

Е. И. Пермяков

СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ПОТОКАХ В ТРУБАХ В СЛУЧАЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Известно, что при возбуждении стоячих волн в резонаторах возникают стационарные течения [1], которые существенно влияют на тепло- и массоперенос [2, 3]. В литературе можно найти множество конкретных результатов в этой области исследований, однако у них сравнительно узкая область приложения.

Поясним, что имеется в виду. Рассмотрим течения в трубах-резонаторах. В случае осциллирующих потоков течение характеризуется двумя критериями: обычно используют число Струхалья $Sh = 2R\omega/u_m$ и колебательное число Рейнольдса $Re_k = 2Ru_m/\nu$ (R — радиус трубы, ω — циклическая частота колебаний, u_m — амплитуда колебаний скорости, ν — кинематическая вязкость). На плоскости $Re_k - Sh$ можно указать три области: *I* — область ламинарного течения (в которой лежат все имеющиеся в литературе результаты), *II* — область турбулентных течений, в которой существен нестационарный характер турбулентности, *III* — область, в которой можно считать турбулентность квазистационарной (рис. 1). Границами этих областей являются кривые 1 и 2 соответственно для

$$(1) \quad Sh = Re_k / 160\,000;$$

$$(2) \quad Sh = 0,158 / Re_k^{0,25}.$$

Граница (1) получена в результате обобщения экспериментальных и теоретических данных [4], (2) — результат теоретического анализа [5]. Граница (2) отвечает условию $Z = 4R\omega/\lambda u_m < 1$, где λ — коэффициент гидравлического сопротивления, в (2) подставлена зависимость $\lambda(Re_k)$ из закона Блазиуса для гладкостенных труб [6]. Очевидно, что расширение области исследования вторичных течений требует учета возможной турбулизации потока.

В данной работе ставится задача теоретического изучения стационарных течений в случае квазистационарной турбулентности, т. е. в области *III*, которая может быть существенно расширена, если стенки трубы шероховатые, т. е. если $\lambda = \text{const}$ [6].

Пусть на одном конце длинной цилиндрической трубы ($R/L = \epsilon \ll 1$), заполненной газом, расположен источник гармонических колебаний (например, плоский поршень), а другой конец либо закрыт, либо сообщается с окружающей средой. Пусть амплитуда результирующих колебаний и частота таковы, что $u_m/\omega L \ll 1$, причем Sh и Re_k находятся в области *III*. Оба эти условия могут быть удовлетворены одновременно, так как первое из них можно записать в виде $\epsilon \ll Sh/2$. Введем параметр $\Sigma = l_p/L = 2c_0^2/(\kappa + 1)\omega Lu_m$ — отношение длины образования разрыва к длине трубы (κ — показатель адиабаты, c_0 — скорость звука в невозмущенном газе). Тогда для решения задачи о колебаниях газа в трубе можно использовать ряды теории возмущений при $\pi\sqrt{2\Sigma}|\omega - \omega_0|L/c_0 \geq 4$ (ω_0 — ближайшая к ω резонансная частота) в случае закрытой трубы [7] и при $\Sigma \gg 1$, если труба открыта с одного конца [8]. Пренебрегая в уравнениях неразрывности, движения и адиабаты нелинейными членами, запишем

$$(3) \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0, \quad \bar{p} = \bar{\rho}, \quad \frac{R\omega}{c_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} = -\epsilon \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{1}{c_0 R} \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(v_{\text{эф}} y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right),$$

$$\frac{R\omega}{c_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (y \bar{v}) + \epsilon \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = 0.$$

Здесь введены безразмерные переменные: $\tau = \omega t$ — время; $yR = r$, $x = zL$ — радиальная и продольная координаты цилиндрической системы координат;

$u = \bar{u}c_0$, $v = \bar{v}c_0$ — продольная и радиальная компоненты скорости; $\rho = \rho_0(1 + \bar{p})$, $p = \rho_0 c_0^2(1 + \bar{p})$ — плотность и давление; индекс 0 относится к невозмущенным величинам. Система уравнений (3) получена после разложения уравнений Навье — Стокса, неразрывности и адиабаты, записанных в цилиндрических координатах, по степеням малости \bar{u} и ϵ . Коэффициент эффективной вязкости $\nu_{эф}$ представляет собой сумму $\nu_{эф} = \nu + \nu_t$ (ν_t — турбулентная вязкость, для определения которой будет использоваться гипотеза квазистационарности).

