

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СОЛЕПЕРЕНОСА ВЗАИМОСВЯЗАННЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ ПОДЗЕМНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОД

А. А. Кашеваров

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева, 630090 Новосибирск

Рассмотрена математическая модель переноса солей взаимосвязанными потоками поверхностных, почвенных и грунтовых вод для крупномасштабных объектов со сложными гидрогеологическими условиями. Вычислительные алгоритмы и программная реализация модели основаны на декомпозиции по физическим процессам и областям моделирования с использованием конечно-разностных схем. Приведены примеры расчетов, иллюстрирующие характерные особенности задачи массопереноса взаимодействующими течениями.

**Введение.** При математическом моделировании региональных процессов водообмена и качества воды необходимо учитывать взаимодействие и массообмен между различными составляющими водного стока. Процессы течения воды, входящие в гидрологический цикл, имеют различную физическую природу, и каждый из них имеет свою область локализации. Можно выделить факторы, вносящие основной вклад в формирование водного стока [1]: течение в водотоках и водоемах, напорная и безнапорная фильтрация грунтовых вод во взаимодействующих водоносных горизонтах, миграция влаги в зоне неполного насыщения (зоне аэрации), склоновый сток дождевых осадков по поверхности земли, формирование и таяние снежного покрова.

Математические модели, описывающие отдельные процессы гидрологического цикла, хорошо разработаны и давно применяются при решении практических задач [2, 3]. С середины 70-х годов начали активно разрабатываться модели взаимосвязи фильтрационных и русловых течений [4–6]. В начале 80-х годов появились работы по математическому моделированию процессов водообмена на суше с учетом всех факторов [1, 7–9]. На основе таких моделей можно прогнозировать водный режим для больших речных бассейнов, оросительных и дренажных систем и т. п. Однако при решении экологических проблем возникает большая потребность в оценке качества подземных и поверхностных вод.

В предлагаемой работе рассмотрена математическая модель переноса солей взаимосвязанными потоками поверхностных (водотоками и водоемами), почвенных (зоной аэрации) и грунтовых вод для крупномасштабных объектов со сложными гидрогеологическими условиями.

Современное состояние вычислительной техники не позволяет решать данную проблему в целом на основе единой трехмерной гидродинамической модели. Поэтому предлагается использовать модульный подход построения моделей массопереноса, основанный на сопряжении гидравлических подмоделей различного уровня сложности, отвечающих различным физическим процессам [1]. Взаимодействие между составляющими водного стока моделируется функциями источников, входящими в дифференциальные уравнения, внутренними граничными условиями и параметрами модели, определяемыми в процессе решения задачи. В общей модели массопереноса можно выделить подмодели водообмена и

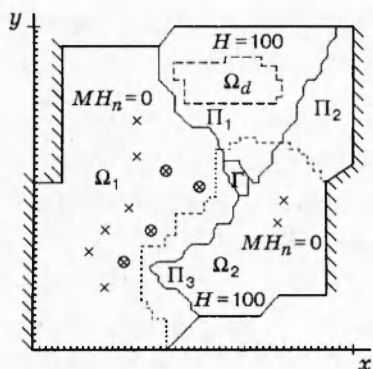


Рис. 1. Область моделирования с подобластями  $\Omega_i$ :  $\Pi_i$  — водотоки;  $\times$ ,  $\otimes$  — скважины, откачивающие воду из верхнего и нижнего водоносных горизонтов

качества воды, при этом предполагается, что солеперенос не оказывает влияние на процессы течения водной фазы.

**Моделирование взаимосвязанных течений подземных и поверхностных вод.**

Рассматривается ограниченная многосвязная область моделирования  $\Omega \subset R^2$ . Внутри  $\Omega$  проведено  $l$  разрезов  $\Pi_i$  ( $\Pi = \sum_{i=1}^l \Pi_i$ ), соответствующих водотокам, замкнутые контуры  $\Gamma_j = \partial\Omega_j$  совпадают с фиксированными границами водоемов. При впадении  $i$ -го водотока в  $j$ -й водоем внутренние границы  $\Pi_i$  и  $\Gamma_j$  имеют точку пересечения. На рис. 1 приведен пример области с тремя водотоками и одним водоемом.

Течение грунтовых вод в напорных и безнапорных водоносных пластах моделируется на основе уравнения плановой фильтрации [2]

$$\mu H_t = \text{div}(M \nabla H) + r(H_1 - H) + f, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

где  $H(x, y, t)$  — уровень (напор) грунтовых вод;  $\mu, M$  — коэффициенты удельной (упругой) водоотдачи и водопроводимости;  $f(x, y, t)$  — функция источников, учитывающая работу скважин и инфильтрационное питание;  $r(H_1 - H)$  — переток в соседний водоносный горизонт с напором  $H_1$ . Для безнапорного водоносного горизонта выполняется  $M = k_f(H - H_b)$ , где  $k_f$  — коэффициент фильтрации;  $H_b(x, y)$  — отметки водоупора.

