

УДК 539.3; 534.1

## КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ БАЛКИ НА НЕЛИНЕЙНЫХ ОПОРАХ

И-Рен Ванг, Жи-Вей Фанг

Тамканский университет, Новый Тайбей, 25137 Тайвань, Китай  
E-mails: 090730@mail.tku.edu.tw, s90490370060@msn.com

Исследуются колебания упругой балки Бернулли — Эйлера на нелинейных опорах (пружинах) под действием гармонических сил. Предполагается, что зависимость изменения длины пружины от приложенной силы является кубической. При описании динамики балки применяется разложение Фурье по функциям Бесселя. Для получения частного решения неоднородного уравнения используется преобразование Ганкеля. Предлагаемая модель, в отличие от модели с линейными краевыми условиями, описывает “скачок” (мгновенный переход системы из одного положения в другое) колеблющейся системы на определенных частотах. Показано, что с увеличением модуля упругости нелинейных опор увеличивается частота неустойчивых колебаний по первой собственной моде и расширяется диапазон частот, соответствующих неустойчивому поведению системы. Максимальная амплитуда колебаний по второй моде меньше соответствующей частоты колебаний по первой моде.

Ключевые слова: колебания, нелинейные краевые условия, упругая балка.

**Введение.** Широкое использование различных технических устройств привело к увеличению риска возникновения катастроф. Одной из причин возникновения катастроф являются колебания машин и механизмов на резонансных частотах. В частности, это происходит в тех случаях, когда частота внешней периодической силы, действующей на конструкцию, совпадает с собственной частотой конструкции. При этом возникает явление резонанса — существенное увеличение амплитуды колебаний, приводящее к повреждению или разрушению конструкции. При проектировании можно управлять собственными частотами конструкции, выбирая способы ее закрепления с учетом действующих на нее нагрузок. Однако вследствие наличия большого количества механизмов и различия способов их закрепления возникает необходимость решать различные краевые математические задачи.

В работе [1] изучалось движение массы, прикрепленной двумя канатами к одностороннему фрикционному демпферу, ось которого перпендикулярна плоскости движения маятника. В работе [2] рассматривались колебания вертикальной балки Бернулли — Эйлера с неподвижно закрепленным нижним концом и верхним концом, закрепленным в виброгасителе. В этой задаче краевые условия зависят от времени. В [3] экспериментально исследовались колебания подвесного моста под действием аэродинамических нагрузок. Подвесные кабели моста моделировались пружинами. В [4] решалась двумерная линейная задача о колебаниях балки Бернулли — Эйлера при различных краевых условиях. Определялись осевая сила, поперечная и крутильные жесткости. Решение сравнивалось с решением, полученным методом конечных элементов.

В [5] изучалось трение в точках опоры свободно опертой балки. Трение моделировалось действием неконсервативной силы. В [5] также анализировались деформации балки под действием внешних сил при различных значениях коэффициента трения. В [6] выполнен численный анализ нелинейных колебаний шарнирно закрепленного подвешенного моста под действием внешних нагрузок.

Для широкого класса задач о колебаниях систем крайние условия зависят от времени. При решении таких задач обычно применяются функции сдвига, предложенные Р. Д. Миндлиным и Л. И. Гудманом в работе [7]. При использовании этого метода переменные разделяются с помощью функций сдвига и члены, зависящие от времени, исключаются из задачи. В результате формулируются неоднородные крайние условия, после чего для решения задачи о колебаниях упругой балки можно применять классические методы.

В работе [8] отмечается, что преобразование Лапласа может быть использовано для решения задачи о колебаниях балки Бернулли — Эйлера с крайними условиями, зависящими от времени. Однако в более сложных случаях не удается выполнить обратное преобразование. Поэтому в [8] для решения задачи о колебаниях упругой балки использовался метод Миндлина — Гудмана.

В [9] с помощью метода Миндлина — Гудмана решена задача о связанных изгибно-изгибных колебаниях балки с крайними условиями, зависящими от времени. При этом использовались полиномы сдвига.

В [10] для решения статической задачи для балки Тимошенко с нелинейными крайними условиями предложен модифицированный метод с использованием функций сдвига. В [11] предложен рекурсивный метод наименьших квадратов с неизвестными входными данными для определения структурных параметров, таких как жесткость, демпфирование, и нелинейных параметров, а также неизмеряемых возбуждений.

В [12] применяется обратный метод, в котором для формулировки крайних условий используется предварительная информация о смещениях. В этом методе, прежде чем применять функции Бесселя для моделирования мод колебаний балки, необходимо использовать ряды Фурье для получения информации о поведении балки. Для вывода крайних условий используются классические методы динамики конструкций. В [13] предложен способ уменьшения вибрации в микрогеликоптерах за счет соответствующего крепления регулируемых виброгасителей с массами. Рассматривалась пластина с нелинейными опорами, расположенными в ее углах. Колебания жесткого тела с нелинейными опорами под действием аэродинамических нагрузок изучались в работе [14], там же предложены способы размещения регулируемых виброгасителей с массами для предотвращения флаттера подвесных мостов и крыльев самолетов при действии на них аэродинамических нагрузок.