Интегрируя (3) по сечению трубы и используя граничные условия $\bar{v}(y=1) = 0$, $\partial \bar{u} / \partial y = 0$ при $y = 0$, получим

$$(4) \quad \frac{\bar{\kappa}\omega}{c_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^1 dy y \bar{u} = - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{1}{c_0 R} \left[\nu_{эф} y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \Big|_{y=1},$$

$$\frac{1}{2} \frac{R\omega}{c_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau} + \epsilon \frac{\partial}{\partial z} \int_0^1 dy y \bar{u} = 0.$$

Решение системы (4) ищем в виде $\bar{u} = f(y) \varphi(z) \exp(i\tau)$, $\bar{p} = \psi(z) \exp(i\tau)$. Подставляя его в (4) и предполагая, что ν_t зависит только от y , имеем

$$(5) \quad \bar{u}^{(1)} = if(y) C e^{\delta z} \sin(k'z + \alpha) \exp(i\tau),$$

$$\bar{p}^{(1)} = 2a \sqrt{1 + i\beta} C \cos(k'z + \alpha) \exp(i\tau).$$

Здесь C , δ и α — действительные и комплексная постоянные; $\beta = \gamma / a\omega R^2$; $k' = k \sqrt{1 + i\beta}$; $k = \omega L / c_0$; $a = \int_0^1 dy y f(y)$; $\gamma = [\nu_{эф} y df / dy] \Big|_{y=1}$.

Пусть источник колебаний расположен при $z = 0$, а координата другого конца трубы $z = 1$. Решения (5) должны удовлетворять граничным условиям

$$(6) \quad \bar{u}_s(z=0) = -iM_0 \exp(i\tau)$$

($M_0 = u_0 / c_0$ — число Маха для амплитуды колебаний скорости источника, индекс s означает усреднение по сечению трубы) и граничному условию

$$(7) \quad \bar{u}_s(z=1) = 0$$

для закрытой трубы или

$$(8) \quad \bar{p}_s(z=1) = 0$$

для трубы с открытым концом. Все исследование будем проводить для частот, существенно меньших резонансных, поэтому условие (8) вполне приемлемо. По поводу более сложного нелинейного граничного условия см. [9]. Подставляя (5) в (6) — (8) и полагая $\beta \ll 1$, для закрытой трубы получим

$$(9) \quad \alpha_0 = \text{Real } \alpha = \pi - k, \quad \alpha' = \text{Im } \alpha = -\frac{1}{2} k\beta, \quad \text{tg } \delta = -\frac{k\beta}{2} \text{ctg } k,$$

$$C = -\frac{M_0}{2a} \frac{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta}}{\sin k - \frac{k\beta}{2} \text{tg } \delta \cdot \cos k} \approx -\frac{M_0}{2a} \frac{1}{\sin k},$$

а для трубы, открытой с одного конца,

$$(10) \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{2} - k, \quad \alpha' = -\frac{1}{2} k\beta, \quad \text{tg } \delta = \frac{k\beta}{2} \text{tg } k,$$

$$C = -\frac{M_0}{2a} \frac{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta}}{\cos k + \frac{k\beta}{2} \text{tg } \delta \cdot \sin k} \approx -\frac{M_0}{2a} \frac{1}{\cos k}.$$

Из (9) и (10) следует, что первый резонанс в закрытой трубе наступает при $k_0 \approx \pi$, а в открытой трубе — при $k_0 \approx \pi/2$.