На внешней границе области моделирования ( $G = \partial\Omega$ ) задаются граничные условия первого и второго рода

$$MH_n|_{G_1} = \Phi_1, \quad H|_{G_2} = \Phi_2, \quad G = \partial\Omega = G_1 \cup G_2. \quad (2)$$

Течение в речной сети  $\Pi_i$  описывается системой одномерных уравнений диффузионных волн, являющихся приближением уравнений Сен-Венана

$$\omega_t = (\Psi|z_s|^{1/2} \text{sgn}(z_s))_s - [MH_n]_{\Pi_i} + f_1, \quad (x, y) \in \Pi_i; \quad (3)$$

$$z|_N = \Phi_N, \quad \Psi|z_s|^{1/2} \text{sgn}(z_s)|_P = \Phi_P, \quad z|_Q = u, \quad (4)$$

где  $z(s, t)$  — уровень воды в водотоке;  $\omega(z, s)$  — площадь поперечного сечения ( $B = \omega_z$  — ширина);  $s$  — расстояние по водотоку;  $\Psi(z, s) = \eta^{-1} \omega R^{2/3}$  — модуль расхода;  $\eta$  — коэффициент шероховатости ( $\eta^{-1} = \gamma$ );  $R$  — гидравлический радиус потока;  $f_1$  — функция источников;  $[MH_n]_{\Pi} = (MH_n|_{\Pi^+} + MH_n|_{\Pi^-})$  — суммарный фильтрационный приток грунтовых вод от правого  $\Pi^+$  и левого  $\Pi^-$  берегов водотока;  $H_n = \partial H / \partial n$  — внешняя нормальная производная. В точках  $N, P, Q$  (в начале и конце водотоков) заданы соответственно уровень, расход или совпадение уровней воды в водотоке и водоеме в случае впадения его в водоем. В точках слияния нескольких водотоков их уровни совпадают и приток равен оттоку.

На внутренних границах  $\Pi_i$ , соответствующих водотокам, задается условие сопряжения поверхностных вод и уровней грунтовых вод в первом (верхнем) водоносном горизонте для правого и левого берегов

$$MH_n|_{\Pi\pm} = \alpha(z - H)|_{\Pi\pm} \pm \beta(H|_{\Pi-} - H|_{\Pi+}). \quad (5)$$

Для водотоков небольшой ширины уровни грунтовых вод на левом и правом берегах можно считать совпадающими, и тогда условие (5) преобразуется к виду  $q_f \equiv [MH_n]_{\Pi} = 2\alpha(z - H)|_{\Pi}$ ,  $H|_{\Pi+} = H|_{\Pi-}$ .

Изменение уровней воды  $u(t)$  в водоемах с границей  $\Gamma = \partial\Omega_{\Gamma}$  определяется балансовыми соотношениями. Возможны две ситуации при моделировании взаимодействия водоема с верхним водоносным горизонтом. В первом случае внутри области  $\Omega_{\Gamma}$ , соответствующей внутренней части водоема, фильтрационная задача не решается и граница водоема является внутренней границей области фильтрации. Во втором случае водоем является областью инфильтрационного питания  $f$  для фильтрационного потока, рассчитываемого внутри  $\Omega_{\Gamma}$ . Для каждого типа водоемов задаются свое балансовое соотношение, определяющее уровень воды в них, и условие сопряжения для фильтрационной задачи

$$\lambda u_t = - \oint_{\Gamma} MH_n ds + q_r + f_2, \quad MH_n|_{\Gamma} = \alpha(u - H)|_{\Gamma}, \quad (x, y) \in \Gamma; \quad (6)$$

$$\lambda u_t = - \int_{\Omega_{\Gamma}} \alpha(u - H) dx dy + q_r + f_2, \quad f = \alpha(u - H), \quad (x, y) \in \Omega_{\Gamma}. \quad (6')$$

Здесь  $\lambda = \text{mes } \Omega_{\Gamma}$  — площадь водоема;  $q_r$  — поступление воды в водоем из впадающих в него водотоков;  $f_2$  — функция источников, учитывающая испарение и осадки;  $f$  — функция источников в (1).

Нижележащие водоносные горизонты гидравлически не связаны с поверхностными водотоками, и для них на внутренних границах  $\Pi$  задается непрерывность потока и напора.

