоторые вопросы стационарного течения проводящей жидкости в бесконечно длинной кольцевой трубе при наличии радиального магнитного поля. Ж. техн. физ., 1960, т. 30, № 6, 601—605.
2. Mc Cune I. E., Donaldson C. D. On the magnetogasdynamics of compressible vortices. Progr. Astronaut. and Rocketry, 1961, vol. 3.
3. Coerdt R. J., Davis W. C., Craig R. T. A vortex MHD power generator. Progr. Astronaut. and Rocketry, 1961, vol. 3.