Определим профиль $f(y)$ в (5). Будем считать, что вблизи стенки трубы ($y = 1$) имеется вязкий подслой, в котором $\nu_{эф} = \nu$, а на расстоянии $1 - y^*$

находится область развитой турбулентности. Тогда можно считать, что в ядро турбулентного потока переносится то касательное напряжение τ_w , которое существует на стенке, т. е. в ядре потока

$$(11) \quad \tau_w = \tau_r$$

(τ_r — касательное напряжение в турбулентном ядре). Предположение (11) довольно грубое, однако в случае стационарных течений оно приводит к хорошим результатам [6]. Предположим, что в каждый момент времени τ_w и τ_r такие же, как и в стационарном потоке. В этом предположении суть гипотезы квазистационарности. Используя для τ_r формулу Прандтля [6], а для τ_w закон Блазиуса [6] и усредняя (11) по z и t , имеем

$$(12) \quad \langle \tau_w \rangle_t = \sigma^2 (R - r)^2 \rho \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right\rangle_{t,z}, \quad \tau_w = \frac{\lambda \rho u_{cp}^2}{8}, \quad \lambda = \frac{0,3164}{(2R u_{cp} / \nu)^{0,25}}$$

(u_{cp} — среднее по сечению и длине, $\sigma = 0,4$ — эмпирическая константа). Подставляя в (12) выражение (5) при $\beta \ll 1$ и требуя, чтобы $f_1(y=0) = 1$, получаем профиль $f_1(y)$ в турбулентном ядре потока:

$$(13) \quad f_1(y) = 1 + E \ln(1 - y), \quad E^2 = \frac{0,059}{Re_k^{0,25}} \left(\frac{2al}{k} \right)^{1,75} \frac{\Gamma(0,375)}{\sigma^2 h \sqrt{\pi}}$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера; $Re_k = 2RCc_0/\nu$; $h = 1 + \sin 2\alpha_0/2k$; $l = 2 \sin(k/2 + \alpha_0) \sin(k/2)$. С помощью (13) можно подсчитать a , если пренебречь толщиной вязкого подслоя: $a = (1 - 3E/2)/2$.

Профиль $f_2(y)$ в вязком подслое, где τ_w в стационарном случае постоянно, имеет вид

$$(14) \quad f_2(y) = \frac{1}{C} \frac{\langle \tau_w \rangle_t}{\mu c_0} (R - r) = D(1 - y), \quad D = \frac{0,0074}{\sqrt{\pi}} \Gamma(0,375) \left(\frac{2al}{k} \right)^{1,75} Re_k^{0,75}$$

Из (14) следует $\beta = -\beta_0^2 D/2a$, $\beta_0 = (2\nu/\omega)^{1/2}/R$ в (5).

Радиальную компоненту скорости v найдем из уравнения неразрывности. Налагая граничные условия $v(y=1) = 0$, $v(y=0) = 0$, находим

$$(15) \quad \bar{v}^{(1)} = -ig(y) \cos(k'z + \alpha) \exp(it),$$

где профили $g_1(y)$ вдали от стенки и $g_2(y)$ вблизи стенки даются выражениями (16)

$$g_1(y) = k'\epsilon C \left\{ y \left[a + \frac{1-E/2}{2} \exp(i\delta) \right] + \frac{E}{2} \left[\left(y - \frac{1}{y} \right) \ln(1-y) - 1 \right] \exp(i\delta) \right\},$$

$$g_2(y) = k'\epsilon C \left[a \left(y - \frac{1}{y} \right) + \frac{D}{2} \left(y - \frac{2}{3} y^2 - \frac{1}{3y} \right) \exp(i\delta) \right].$$

Турбулентную вязкость ν_t определяем следующим образом:

$$(17) \quad \nu_t = \sigma (R - r) \sqrt{\frac{1}{\rho} \langle \tau_w \rangle_t}, \quad \nu_{эф} = \nu [1 + w(1 - y)],$$

$$w = \frac{1}{2} \sigma^2 C Re_0 E \sqrt{h}, \quad Re_0 = Rc_0/\nu.$$

При выводе формул (17) использовались формула для турбулентной вязкости в стационарном потоке [6] и выражения (9), (10) для α_0 .