Вертикальная миграция почвенной влаги в зоне неполного насыщения рассчитывается только на участке детализации  $\Omega_d \subset \Omega$  и описывается одномерным уравнением Ричардса [10]

$$\theta_t = (K(\psi_{\eta} + 1))_{\eta} + f_3, \quad H < \eta < H_p, \quad (x, y) \in \Omega_d, \quad (7)$$

где  $\theta(\psi)$  — объемная влажность;  $\psi$  — давление почвенной влаги;  $K(\eta, \psi)$  — коэффициент влагопроводности;  $\eta$  — вертикальная координата, направленная вверх. Предполагается однозначная зависимость  $\theta(\psi)$ ,  $K(\psi)$ . Например, можно использовать эмпирические формулы  $\theta = \theta_s / (1 + (-\psi/w)^{\sigma})$ ,  $K = k_s(\theta - \theta_r)^{\delta} / (\theta_s - \theta_r)^{\delta}$  при  $\psi < 0$ , и  $\theta = \theta_s = m$ ,  $K = k_s = k_f$  при  $\psi \geq 0$ .

Поглощение влаги корневой системой растений учитывается функцией источников  $f_3 = -E(t)(\theta^* - \theta_0) / (z_k(\theta_k - \theta_0))$ ,  $\eta \in (H_p - z_k, H_p)$ :  $f_3 = 0$ ,  $\eta < H_p - z_k$ ;  $\theta^* = \theta$ ,  $\theta_0 < \theta < \theta_k$ ;  $\theta^* = \theta_k$ ,  $\theta \geq \theta_k$ ;  $\theta^* = \theta_0$ ,  $\theta \leq \theta_0$ .

В этом случае на участке детализации вместо уравнения (1) используется

$$\text{div}(M\nabla H) = -K(\psi_{\eta} + 1)|_{\eta=H}, \quad (x, y) \in \Omega_d.$$

На поверхности земли  $\eta = H_p$  и свободной поверхности грунтовых вод  $\eta = H$  задаются граничные условия

$$K(\psi_{\eta} + 1)|_{\eta=H_p} = R_0(x, y, t), \quad \psi|_{\eta=H} = 0. \quad (8)$$

Для замыкания водной задачи необходимо задать начальные данные

$$H|_{t=0} = H_0, \quad z|_{t=0} = z_0, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad \psi|_{t=0} = \psi_0. \quad (9)$$

**Моделирование переноса загрязняющих примесей.** Модели солепереноса подземными и поверхностными водами основаны на уравнениях конвективной диффузии и учитывают обмен солями между составляющими водного стока. При моделировании солепереноса в безнапорных грунтовых водах необходимо учитывать накопление солей в зоне неполного насыщения.

Солеперенос фильтрационным потоком в напорном водоносном горизонте описывается двумерным уравнением [11]

$$(\hat{m}dC)_t = \text{div}(D\nabla C - \mathbf{v}C) - \Phi(C, N) + fC_f^*, \tag{10}$$

$$\hat{m} = m + \mu \frac{H - H_r}{d}, \quad d = (H_p - H_b), \quad \mathbf{v} = -M\nabla H$$

с граничными условиями

$$(D\nabla C - \mathbf{v}C)\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = -\mathbf{v}\mathbf{n}C_g^*|_{\partial\Omega} \quad Q_f \equiv [(D\nabla C - \mathbf{v}C)\mathbf{n}]_{\Pi} = -[\mathbf{v}\mathbf{n}C^*]_{\Pi}. \tag{11}$$

Для водотоков малой ширины выполняется условие  $Q_f = q_f C^*|_{\Pi}$ .

Для неконсервативной примеси процесс отложения солей на скелете грунта определяется обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(dN)_t = \Phi = \gamma(C, N)(C - C_*). \tag{12}$$

Здесь  $C, N$  — концентрации солей в растворе и твердой фазе;  $H_p$  и  $H_b$  — отметки кровли и подошвы водоносного горизонта;  $C_* = \text{const}$ ;  $D = D_0 + \lambda|\mathbf{v}|$  — коэффициент диффузии.

Значение  $C^*$  определяется направлением фильтрационного потока:

$$C_g^*|_{\partial\Omega} = \begin{cases} C, & q < 0, \\ C_g, & q \geq 0; \end{cases} \quad C^*|_{\Pi} = \begin{cases} C, & q_f < 0, \\ C_1, & q_f \geq 0, \end{cases} \quad C_f^* = \begin{cases} C, & f < 0, \\ C_f, & f \geq 0, \end{cases}$$

где  $C_g, C_f$  — заданные функции;  $q = -\mathbf{v}\mathbf{n} = -v_n$ .