Из анализа проведенных ранее исследований следует, что использование линейных моделей не позволяет описать различные явления, возникающие в конструкциях с нелинейными опорами, например мгновенный переход системы из одного положения в другое (“скачок”) в окрестности резонанса. В [15] описан “скачок” нелинейной колеблющейся системы, который не может быть описан с помощью модели линейных опор.

“Скачок” происходит в том случае, когда одной частоте внешней силы соответствуют несколько значений амплитуды колебаний. На рис. 1 показаны левая и правая границы области неустойчивости системы. В этой области каждому значению частоты внешней силы соответствует два значения амплитуды колебаний. Поскольку колеблющаяся система не может иметь две различные амплитуды при одной и той же частоте, соответствующая область частот является областью неустойчивости [15].

В данной работе изучаются колебания балки Бернулли — Эйлера с нелинейными опорами и исследуется неустойчивость этой системы. Опоры моделируются пружинами с кубической зависимостью силы от перемещения. Ряды Фурье используются для описа-

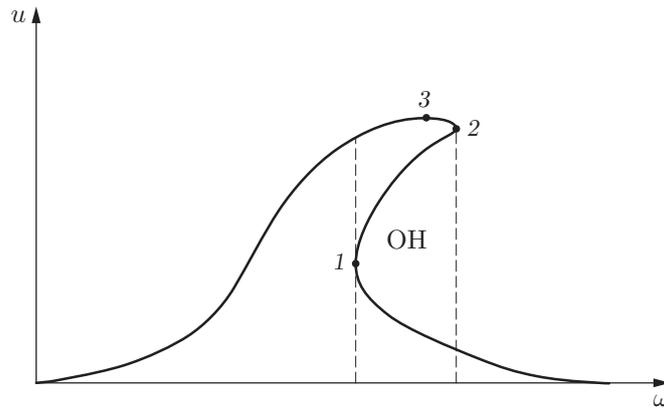


Рис. 1. Область неустойчивости (ОН) системы:

1, 2 — точки, в которых происходит “скачок” системы, 3 — точка, в которой достигается максимальное значение амплитуды

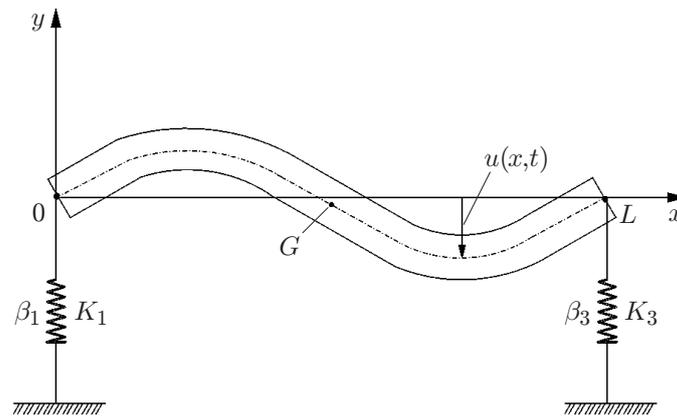


Рис. 2. Схема балки на нелинейных опорах

ния поведения балки во времени, а функции Бесселя — для аппроксимации мод колебаний упругой балки. Коэффициенты Фурье определяются с помощью граничных условий. Предложенный метод может быть использован при моделировании различных механических систем с нелинейными краевыми условиями и является новым методом решения задач с нелинейными краевыми условиями.

**1. Постановка задачи и метод решения.** Ниже описываются постановка задачи и метод ее решения.

1.1. *Балка, концы которой оперты на нелинейные пружины.* Рассматривается балка Бернулли — Эйлера, на обоих концах которой размещены нелинейные пружины (рис. 2). Приняты следующие обозначения:  $u(x, t)$  — поперечное смещение,  $G$  — центр масс упругой балки,  $K_{1,3}$ ,  $\beta_{1,3}$  — линейный и нелинейный модули упругости пружин соответственно.

Ниже описывается динамическая модель упругой балки.

Уравнение движения упругой балки Бернулли — Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = F(t), \quad (1)$$

где  $a^4 = EI/(\rho A)$  — константа;  $\rho$ ,  $A$  — плотность материала и площадь поперечного сечения балки соответственно. Предполагается, что на балку действует равномерно распределенная гармоническая сила  $F(t)$ . Поскольку концы балки опираются на нелинейные

пружины, краевые условия записываются следующим образом:

$$EIu'''(0, t) = -K_1u(0, t) - \beta_1u^3(0, t); \quad (2)$$

$$u''(0, t) = 0; \quad (3)$$

$$EIu'''(L, t) = K_3u(L, t) + \beta_3u^3(L, t); \quad (4)$$

$$u''(L, t) = 0. \quad (5)$$

В уравнениях (2), (4) члены  $\beta_1u^3(0, t)$  и  $\beta_3u^3(L, t)$  определяют нелинейный характер краевых условий.