На рис. 2 дано сравнение полученного теоретического профиля (13), (14) с экспериментом [10]. Точки на рис. 2 соответствуют экспериментальным значениям величины $(u_{max} - u_{min})/u(y=0)$, где u_{max} и u_{min} — максимальное и минимальное значения скорости при данном y за период колебаний. Такой способ обработки экспериментальных результатов позволяет исключить постоянную составляющую скорости. Из рис. 2 видно, что теоретический профиль удовлетворительно согласуется с экспериментальным. Необходимо отметить, что выражения (13) и (14) получены в предположении о ква-

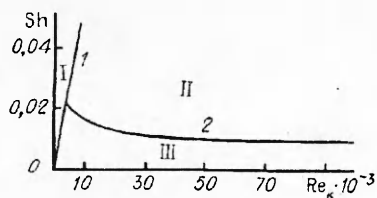


Рис. 1

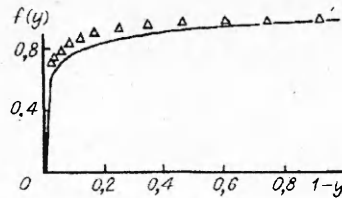


Рис. 2

зистационарности течения, т. е. при $Z < 1$, а в экспериментах [10] $Z \sim 3$. Однако результаты [5] позволяют заключить, что влияние нестационарности на профиль скорости становится заметным лишь при $Z > 4$. В формулах (5) фазовый сдвиг δ не зависит от y . Такой же результат следует из экспериментальных данных [10]. Таким образом, можно утверждать, что выражения для $\bar{u}^{(1)}$ и $f(y)$ в целом подтверждаются экспериментом [10].

Вторичные течения описываются уравнениями, полученными во втором порядке при разложении системы уравнений Навье — Стокса, неразрывности и адиабаты в ряд по степеням малости ϵ и представляют собой решения системы [11]

$$(18) \quad \frac{\partial \bar{p}^{(2)}}{\partial y} = 0, \quad \epsilon \frac{\partial \bar{p}^{(2)}}{\partial z} - \frac{1}{RC_0} \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(v_{эф} y \frac{\partial \bar{u}^{(2)}}{\partial y} \right) = -\epsilon k \left\langle \bar{p}^{(1)} \frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial \tau} \right\rangle -$$

$$-\epsilon \left\langle \bar{u}^{(1)} \frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial z} \right\rangle - \left\langle \bar{v}^{(1)} \frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial y} \right\rangle,$$

$$\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (y \bar{v}^{(2)}) + \epsilon \frac{\partial \bar{u}^{(2)}}{\partial z} = -\epsilon \left\langle \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p}^{(1)} \bar{u}^{(1)}) \right\rangle - \left\langle \bar{p}^{(1)} \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (y \bar{v}^{(1)}) \right\rangle,$$

где угловые скобки означают осреднение по времени.

Решения уравнений (18) должны удовлетворять следующим граничным условиям: на стенке трубы при $y = 1$

$$(19) \quad \bar{u}^{(2)}(y = 1) = 0, \quad \bar{v}^{(2)}(y = 1) = 0;$$

на оси трубы ($y = 0$) можно требовать лишь конечности $\partial \bar{u}^{(2)}/\partial y$ и $\bar{v}^{(2)}$ [6]. При $y = y^*$, где сшиваются профили (13) и (14), нужно положить

$$(20) \quad \bar{u}_1^{(2)}(y = y^*) = \bar{u}_2^{(2)}(y = y^*), \quad \bar{v}_1^{(2)}(y = y^*) = \bar{v}_2^{(2)}(y = y^*)$$

($\bar{u}_1^{(2)}$ и $\bar{u}_2^{(2)}$ означают решения вдали от стенки и вблизи стенки соответственно). Наконец, еще одно условие находится из того требования, чтобы расход жидкости во вторичном течении был равен нулю:

$$(21) \quad \int_0^{y^*} \bar{u}_1^{(2)} y dy + \int_{y^*}^1 \bar{u}_2^{(2)} y dy = 0.$$