Уравнения вида (10), (12) записываются для каждого водоносного горизонта, и в каждом из них определяется свое значение концентрации. Для безнапорного течения грунтовых вод мощность водоносного горизонта определяется соотношением  $d = (H - H_b)$ . В ряде случаев концентрация в нижележащих водоносных горизонтах изменяется слабо и ее можно считать постоянной.

Для моделирования переноса примесей русловым стоком используется система одномерных уравнений [12]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega C_1) = \frac{\partial}{\partial s} \left( D_1 \frac{\partial C_1}{\partial s} - v_1 C_1 \right) - q_f C^* + f_1 C_1^*, \quad (x, y) \in \Pi_i, \quad v_1 = -\Psi|z_s|^{1/2} \text{sgn}(z_s), \tag{13}$$

где  $C_1$  — концентрация солей в водотоке;  $D_1 = \lambda_1|v_1|R$ . В концах водотоков задаются граничные условия вида

$$\left( D_1 \frac{\partial C_1}{\partial s} - v_1 C_1 \right) \Big|_{NUP} = -v_1 C_1^* \Big|_{NUP}. \tag{14}$$

Концентрация солей осредняется по толщине  $d$  водоносного горизонта и поперечному сечению водотоков  $\omega$ , а для водоемов она определяется балансовыми соотношениями:

$$(\lambda(u - u_d)C_2)_t = \oint_{\Gamma} v_n C_2^* ds + Q_r + f_2 C_2^*, \quad Q_r = q_r C_2^* \quad \text{для (6)}, \tag{15}$$

$$(\lambda(u - u_d)C_2)_t = - \int_{\Omega_{\Gamma}} \alpha(u - H)C_2^* ds + Q_r + f_2 C_2^* \quad \text{для (6')}.$$

Здесь значения  $C_1^*$ ,  $C_2^*$  также зависят от направления потока в соответствующих точках области моделирования;  $u_d$  — отметка дна водоема.

На участке детализации  $\Omega_d$  концентрация консервативной примеси  $C_3$  в зоне неполного насыщения определяется из дифференциального уравнения

$$\frac{\partial(\theta C_3)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( D_3 \frac{\partial C_3}{\partial \eta} - v_3 C_3 \right), \quad H < \eta < H_p, \quad (x, y) \in \Omega_d, \quad v_3 = -K(\psi_\eta + 1). \quad (16)$$

Рассматривая баланс солей в «вертикальной колонке» от водоупора до поверхности земли, получаем уравнение солепереноса фильтрационным потоком в подобласти  $\Omega_d$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_H^{H_p} (\theta C_3) d\eta + m(H - H_b)C \right) = \operatorname{div}(D\nabla C - \mathbf{v}C) + fC_f^* + R_0 C_3^*.$$

Продифференцировав первое слагаемое по времени и учитывая (16), имеем

$$m((H - H_b)C)_t = \operatorname{div}(D\nabla C - \mathbf{v}C) + fC_f^* + (-v_3 C_3^* + mH_t C_3) \Big|_{\eta=H}. \quad (10')$$

Уравнение (10') в этом случае используется вместо (10).

Для уравнения (16) задаются граничные условия на поверхности земли и свободной поверхности грунтовых вод:

$$\left( D_3 \frac{\partial C_3}{\partial \eta} - v_3 C_3 \right) \Big|_{\eta=H_p} = R_0 C_3^*, \quad \left( D_3 \frac{\partial C_3}{\partial \eta} - v_3 C_3 \right) \Big|_{\eta=H} = -v_3 C_3^* \Big|_{\eta=H}, \quad (17)$$

где, как и ранее, параметр  $C_3^*$  зависит от направления течения.

Для солевой задачи необходимо задать начальные данные:

$$C = C_0, \quad N = N_0, \quad C_1 = C_1^0, \quad C_2 = C_2^0, \quad C_3 = C_3^0, \quad t = 0. \quad (18)$$

**Вычислительный алгоритм.** Численная реализация модели основана на декомпозиции по физическим процессам и областям моделирования [1], что позволяет эффективно решать задачи больших пространственно-временных масштабов. Процесс солепереноса не влияет на решение водной задачи, поэтому задача качества подземных и поверхностных вод (10)–(18) отделяется и решается в последнюю очередь после определения поля скоростей для всех составляющих водного потока из решения задачи водообмена (1)–(9).

Задача взаимосвязи имеет следующие особенности:

- вид граничных условий для задачи солепереноса зависит от направления вектора скорости водного потока, которое меняется со временем;
- уравнения руслового стока сильно нелинейные, вырождающиеся при совпадении уровня в водотоке с отметками дна и при появлении участков с горизонтальным уровнем;
- течения подземных и поверхностных вод моделируются в областях различной размерности.