Вследствие кубической нелинейности в некоторой области частот одной частоте может соответствовать несколько значений амплитуды. Целью данной работы является определение этой области частот.

Поскольку краевые условия задачи нелинейные, метод разделения переменных для решения задачи неприменим. Представим поперечное смещение  $u(x, t)$  и внешнюю силу  $F(t)$  в виде рядов Фурье:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [U_n(x) \cos(n\omega t) + \tilde{U}_n(x) \sin(n\omega t)]; \quad (6)$$

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} [F_n \cos(n\omega t) + \tilde{F}_n \sin(n\omega t)]. \quad (7)$$

Подставляя (6), (7) в уравнение (1), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} -n^2\omega^2 [U_n(x) \cos(n\omega t) + \tilde{U}_n(x) \sin(n\omega t)] + a^4 \sum_{n=0}^{\infty} [U_n^{iv}(x) \cos(n\omega t) + \tilde{U}_n^{iv}(x) \sin(n\omega t)] = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} [F_n \cos(n\omega t) + \tilde{F}_n \sin(n\omega t)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Из уравнения (8) следуют уравнения

$$-n^2\omega^2 U_n(x) + a^4 U_n^{iv}(x) = F_n, \quad -n^2\omega^2 \tilde{U}_n(x) + a^4 \tilde{U}_n^{iv}(x) = \tilde{F}_n. \quad (9)$$

Поскольку при представлении решения линейной задачи с нелинейными краевыми условиями использовались ряды Фурье, при аппроксимации функций формы  $U_n(x)$ ,  $\tilde{U}_n(x)$  нужно сохранить основные свойства рядов Фурье. Функции формы должны удовлетворять нелинейным краевым условиям. Наиболее предпочтительными для аппроксимации функций формы являются функции Бесселя

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{m+2k}}{k! \Gamma(m+k+1)}. \quad (10)$$

Представим функции формы в следующем виде:

$$U_n(x) = D_n J_m(\alpha_n x), \quad \tilde{U}_n(x) = \tilde{D}_n J_m(\alpha_n x). \quad (11)$$

С учетом (11) имеем

$$\begin{aligned} U_n'(x) &= \alpha_n D_n J_m(\alpha_n x), & \tilde{U}_n'(x) &= \alpha_n \tilde{D}_n J_m(\alpha_n x), \\ U_n^{iv}(x) &= \alpha_n^4 D_n J_m(\alpha_n x), & \tilde{U}_n^{iv}(x) &= \alpha_n^4 \tilde{D}_n J_m(\alpha_n x). \end{aligned}$$

Рассмотрим однородную задачу, когда внешние силы отсутствуют. Тогда из уравнений (9) получаем

$$-n^2\omega^2 D_n J_m(\alpha_n x) + a^4 \alpha_n^4 D_n J_m(\alpha_n x) = 0, \quad -n^2\omega^2 \tilde{D}_n J_m(\alpha_n x) + a^4 \alpha_n^4 \tilde{D}_n J_m(\alpha_n x) = 0. \quad (12)$$

Уравнения (12) имеют нетривиальные решения, если

$$a^4 \alpha_n^4 - n^2 \omega^2 = 0.$$

Следовательно,

$$\alpha_n^4 = n^2 \omega^2 / a^4. \quad (13)$$

Уравнение (13) имеет четыре корня:

$$\alpha_{1n} = \frac{\sqrt{n\omega}}{a}, \quad \alpha_{2n} = -\frac{\sqrt{n\omega}}{a}, \quad \alpha_{3n} = i \frac{\sqrt{n\omega}}{a}, \quad \alpha_{4n} = -i \frac{\sqrt{n\omega}}{a}. \quad (14)$$

Из (11) с учетом (14) получаем

$$\begin{aligned} U_n(x) &= D_{n1} J_m(\alpha_{1n} x) + D_{n2} J_m(\alpha_{2n} x) + D_{n3} J_m(\alpha_{3n} x) + D_{n4} J_m(\alpha_{4n} x), \\ \tilde{U}_n(x) &= \tilde{D}_{n1} J_m(\alpha_{1n} x) + \tilde{D}_{n2} J_m(\alpha_{2n} x) + \tilde{D}_{n3} J_m(\alpha_{3n} x) + \tilde{D}_{n4} J_m(\alpha_{4n} x). \end{aligned} \quad (15)$$