При дальнейших вычислениях для упрощения выражений учтем, что $\delta \sim \beta$, $E \ll 1$, и пренебрежем членами $\sim \beta^2$, βE , $E \sin \delta$ и т. п. Кроме того, как окажется при числовом расчете, вклад членов, пропорциональных $\text{sh } k\beta (z - 1)$, $\text{ch } k\beta (z - 1)$, меньше вклада остальных слагаемых почти на два порядка, поэтому эти члены опускаем. По той же причине можно опустить слагаемые, пропорциональные $\beta/Re_0 \epsilon k$ ($Re_0 \epsilon k \gg 1$). Подставляя в (18) выражения (5), (13)—(17) и привлекая условия (19)—(21), получаем

$$(22) \quad \frac{\bar{u}_1^{(2)}}{Re_0 \epsilon k C^2} = -\frac{1}{2w} \left\{ F_1(y) C_1(z) + \frac{E}{4} \left[2(1 - a \cos \delta) F_2(y) - 3 \ln t - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{3}{w_1} F_3(y) \right] \sin 2(kz + \alpha_0) + C_2(z) \Big\}, \quad t = 1 + w(1 - y), \quad w_1 = (w + 1)/w,$$

$$\frac{\bar{u}_2^{(2)}}{Re_0 \epsilon k C^2} = \frac{C_1(z)}{4} y^2 + \frac{Dy}{\delta} [2a \cos \delta \cdot G_1(y) - DG_2(y)] \sin 2(kz + \alpha_0) +$$

$$+ C_2^*(z) \ln y + C_3^*(z), \quad G_1(y) = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{3}, \quad G_2(y) = -\frac{1}{3} + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{3} + \frac{y^3}{12},$$

$$\frac{\bar{v}_1^{(2)}}{\text{Re}_0(\epsilon k)^2 C^2} = \frac{1}{2\omega y} \left[\frac{J_1(y) C_1(z)}{k} + \frac{E}{2} \left[3J_4(y) + 2(1 - a \cos \delta) J_2(y) - \frac{3}{\omega_1} J_3(y) \right] \times \right. \\ \left. \times \cos 2(kz + \alpha_0) + y^2 \frac{C_2'(z)}{2k} \right] + \frac{C_3(z)}{y}, \quad \frac{\bar{v}_2^{(2)}}{\text{Re}_0(\epsilon k)^2 C^2} = -\frac{C_1(z) y^3}{16k} - \\ - \frac{Dy^2}{4} [2a \cos \delta I_1(y) - DI_2(y)] \cos 2(kz + \alpha_0) - \frac{C_2'(z)}{2k} y \left(\ln y - \frac{1}{2} \right) + \\ + \frac{C_3'(z)}{2k} y + \frac{C_4^*(z)}{y}, \\ I_1(y) = \frac{1}{3} + \frac{y}{8} - \frac{y^2}{15}, \quad I_2(y) = -\frac{1}{9} + \frac{y}{8} - \frac{y^2}{15} + \frac{y^3}{72}.$$

Функции $F_i(y)$, $J_i(y)$, $C_i(z)$, $C_i^*(z)$ даны в приложении.

Результат проведенных вычислений можно записать в виде

$$\frac{\bar{u}^{(2)}}{\text{Re}_0 \epsilon k C^2} = U(y) \sin 2(kz + \alpha_0), \quad \frac{\bar{v}^{(2)}}{\text{Re}_0(\epsilon k)^2 C^2} = V(y) \cos 2(kz + \alpha_0).$$

На рис. 3 даны графики функций $U(y)$ и $V(y)$ (кривые 1 и 2 соответственно). Расчет проведен для закрытой трубы с параметрами: $\text{Re}_\kappa = 70\,000$, $\text{Sh} = 0,01$, $\epsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}$, $M_0 = 0,05$, $k = \pi/4$ (резонансная частота $k_0 = \pi$). Как видно из рис. 3, вторичное течение в турбулентном осциллирующем потоке представляет собой кольцевой вихрь, занимающий всю трубу. В области $0 \leq y \leq y^*$ структура этого вихря напоминает структуру вихря Рэлея, образующегося в ламинарном колеблющемся потоке [1]. Вблизи стенки при $y^* \leq y \leq 1$ структура вихря напоминает структуру вихря Шлихтинга в ламинарном потоке [6]. В целом качественная картина течения похожа на таковую в случае ламинарного потока [11]. Однако если в ламинарном потоке скорость в пристенном вихре не превышает трети скорости в центре трубы, то в рассмотренном случае эти скорости почти совпадают. Такое выравнивание скоростей связано, по всей видимости, с возрастанием эффективной вязкости при удалении от стенок трубы.