Процессы, учитываемые в модели, имеют различные характерные скорости, поэтому для каждого из них требуется разная степень детализации расчетов. Например, численный алгоритм должен позволять рассчитывать прохождение кратковременных импульсов загрязнения по водотокам и учитывать их влияние на солевой режим грунтовых вод. Для этого использовались различные шаги по времени для задач фильтрации и руслового стока.

Для решения фильтрационной задачи (1), (2) использовались неявные конечно-разностные схемы [1, 13], алгоритм расчета которых основан на итерационном методе переменных направлений. На  $k$ -м временном слое для аппроксимации фильтрационной составляющей руслового стока использовалось представление

$$q_f^k \equiv [M H_n^k]_{\Pi} = \alpha(\hat{z}^k - 0,5(H^k + H^{k-1})) \Big|_{\Pi}, \quad \hat{z}^k = \tau_f^{-1} \int_{t=t_{k-1}}^{t_k} z dt,$$

где  $\tau_f = (t_k - t_{k-1})$  — шаг по времени в фильтрационной задаче.

Для решения задачи руслового стока (3), (4) использовалась модификация конечно-разностной схемы, предложенной в [14]:

$$B \frac{z_i^m - z_i^{m-\delta}}{\tau_p} = \frac{Q_{i,i-1}^m + Q_{i,i+1}^m}{\Delta s} + f_i^m + q_f^m, \quad \delta = \frac{1}{K},$$

$$Q_{i,j}^m = Q_{i,j}^{m-\delta} + \frac{\partial Q_{i,j}}{\partial z_i} \Big|_{z_i^{m-\delta}} (z_i^m - z_i^{m-\delta}) + \frac{\partial Q_{i,j}}{\partial z_j} \Big|_{z_j^{m-\delta}} (z_j^m - z_j^{m-\delta}),$$

$$\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial z_k} = 0,5 \left( \frac{\partial \psi_k}{\partial z_k} \frac{|z_j - z_i|^{1/2}}{(\Delta s)^{1/2}} \operatorname{sgn}(z_j - z_i) + \frac{\delta_k (\psi_i + \psi_j)}{2(|z_j - z_i|^{1/2} + \varepsilon)} \right), \quad k = i, j.$$

Здесь  $\tau_p$  — шаг по времени для задачи руслового стока, который меньше шага  $\tau_f$  для фильтрационной задачи  $\tau_f/\tau_p = K \geq l \geq 1$ ;  $m = n + l/K$ ;  $q_f^m = 2\alpha(z^m - \hat{H})$  — фильтрационный приток;  $\delta_j = 1$ ,  $\delta_i = -1$ ;  $\hat{H} = (l/K)H^{n+1} + (1 - l/K)H^n$ ;  $\Delta s$  — шаг по пространственной переменной, отсчитываемой по руслу водотока. Введение регуляризирующего параметра  $\varepsilon > 0$  позволяет рассчитывать течение в водотоках при наличии отдельных точек с горизонтальным уровнем воды.

Для решения солевой задачи в грунтовых водах также использовались неявные консервативные конечно-разностные схемы. Для каждого узла сеточной области записывался локальный баланс солей, отнесенный к соответствующему элементарному прямоугольнику. Для аппроксимации конвективной составляющей применялась противопотоковая схема, а при определении вклада обменных процессов в солевой баланс учитывалось направление течения водной фазы. Скорость поступления солей  $Q_{ij}$  из  $i$ -й в  $j$ -ю составляющую водного стока определяется соотношением  $Q_{ij} = q_{ij}C_{ij}^*$ ,  $C_{ij}^* = \{C_i, q_{ij} > 0; C_j, q_{ij} \leq 0\}$ , где  $q_{ij}$  — скорость перетока воды из  $i$ -й в  $j$ -ю составляющую.

**Примеры расчетов.** Приведем численные расчеты двух задач переноса консервативной загрязняющей примеси взаимодействующими фильтрационными и русловыми потоками. Область фильтрации ( $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ ) для обеих задач (рис. 1) содержится в прямоугольнике  $\{0 < x < 12000 \text{ м}, 0 < y < 17000 \text{ м}\}$ . Речная сеть состоит из трех водотоков и водоема, гидравлически связанных с верхним водоносным горизонтом. Участок детализации  $\Omega_d$  учитывается только во второй задаче.

В первой задаче фильтрация грунтовых вод происходит в двух гидравлически связанных напорных водоносных горизонтах. Фильтрационные параметры в областях  $\Omega_1, \Omega_2$  задавались:

— для верхнего водоносного горизонта  $M_1 = 600 \text{ м}^2/\text{сут}$ ,  $m_1 = 0,22$ ,  $\mu_1 = 0,001$ ;  $M_2 = 800 \text{ м}^2/\text{сут}$ ,  $m_2 = 0,17$ ,  $\mu_2 = 0,001$ ;  $a_1 = d_2 = 30 \text{ м}$ ;

— для нижнего  $M_1 = 650 \text{ м}^2/\text{сут}$ ,  $\mu_1 = 0,05$ ;  $M_2 = 400 \text{ м}^2/\text{сут}$ ,  $\mu_2 = 0,04$ .