Функции Бесселя  $J_m(\alpha_{1n} x), \dots, J_m(\alpha_{4n} x)$  представим в виде

$$\begin{aligned} J_m(\alpha_{1n} x) &= w_{1mn}(x) + i v_{1mn}(x), & J_m(\alpha_{2n} x) &= w_{2mn}(x) - i v_{2mn}(x), \\ J_m(\alpha_{3n} x) &= w_{1mn}(x) - i v_{1mn}(x), & J_m(\alpha_{4n} x) &= w_{2mn}(x) + i v_{2mn}(x), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ . При заданной частоте  $\omega$  коэффициенты  $\alpha_{3,4n}$  являются чисто мнимыми числами и у функций Бесселя  $J_m(\alpha_{1n} x), \dots, J_m(\alpha_{4n} x)$  можно выделить действительную и мнимую части (см. (16)). Подставляя (16) в (15), получаем

$$\begin{aligned} U_n(x) &= B_{n1} w_{1mn}(x) + B_{n2} v_{1mn}(x) + B_{n3} w_{2mn}(x) + B_{n4} v_{2mn}(x), \\ \tilde{U}_n(x) &= B_{n5} w_{1mn}(x) + B_{n6} v_{1mn}(x) + B_{n7} w_{2mn}(x) + B_{n8} v_{2mn}(x), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B_{n1} &= D_{n1} + D_{n3}, & B_{n2} &= j(D_{n1} - D_{n3}), & B_{n3} &= D_{n2} + D_{n4}, & B_{n4} &= i(D_{n2} - D_{n4}), \\ B_{n5} &= \tilde{D}_{n1} + \tilde{D}_{n3}, & B_{n6} &= j(\tilde{D}_{n1} - \tilde{D}_{n3}), & B_{n7} &= \tilde{D}_{n2} + \tilde{D}_{n4}, & B_{n8} &= i(\tilde{D}_{n2} - \tilde{D}_{n4}). \end{aligned}$$

Поэтому выражение для поперечного смещения (6) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} [(B_{n1} w_{1mn}(x) + B_{n2} v_{1mn}(x) + B_{n3} w_{2mn}(x) + B_{n4} v_{2mn}(x)) \cos(n\omega t) + \\ &\quad + (B_{n5} w_{1mn}(x) + B_{n6} v_{1mn}(x) + B_{n7} w_{2mn}(x) + B_{n8} v_{2mn}(x)) \sin(n\omega t)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Приведенные выше уравнения представляют собой предложенную математическую модель. Далее для определения коэффициентов используются метод гармонического баланса и краевые условия.

При подстановке рядов в краевые условия (2)–(5) оставим в рядах четыре слагаемых ( $n = 0, 1, 2, 3$ ). В результате из уравнения (2) получаем

$$\begin{aligned} EI \sum_{n=0}^3 [(B_{n5} w_{1mn}'''(0) + B_{n7} w_{2mn}'''(0) + B_{n6} v_{1mn}'''(0) + B_{n8} v_{2mn}'''(0)) \sin(n\omega t)] = \\ = -K_1 \sum_{n=0}^3 [(B_{n5} w_{1mn}(0) + B_{n7} w_{2mn}(0) + B_{n6} v_{1mn}(0) + B_{n8} v_{2mn}(0)) \sin(n\omega t)] - \beta_1 u^3(0, t), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
& EI \sum_{n=0}^3 [(B_{n1}w_{1mn}'''(0) + B_{n3}w_{2mn}'''(0) + B_{n2}v_{1mn}'''(0) + B_{n4}v_{2mn}'''(0)) \cos(n\omega t)] = \\
& = -K_1 \sum_{n=0}^3 [(B_{n1}w_{1mn}(0) + B_{n3}w_{2mn}(0) + B_{n2}v_{1mn}(0) + B_{n4}v_{2mn}(0)) \cos(n\omega t)] - \beta_1 u^3(0, t),
\end{aligned}$$

из уравнения (3) —

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^3 [(B_{n5}w_{1mn}''(0) + B_{n7}w_{2mn}''(0) + B_{n6}v_{1mn}''(0) + B_{n8}v_{2mn}''(0)) \sin(n\omega t)] = 0, \\
& \sum_{n=0}^3 [(B_{n1}w_{1mn}''(0) + B_{n3}w_{2mn}''(0) + B_{n2}v_{1mn}''(0) + B_{n4}v_{2mn}''(0)) \cos(n\omega t)] = 0,
\end{aligned} \tag{19}$$

из уравнения (4) —

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^3 [(B_{n5}w_{1mn}''(L) + B_{n7}w_{2mn}''(L) + B_{n6}v_{1mn}''(L) + B_{n8}v_{2mn}''(L)) \sin(n\omega t)] = 0, \\
& \sum_{n=0}^3 [(B_{n1}w_{1mn}''(L) + B_{n3}w_{2mn}''(L) + B_{n2}v_{1mn}''(L) + B_{n4}v_{2mn}''(L)) \cos(n\omega t)] = 0,
\end{aligned} \tag{20}$$