Известно, что картина вторичных течений в канале в случае ламинарного осциллирующего потока может существенно измениться, если перейти от эйлеровых координат к лагранжевым [3], а именно: в лагранжевых координатах вихрь Шлихтинга исчезает. Формулы перехода имеют вид

$$(23) \quad \bar{u}_L^{(2)} = \bar{u}^{(2)} + \frac{1}{k} \frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial z} \int \bar{u}^{(1)} d\tau + \frac{1}{k\epsilon} \frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial y} \int \bar{v}^{(1)} d\tau, \\ \bar{v}_L^{(2)} = \bar{v}^{(2)} + \frac{1}{k} \frac{\partial \bar{v}^{(1)}}{\partial z} \int \bar{u}^{(1)} d\tau + \frac{1}{k\epsilon} \frac{\partial \bar{v}^{(1)}}{\partial y} \int \bar{v}^{(1)} d\tau.$$

Подставляя в (23) выражения (5) и (15), получим поправки $\Delta \bar{u}^{(2)}$ и $\Delta \bar{v}^{(2)}$ к (22). Оказывается, что вклад их пренебрежимо мал вдали от стенок трубы, поэтому выпишем выражения для них в пристенной области:

$$(24) \quad \frac{\Delta \bar{u}^{(2)}}{\text{Re}_0 \epsilon k C^2} = \frac{D}{8 \text{Re}_0 \epsilon k} \left[ad \left(\frac{1}{y} - y \right) - \beta D \left(\frac{1}{2} - 2y + \frac{1}{6y} + \frac{4}{3} y^2 \right) \right] \sin 2(kz + \alpha_0),$$

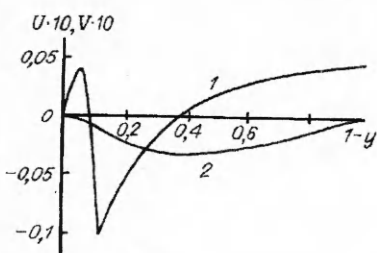


Рис. 3

$$\frac{\Delta \bar{v}^{(2)}}{\text{Re}_0(\epsilon k)^2 C^2} = \frac{D}{8 \text{Re}_0 \epsilon k} \left\{ (1-y) \left[ad \left(\frac{1}{y} - y \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \beta D \left(y - \frac{2}{3} y^2 - \frac{1}{3y} \right) \right] - \frac{2a}{3} \left(y^2 + \frac{2}{y} - 3 \right) \times \right. \\ \left. \times \sin \delta \right\} \cos 2(kz + \alpha_0),$$

$$d = 2 \sin \delta - \beta \cos \delta.$$

В анализируемом случае турбулентного течения из-за усложнения зависимости скорости вторичного течения от амплитуды колебаний могут реализоваться различные варианты. Так, для случая, изображенного на рис. 3, поправки (24) малы и не меняют структуры вторичного течения.

В заключение автор выражает благодарность Р. Г. Галиуллину и В. Б. Репину за внимание к работе и замечания.

Приложение. Функции и постоянные, встречающиеся в формулах (22):

$$F_1(y) = y + w_1 \ln(1 - y/w_1),$$

$$F_2(y) = (w_1 \ln t - 1 + y) \ln(1 - y) - y + w_1 \operatorname{Li}_2(1 - t),$$

$$F_3(y) = \ln(1 - y) \ln(t/y) + \operatorname{Li}_2(1 - t) - \operatorname{Li}_2(1 - y),$$