В формуле перетока между водоносными горизонтами коэффициент  $r$  равен  $0,0001 \text{ м}/\text{сут}$ .

Параметры, определяющие русла водотоков, следующие:  $B_1 = 3 \text{ м}$ ,  $\alpha_1 = 2,2 \text{ м}/\text{сут}$ ,  $\gamma_1 = 1,5 \cdot 10^6$ ;  $B_2 = 2 \text{ м}$ ,  $\alpha_1 = 2,0 \text{ м}/\text{сут}$ ,  $\gamma_2 = 1,6 \cdot 10^6$ ;  $B_3 = 4 \text{ м}$ ,  $\alpha_1 = 2,6 \text{ м}/\text{сут}$ ,  $\gamma_3 = 1,8 \cdot 10^6$ .

Параметры водоема:  $\lambda = 9,0 \cdot 10^5 \text{ м}^2$ ,  $\alpha = 0,15 \text{ м}/\text{сут}$ , отметки дна  $u_d = 95 \text{ м}$ . Уровень воды определялся из балансового соотношения (6'), где  $q_r$  учитывает приток воды в водоем из двух водотоков  $\Pi_1, \Pi_2$  и отток по третьему  $\Pi_3$ .

Граничные условия водной и солевой задач на границе области фильтрации  $G$  постоянны во времени, а условия на входе ( $s = 0$ ) водотоков  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  меняются с периодом 365 сут по следующему закону:  $z = 101 + \delta_i(100 - t)$ ,  $t \leq 100 \text{ сут}$ ;  $z = z_i - \delta_i(200 - t)$ ,  $100 < t \leq 200 \text{ сут}$ ;  $z = 101$ ,  $200 < t < 365 \text{ сут}$ ,  $s = 0$ ;  $\delta_1 = 0,03 \text{ м}/\text{сут}$ ,  $z_1 = 104 \text{ м}$ ;  $\delta_2 = 0,025 \text{ м}/\text{сут}$ ,  $z_2 = 103,5 \text{ м}$ .

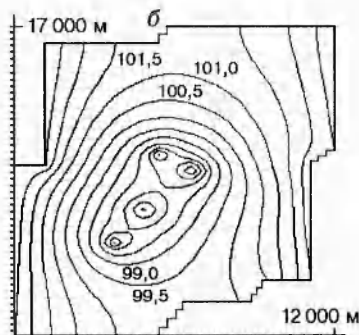
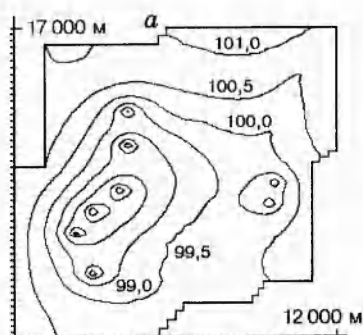


Рис. 2

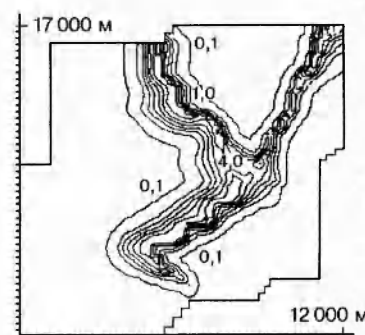


Рис. 3

Рис. 2. Гидроизогипсы в верхнем (а) и нижнем (б) водоносных горизонтах

Рис. 3. Изолинии концентраций солей в верхнем водоносном горизонте

В начале моделируемого периода  $0 \leq t < 200$  сут в водотоки  $\Pi_1, \Pi_2$  поступал раствор с концентрацией 10 мг/л, остальное время  $200 \leq t < 365$  сут концентрация была нулевая. На выходе третьего водотока задавался постоянный уровень  $z = 99,5$  м.

Начальное распределение грунтовых и русловых вод соответствует установившемуся периодическому режиму (в начале периода) в предположении, что скважины не работают. Начальное значение концентрации во всей области равно нулю. Во втором водоносном горизонте предполагалось, что на протяжении всего времени расчета концентрация нулевая. Параметры, определяющие коэффициент диффузии солей в грунтовых водах и водотоках,  $D_0 = 10$ ,  $\lambda = 2,5$ ,  $\lambda_1 = 0$ .