из уравнения (5) —

$$\begin{aligned}
& EI \sum_{n=0}^3 [(B_{n5}w_{1mn}'''(L) + B_{n7}w_{2mn}'''(L) + B_{n6}v_{1mn}'''(L) + B_{n8}v_{2mn}'''(L)) \sin(n\omega t)] = \\
& = -K_3 \sum_{n=0}^3 [(B_{n5}w_{1mn}(L) + B_{n7}w_{2mn}(L) + B_{n6}v_{1mn}(L) + B_{n8}v_{2mn}(L)) \sin(n\omega t)] - \beta_3 u^3(L, t), \\
& EI \sum_{n=0}^3 [(B_{n1}w_{1mn}'''(L) + B_{n3}w_{2mn}'''(L) + B_{n2}v_{1mn}'''(L) + B_{n4}v_{2mn}'''(L)) \cos(n\omega t)] = \\
& = -K_3 \sum_{n=0}^3 [(B_{n1}w_{1mn}(L) + B_{n3}w_{2mn}(L) + B_{n2}v_{1mn}(L) + B_{n4}v_{2mn}(L)) \cos(n\omega t)] - \beta_3 u^3(L, t).
\end{aligned} \tag{21}$$

Исследование уравнений (18), (21) усложняется вследствие наличия коэффициентов  $u^3$ ; для упрощения вычислений были использованы полярные представления

$$R_n = \sqrt{A_n^2 + C_n^2}, \quad \sin \varphi_n = C_n/R_n, \quad \cos \varphi_n = A_n/R_n, \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned}
A_n &= B_{n1}w_{1mn}(x) + B_{n2}v_{1mn}(x) + B_{n3}w_{2mn}(x) + B_{n4}v_{2mn}(x), \\
C_n &= B_{n5}w_{1mn}(x) + B_{n6}v_{1mn}(x) + B_{n7}w_{2mn}(x) + B_{n8}v_{2mn}(x).
\end{aligned}$$

В данной работе рассматриваются гармонические моды с  $n = 0$ , поскольку все вычисленные коэффициенты этих гармоник равны нулю. Представления (22) используются в уравнении (17) и краевых условиях (18)–(21). Используя метод гармонического анализа для мод, соответствующих всем значениям  $n$ , и краевые условия (18)–(21), получаем систему уравнений для определения коэффициентов  $B_{n1}, \dots, B_{n8}$ .

Далее необходимо найти решение неоднородной задачи, соответствующей действию внешней нагрузки. Для нахождения частного решения неоднородной задачи используются прямое и обратное преобразования Ганкеля. Применяя прямое преобразование уравнений (9), получаем

$$(-n^2\omega^2 + a^4\xi^4)\bar{U}_n(\xi) = \bar{F}_n, \quad (-n^2\omega^2 + a^4\xi^4)\tilde{U}_n(\xi) = \tilde{F}_n.$$

Для нахождения оригиналов используются обратные преобразования Ганкеля

$$Q_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{\bar{F}_n}{-n^2\omega^2 + a^4\xi^4} \xi J_m(x\xi) d\xi, \quad \tilde{Q}_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{\tilde{F}_n}{-n^2\omega^2 + a^4\xi^4} \xi J_m(x\xi) d\xi.$$

Таким образом, общее решение задачи о колебаниях балки на нелинейных опорах имеет вид

$$U_n(x) = B_{n1}w_{1mn}(x) + B_{n2}v_{1mn}(x) + B_{n3}w_{2mn}(x) + B_{n4}v_{2mn}(x) + Q_n(x),$$

$$\tilde{U}_n(x) = B_{n5}w_{1mn}(x) + B_{n6}v_{1mn}(x) + B_{n7}w_{2mn}(x) + B_{n8}v_{2mn}(x) + \tilde{Q}_n(x).$$

1.2. *Балка, опертая на линейные пружины.* В данном случае краевые условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u''(0, t) = 0, \quad EIu'''(0, t) = -K_1u(0, t), \\ u''(L, t) = 0, \quad EIu'''(L, t) = K_3u(L, t). \end{aligned} \quad (23)$$

Пусть в соответствии с методом разделения переменных  $u(x, t) = \Phi(x)T(t)$ . Если  $\gamma$  — собственное число, то собственная частота равна  $\omega = \gamma^2 a^2$ , где  $a^2 = \sqrt{EI/(\rho A)}$ . Пусть  $K_1 = K_3$ ,  $\tilde{K} = K_1/(EI)$ . В качестве примера рассмотрим балку длиной  $L = 1$ , при этом  $\tilde{K} = 50,0$ ,  $a^2 = 2,2$ . В этом случае выражение для моды колебаний записывается в следующем виде:

$$\Phi(x) = E_1 \sin \gamma x + E_2 \cos \gamma x + E_3 \operatorname{sh} \gamma x + E_4 \operatorname{ch} \gamma x. \quad (24)$$