$\operatorname{Li}_2(x)$ — дилогарифм Эйлера, при $|x| < 1$ дилогарифм определяется рядом

$$\operatorname{Li}_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^2,$$

при $|x| > 1$ и $|\arg(-x)| < \pi$ аналитическое продолжение таково:

$$\operatorname{Li}_2(x) = \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{1}{2} \ln^2(1-x) - \ln(-x) \ln(1-x) - \frac{\pi^2}{6},$$

$$J_1(y) = \frac{1}{3} y^3 - \frac{w_1^3}{2} \left[\left(1 - \frac{y^2}{w_1^2}\right) \ln\left(1 - \frac{y}{w_1}\right) + \frac{y}{w_1} \left(i + \frac{y}{2w_1}\right) \right], \quad J_2(y) = -\frac{w_1}{4} (w_1^2 - y^2) \times$$

$$\times \ln^2 t + w_1 \left[(w_1^2 - y^2) \ln w + \frac{1}{4} \left(\frac{3w+2}{w} - 2 \frac{w-1}{w} y - y^2 \right) \right] \ln t + \frac{(1-y)^2}{6} (1+2y) \times$$

$$\times \ln(1-y) + \frac{1}{2} \left(w_1^2 \ln w + \frac{w_1}{2} \frac{3w-1}{w} + \frac{1}{3} \right) y - \left(\frac{29}{36} - \frac{w_1}{4} \ln w - \frac{w_1}{8} + \frac{\pi^2 w_1}{16} + \frac{4}{9} y \right) y^2,$$

$$J_3(y) = -\frac{w_1^2 - y^2}{4} \ln^2 t + \frac{1}{8} \left[(1-y) \left(\frac{5w+4}{w} + y \right) + 4(w_1^2 - y^2) \ln w \right] \ln t + S(y) -$$

$$-\frac{1}{2} \operatorname{Li}_2(1-y) - \frac{1}{2} y^2 \ln y \ln(1-y) - \frac{1-y^2}{4} \ln(1-y) + \frac{y}{4} (2+y) \ln y - \frac{3+2\pi^2}{24} y^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(w_1 \ln w - \frac{2w+1}{2w} \right) y, \quad J_4(y) = \frac{w_1^2 - y^2}{2} \ln t + \frac{y}{4} (2w_1 + y),$$

$$S(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-y)^{k+1}}{k^2} \frac{1+(k+1)y}{(k+1)(k+2)},$$

$C_1(z) = \partial \bar{p}^{(2)}/\partial z$, при вычислении $C_1(z)$ накладывается граничное условие $\partial \bar{p}^{(2)}/\partial z = 0$ при $z = 1$,

$$C_1(z) = \frac{4k}{1-y^{*2}} \left[-y^* \Phi_5(z) + C_3(z) - \frac{1}{k} \Phi_1'(z) + \Phi_4(z) \right] - 4\Phi_2'(z), \quad C_2(z) =$$

$$= \frac{4w}{1-y^{*2}} \left\{ -\mu_2 C_1(z) + 2 \ln y^* \cdot \Phi_1(z) + \mu_3 \Phi_3(z) - \left[\frac{1}{2} + y^{*c} \left(\ln y^* - \frac{1}{2} \right) \right] \Phi_3(z) \right\},$$

$$C_3(z) = -\frac{E}{4w} \left[3A_4 + 2A_2(1 - a \cos \delta) - \frac{3}{w_1} A_3 \right] \cos 2(kz + \alpha_0),$$

$$C_2^*(z) = \frac{2}{1-y^{*2}} [\mu_1 C_1(z) - 2\Phi_1(z) - \Phi_2(z) + y^{*2} \Phi_3(z)],$$

$$C_3^*(z) = -\frac{1}{4} C_1(z) - \Phi_2(z), \quad C_4^*(z) = \left(\frac{3}{8} - \frac{\mu_1}{1-y^{*2}} \right) \times$$