Дебит скважин  $Q_C$ , откачивающих воду из нижнего (второго) водоносного горизонта, равен  $3\,000 \text{ м}^3/\text{сут}$ , а из верхнего  $2\,000 \text{ м}^3/\text{сут}$ .

Задача решалась на разностной сетке  $51 \times 47$  узлов, шаги по пространственным переменным изменялись в пределах:  $\Delta x = 200\text{--}300$  м,  $\Delta y = 300\text{--}500$  м. Шаг по времени в фильтрационной задаче  $\tau_f = 10$  сут, а для речной сети  $\tau_r = \tau_f/100$ .

На рис. 2, 3 приведены результаты расчета фильтрационного течения и солепереноса в грунтовых водах. Через 10 расчетных лет режим грунтовых вод практически выходит на периодический, в них вблизи водотоков формируется полоса солевого загрязнения, медленно расширяющаяся со временем. Гидроизогипсы напоров в верхнем и нижнем водоносных горизонтах представлены на рис. 2 ( $T = 7\,300$  сут). На рис. 3 приведены изолинии концентраций солей в верхнем водоносном горизонте для расчетного времени  $T = 10\,950$  сут.

В грунтовые воды соли поступают только за счет фильтрации раствора из водотоков и водоема. В дальнейшем загрязнение медленно переносится фильтрационным течением внутри области в направлении откачных скважин. При прекращении поступления солей в водотоки  $\Pi_1, \Pi_2$  концентрация в них за несколько суток снижается до нуля. Несмотря на это, в течение всего года концентрация в водоеме и в третьем водотоке отлична от нулевой и в начале периода поднимается почти до 10 мг/л, а после прекращения поступления солей снижается. Минимальная концентрация солей в водоеме достигается в конце периода. Для времен 3 650, 7 300 и 10 950 сут получены значения концентрации раствора в водоеме 0,373; 0,409 и 0,426 мг/л соответственно. Накопление солей обусловлено аккумуляирующими свойствами водоема и зависит от скорости обновления в нем воды.

Во второй задаче фильтрация грунтовых вод происходит в одном безнапорном водоносном горизонте с параметрами  $m_1 = 0,2$ ,  $k_f^1 = 8 \text{ м/сут}$ ;  $m_2 = 0,15$ ,  $k_f^2 = 10 \text{ м/сут}$ ,

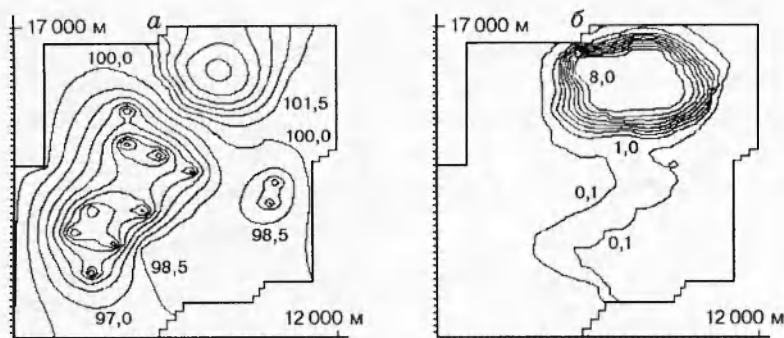


Рис. 4. Гидроизогипсы (а) и изолинии концентраций солей (б) в грунтовых водах

где  $m_i$ ,  $k_f^i$  — пористость и коэффициент фильтрации в области  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2$ ). Водоупор и поверхность земли горизонтальные ( $H_b = 75$  м,  $H_p = 110$  м). На участке детализации  $\Omega_d$  рассчитывается миграция влаги в зоне неполного насыщения (см. рис. 1) с использованием уравнения (7). Режим течения воды соответствует стационарному при постоянных граничных условиях для фильтрационного и руслового течений и расходах скважин, откачивающих с дебитом  $Q_C = 2000$  м<sup>3</sup>/сут. На входе водотоков  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  задавался постоянный уровень  $z|_{s=0} = 101$  м, остальные параметры водотоков совпадают со значениями в первой задаче.

Для зоны неполного насыщения на поверхности земли задавался расход ( $R_0 = 0,002$ ), учитывалось поглощение влаги корнями растений ( $E = 0,002$ ). Задавались параметры грунта ( $\theta_1 = 0,02$ ,  $\theta_2 = 0,2$ ,  $w = 5$  м,  $\delta = \sigma = 3$ ,  $k_f = 8$  м/сут) и корневой системы ( $\theta_k = 0,2$ ,  $\theta_z = 0,05$ ,  $z_k = 1$  м). На участке детализации поток из зоны неполного насыщения является инфильтрационным питанием для грунтовых вод и определяется в процессе решения стационарной задачи водообмена. Все время из зоны неполного насыщения поступает раствор с концентрацией 10 мг/л, других источников загрязнения в области моделирования нет.