Подставляя (24) в краевые условия (23), получаем систему уравнений

$$-E_2 + E_4 = 0,$$

$$\gamma^3(-E_1 + E_3) = -\tilde{K}(E_2 + E_4),$$

$$-E_1 \sin \gamma - E_2 \cos \gamma + E_3 \operatorname{sh} \gamma + E_4 \operatorname{ch} \gamma = 0,$$

$$\gamma^3(-E_1 \cos \gamma + E_2 \sin \gamma + E_3 \operatorname{ch} \gamma + E_4 \operatorname{sh} \gamma) = \tilde{K}(E_1 \sin \gamma + E_2 \cos \gamma + E_3 \operatorname{sh} \gamma + E_4 \operatorname{ch} \gamma),$$

из которой следует

$$\begin{bmatrix} 2\tilde{K} \sin \gamma - \gamma^3 \cos \gamma + \gamma^3 \operatorname{ch} \gamma & \gamma^3(\sin \gamma + \operatorname{sh} \gamma) - 2\tilde{K}(\cos \gamma + \operatorname{ch} \gamma) \\ \sin \gamma - \operatorname{sh} \gamma & \cos \gamma + (2\tilde{K}/\gamma^3) \operatorname{sh} \gamma - \operatorname{ch} \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$4\tilde{K} \sin \gamma \cos \gamma + \frac{4\tilde{K}^2}{\gamma^3} \sin \gamma \operatorname{sh} \gamma - 4\tilde{K} \cos \gamma \operatorname{sh} \gamma + 2\gamma^3 \cos \gamma \operatorname{ch} \gamma - 2\gamma^3 = 0.$$

Используя численный метод, находим собственные значения нескольких мод колебаний:  $\gamma_1 = 3,604\,02$ ,  $\gamma_2 = 5,322\,99$ ,  $\gamma_3 = 7,876\,13$ , ... Для моды колебаний имеем выражение

$$\Phi_n(\bar{x}) = \sin \gamma_n \bar{x} + g_n \operatorname{sh} \gamma_n \bar{x} + b_n(\cos \gamma_n \bar{x} + \operatorname{ch} \gamma_n \bar{x}),$$

Таблица 1

Значения коэффициентов  $B_{n1}, \dots, B_{n8}$  ( $x = 0,3, m = 1, \omega = 30$ )

$n$	$B_{n1}$	$B_{n2}$	$B_{n3}$	$B_{n4}$	$B_{n5}$	$B_{n6}$	$B_{n7}$	$B_{n8}$
1	-1,569 000	-53,3768	-1,584 860	53,362 20	0,418 638	-4,387 57	0,421 536	4,391 81
2	0,018 853	176,3768	0,033 319	-176,365 00	-0,198 730	244,725 50	-0,355 850	-244,877 00
3	-0,089 600	-27,4766	-0,087 770	27,478 34	-0,023 220	-58,620 00	-0,018 860	58,624 21

Таблица 2

Значения коэффициентов  $w_{1,2mn}, v_{1,2mn}$  ( $x = 0,3, m = 1, \omega = 30$ )

$n$	$w_{1mn}$	$w_{2mn}$	$v_{1mn}$	$v_{2mn}$
1	0,111 321	-0,111 32	0,115 385	-0,115 39
2	0,272 016	-0,272 02	0,313 289	-0,313 29
3	0,545 077	-0,545 08	0,712 077	-0,712 08

где

$$b_n = \frac{-\gamma_n^3(\sin \gamma_n \cos \gamma_n - \sin \gamma_n \operatorname{ch} \gamma_n - \operatorname{sh} \gamma_n \cos \gamma_n + \operatorname{sh} \gamma_n \operatorname{ch} \gamma_n)}{2\tilde{K} \cos \gamma_n \operatorname{sh} \gamma_n + \gamma_n^3 \cos^2 \gamma_n - 2\gamma_n^3 \cos \gamma_n \operatorname{ch} \gamma_n - 2\tilde{K} \operatorname{sh} \gamma_n \operatorname{ch} \gamma_n + \gamma^3 \operatorname{ch}^2 \gamma_n},$$

$$g_n = \frac{2\tilde{K} \sin \gamma_n + \gamma_n^3 \cos \gamma_n - \gamma_n^3 \operatorname{ch} \gamma_n}{2\tilde{K} \operatorname{sh} \gamma_n + \gamma_n^3 \cos \gamma_n - \gamma_n^3 \operatorname{ch} \gamma_n}.$$

**2. Результаты исследования и их обсуждение.** С использованием рядов Фурье и функций Бесселя построена математическая модель колебаний балки на нелинейных опорах. Коэффициенты ряда получены методом гармонического анализа. Частное решение неоднородной задачи найдено с помощью преобразования Ганкеля. Полученное решение позволяет найти амплитуды колебаний в различных сечениях балки и провести их сравнение с амплитудами колебаний балки на линейных опорах. Также можно исследовать влияние модулей упругости нелинейных пружин на характер колебаний балки.