$$\times \frac{C_1'(z)}{2k} - \Phi_4(z) + \frac{1}{2k(1-y^{*2})} [2\Phi_1'(z) + (2-y^{*2}) \Phi_2'(z) - y^{*2} \Phi_3'(z)],$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{3w_1}{4} (\ln w + 1), \quad A_3 = \frac{1}{4} \left(w_1^2 \ln w + \frac{5w+2}{2w} \right) \ln(1+w) + S(0) - \frac{w^2}{12}, \quad A_4 = \\
&= \frac{w_1^2}{2} \ln(1+w), \quad \mu_1 = -\frac{1-y^{*4}}{8} + \frac{1}{w} \left[\frac{y^{*2}}{2} F_1(y^*) - J_1(y^*) \right], \quad \mu_2 = -\frac{1-y^{*4}}{8} \ln y^* - \\
&\quad - \frac{(1-y^{*2})^2}{8} - \frac{J_1(y^*)}{w} \ln y^* + \frac{F_1(y^*)}{4w} \left[1 + 2y^{*2} \left(\ln y^* - \frac{1}{2} \right) \right], \quad \mu_3 = \frac{1-y^{*2} + 2 \ln y^*}{2}, \\
\Phi_1(z) &= \frac{E}{8w} \left\{ 2(1-a \cos \delta) [J_2(y^*) - A_2] - 3[J_4(y^*) - A_4] - \frac{3}{w_1} [J_3(y^*) - A_3] \right\} \times \\
&\quad \times \sin 2(kz + \alpha_0) - \frac{D}{8} \left\{ 2a \cos \delta \left[\frac{47}{120} - y^{*2} I_1(y^*) \right] + \right. \\
&\quad \left. + D \left[\frac{7}{180} + y^{*2} I_2(y^*) \right] \right\} \sin 2(kz + \alpha_0), \\
\Phi_2(z) &= \frac{D}{48} \left(14a \cos \delta + \frac{D}{2} \right) \sin 2(kz + \alpha_0), \\
\Phi_3(z) &= \frac{E}{8w} \left[2(1-a \cos \delta) F_2(y^*) - 3 \ln y^* - \frac{3}{w_1} F_3(y^*) \right] \sin 2(kz + \alpha_0) + \\
&\quad + \frac{D}{8} y^* [2a \cos \delta \cdot G_1(y^*) - DG_2(y^*)] \sin 2(kz + \alpha_0), \\
\Phi_4(z) &= -\frac{D}{240} \left(47a \cos \delta + \frac{7D}{3} \right) \cos 2(kz + \alpha_0), \\
\Phi_5(z) &= -\frac{E}{4wy^*} \left[3J_4(y^*) + 2(1-a \cos \delta) J_2(y^*) - \frac{3}{w_1} J_3(y^*) \right] \cos 2(kz + \alpha_0) - \\
&\quad - \frac{Dy^{*2}}{4} [2a \cos \delta \cdot I_1(y^*) - DI_2(y^*)] \cos 2(kz + \alpha_0).
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Рэлей Дж. В. Теория звука. — М.: Гостехиздат, 1955. — Т. 2.
2. Накоряков В. Е., Бурдуков А. П., Болдарев А. М., Терлеев П. И. Тепло- и массообмен тел в звуковом поле. — Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1970.
3. Галиуллин Р. Г., Репин В. Б., Халитов Н. Х. Течение вязкой жидкости и теплообмен тел в звуковом поле. — Казань: КГУ, 1978.
4. Оми М., Игути М. Нестационарное течение в трубопроводах // Нихон кикай гаккай ромбунсю. Сер. В. — 1982. — Т. 48, № 430.
5. Каган Л. С., Ройзман Д. Х., Шербаум В. М. Турбулентное периодическое течение жидкости в круглых трубах // Гидравлика и гидротехника. — 1982. — Вып. 35.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974.
7. Гусев В. Э. Установление вынужденных колебаний в акустических резонаторах // Акуст. журн. — 1984. — Т. 30, № 2.
8. Островский Л. А. О разрывных колебаниях в акустическом резонаторе // Акуст. журн. — 1974. — Т. 20, № 1.
9. Галиуллин Р. Г., Ревва И. П., Пермяков Е. И. Колебания газа большой амплитуды в трубе с открытым концом // Акуст. журн. — 1987. — Т. 33, № 3.
10. Булатова Т. Г., Григорьев М. М., Кузьмин В. В. Осциллирующее турбулентное течение в цилиндрическом канале // Инж.-физ. журн. — 1986. — Т. 50, № 6.
11. Галиуллин Р. Г., Ревва И. П., Халимов Г. Г. Теория термических автоколебаний. — Казань: КГУ, 1982.

г. Казань

Поступила 19/II 1992 г.,
в окончательном варианте — 19/VIII 1992 г.