В подобласти  $\Omega_d$  и вблизи нее в грунтовых водах формируется расширяющееся со временем пятно загрязнения. Загрязнение спустя 5 лет доходит до водотоков  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ . Так как они дренируют грунтовые воды, соли поступают в водотоки и по речной сети в водоем и водоток  $\Pi_3$ . Из водотока  $\Pi_3$  наоборот происходит фильтрация воды в грунт, что приводит к загрязнению грунтовых вод вблизи него. Концентрация солей в водоеме со временем медленно растет, полученные расчетные значения 0,081; 0,205 и 0,313 мг/л соответствуют временам 3 650, 7 300 и 10 950 сут. Водотоки  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ , хотя и дренируют грунтовые воды, не могут препятствовать распространению загрязнения фильтрационным потоком с одного берега на другой. На рис. 4 приведены результаты расчета фильтрационного течения и солепереноса в грунтовых водах ( $t = 10 950$  сут).

**Заключение.** В рассмотренных примерах проявляется ряд характерных особенностей солепереноса взаимосвязанными течениями. В грунтовых водах из-за малой скорости течения происходит накопление солей и формирование локальных пятен загрязнения. Фильтрационные потери из речной сети в первом примере и инфильтрация из зоны неполного насыщения во втором являются факторами, определяющими область питания грунтовых вод. В таких случаях даже при малой интенсивности поступления загрязняющих веществ в фильтрационный поток это приводит к существенному росту их концентрации вблизи зон питания грунтовых вод. По водотокам растворы распространяются с высокой скоростью, и за короткое время происходит засоление грунтовых вод на больших расстояниях от первоначального источника загрязнения.

Применение модели водообмена возможно как для реализации на ее основе постоянно действующей гидрологической модели любого уровня сложности, так и для осуществления оперативного прогнозирования водной и солевой обстановки грунтовых и поверхностных



вод на отдельных участках. На основе этих прогнозов можно осуществлять выбор наиболее оптимальных режимов работы гидрологических объектов (оросительных и дренажных систем, водозаборов, каналов, водохранилищ и т. п.), оценивать экологический ущерб от их работы и намечать мероприятия, компенсирующие нежелательные воздействия на природную среду.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01568).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Антонцев С. Н., Епихов Г. П., Кашеваров А. А.** Системное математическое моделирование процессов водообмена. Новосибирск: Наука, 1986.
2. **Полубаринова-Кочина П. Я.** Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
3. **Кучмент Л. С., Демидов В. Н., Мотовилов Ю. Г.** Формирование речного стока. М.: Наука, 1983.
4. **Антонцев С. Н., Мейрманов А. М.** Математические модели совместного движения поверхностных и подземных вод // Механика. Трети конгрес, Варна, 13–16 сент., 1977. София: Болгар. АН, 1977. Т. 1. С. 223–228.
5. **Cunningam A. B., Sinclair P. J.** Application and analysis of a coupled surface and ground water model // J. Hydrology. 1979. V. 43. P. 129–148.
6. **Sklash M. G., Farvolden R. N.** The role of ground water in strom runoff // Ibid. P. 45–66.
7. **Васильев О. Ф.** Системное моделирование взаимосвязанных фильтрационных и гидравлических процессов в задачах гидрологии, гидрогеологии и мелиорации // Проблемы теории фильтрации и механика процессов повышения нефтеотдачи. М.: Наука, 1987. С. 46–57.
8. **Корявов П. П.** Проблемы замыкания системы гидрологических моделей речного бассейна // Математическое моделирование. Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986. С. 220–240.
9. **Abbott M. B., Bathurst J. C., Cunge J. A., et al.** An introduction to the European Hydrological System (SHE). Pt 2 // J. Hydrology. 1986. V. 87. P. 61–77.
10. **Антонцев С. Н., Кашеваров А. А., Ускова Т. И.** Приближенная гидравлическая модель взаимодействия грунтовых вод с зоной неполного насыщения // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1986. Вып. 76. С. 19–31.
11. **Рыбакова С. Т.** Двумерные задачи конвективной диффузии в пористой среде // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1989. Вып. 90. С. 93–105.
12. **Васильев О. Ф., Воеводин А. Ф.** Математическое моделирование качества воды в системах открытых русел // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1975. Вып. 22. С. 73–88.
13. **Самарский А. А., Николаев Е. С.** Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
14. **Баклановская В. Ф., Чечель И. И.** Численный метод решения уравнений Сен-Венана (камерная модель) // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1976. Т. 16, № 5. С. 1217–1232.

*Поступила в редакцию 18/XII 1996 г.*