Рассмотрим балку длиной  $L = 1$ , при этом  $\beta_1 = \beta_3, K_1 = K_3$ . Введем четыре функции Бесселя первого рода порядка единицы, что соответствует суммированию в уравнении (10) по  $k$  от 1 до 3 при  $m = 1$ . Для численного решения нелинейных уравнений использовался гибридный метод Пауэлла. Вычисления выполнены с помощью подпрограммы NEQNF библиотеки IMSL.

В табл. 1, 2 приведены значения коэффициентов  $B_{n1}, \dots, B_{n8}, w_{1,2mn}$  и  $v_{1,2mn}$  при  $x = 0,3$  и частоте внешней силы  $\omega = 30$ .

На рис. 3, 4 представлены зависимости амплитуды от частоты в различных сечениях балки при  $\beta = \beta_1/K_1 = 0,45$ . Кривые, приведенные на рис. 3, различаются незначительно, поскольку они соответствуют сечениям, расположенным симметрично относительно середины балки.

В табл. 3 для первой и второй мод колебаний в различных сечениях балки приведены значения частот, соответствующие левой ( $\omega_1$ ) и правой ( $\omega_2$ ) границам области неустойчивости, значения амплитуд  $u_1, u_2$  при этих частотах, а также ширина области неустойчивости  $\omega_{\text{ОН}}$ . Из приведенных данных следует, что ширина и положение области неустойчивости в различных сечениях балки различаются незначительно, причем для второй моды это различие является более существенным.

Проведено сравнение полученных результатов с результатами расчета в случае балки на линейных опорах. На рис. 5 приведена зависимость амплитуды от частоты для случая линейных пружин ( $\beta = 0$ ). Частоты первых двух мод равны  $\omega_1 = 28,5$  и  $\omega_2 = 61,5$ ,

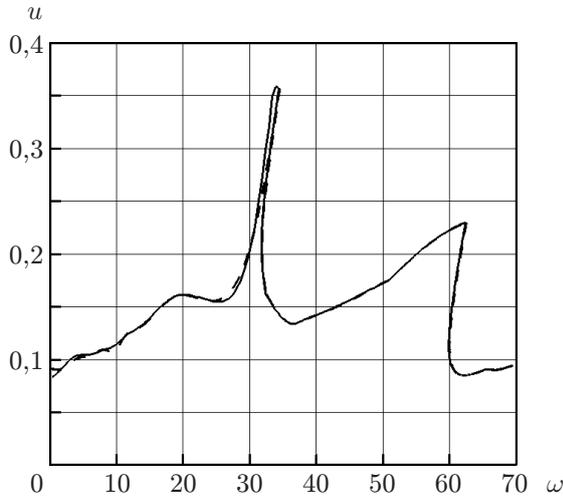


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость амплитуды балки от частоты при  $\beta = 0,45$ :  
штриховая линия —  $x = 0,3$ , сплошная —  $x = 0,7$

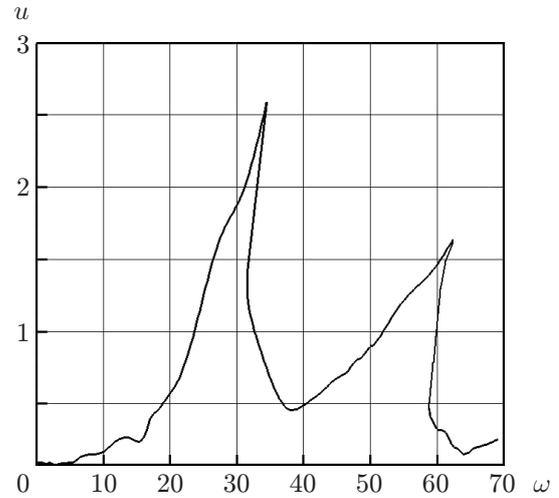


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость амплитуды балки от частоты при  $x = 0,5$ ,  $\beta = 0,45$

Таблица 3

“Скачки”, соответствующие первой и второй модам ( $\beta = 0,45$ )

$x$	Первая мода					Вторая мода				
	$\omega_1$	$u_1$	$\omega_2$	$u_2$	$\omega_{ОН}$	$\omega_1$	$u_1$	$\omega_2$	$u_2$	$\omega_{ОН}$
0,3	32,5	0,23	34,5	0,36	2,0	58,5	0,11	62,5	0,23	4,0
0,5	32,5	1,02	34,5	2,59	2,0	58,5	0,53	62,5	1,64	4,0
0,7	32,5	0,23	34,5	0,36	2,0	58,5	0,11	62,5	0,23	4,0

что соответствует собственным значениям  $\gamma_1 = 3,599\ 242$  и  $\gamma_2 = 5,287\ 206$ . Для линейной задачи (см. подп. 1.2) соответствующие собственные значения равны  $\gamma_1 = 3,604\ 02$ ,  $\gamma_2 = 5,322\ 99$ . Это подтверждает точность вычислений в нелинейной задаче. Из рис. 4, 5 следует, что учет нелинейности краевых условий существенно влияет на результаты, полученные с использованием предложенной модели. Зависимости на рис. 4, 5 приведены для среднего сечения балки ( $x = 0,5$ ). Значения резонансных частот как в линейном случае, так и в нелинейном приближенно равны. Однако в нелинейном случае неустойчивость возникает при значениях частот, принадлежащих некоторому интервалу, в то время как в линейном случае неустойчивость возникает при определенном значении частоты (резонанс).

На рис. 6 приведена зависимость амплитуды от частоты при  $\beta = 0,2; 2,0$  для среднего сечения балки.

В табл. 4 для первой моды колебаний в среднем сечении балки ( $x = 0,5$ ) приведены значения частот, соответствующие левой и правой границам области неустойчивости, значения амплитуд при этих частотах, а также ширина области неустойчивости при различных значениях коэффициента  $\beta$ . При изменении коэффициента  $\beta$  меняется как положение области неустойчивости, так и ее ширина. Поэтому при конструировании механических систем необходимо учитывать жесткость нелинейных пружин.

В табл. 4 приведены также аналогичные данные для второй моды колебаний. В случае второй моды влияние модуля упругости нелинейной пружины на область неустойчивости

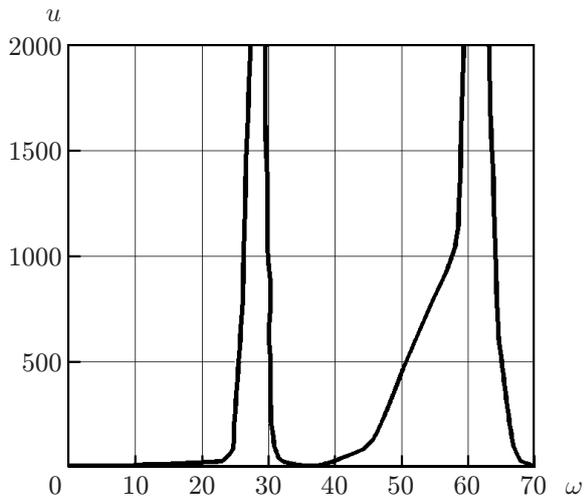


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость амплитуды балки на линейных опорах от частоты при  $\beta = 0$

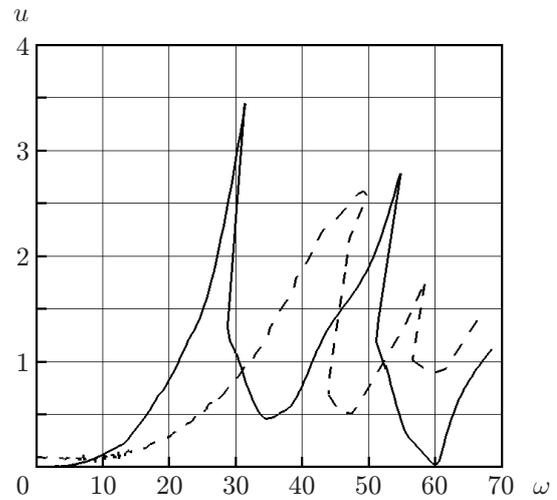


Рис. 6

Рис. 6. Зависимость амплитуды балки от частоты при  $x = 0,5$ :  
сплошная линия —  $\beta = 0,2$ , штриховая —  $\beta = 2,0$

Таблица 4

“Скачки”, соответствующие первой и второй модам ( $x = 0,5$ )

$\beta$	Первая мода					Вторая мода				
	$\omega_1$	$u_1$	$\omega_2$	$u_2$	$\omega_{OH}$	$\omega_1$	$u_1$	$\omega_2$	$u_2$	$\omega_{OH}$
0,20	30,0	1,14	31,5	3,46	1,5	51,0	1,29	55,0	2,81	4,0
0,45	32,5	1,02	34,5	2,59	2,0	58,5	0,53	62,5	1,64	4,0
2,00	41,0	0,98	47,0	2,17	6,0	56,5	1,00	59,5	1,74	3,0

является менее существенным, чем в случае первой моды. Из результатов, приведенных на рис. 3, 4, 6, следует, что для второй моды колебаний максимальная амплитуда меньше, чем для первой. Поскольку, как правило, свойства материала креплений механических систем являются нелинейными, при изучении процесса колебаний необходимо использовать нелинейные модели. Для правильного определения областей неустойчивости необходимо знать точные значения жесткостей нелинейных креплений.

**Заключение.** В работе показана необходимость учета нелинейных краевых условий при исследовании устойчивости колеблющихся систем. Нелинейная модель позволяет вычислить собственные частоты системы и определить область неустойчивости колеблющейся системы, а также описать явление “скачка”, возникающее в момент потери устойчивости. Использование линейной модели позволяет определить только резонансные частоты. С увеличением модулей упругости нелинейных опор увеличиваются частоты, при которых происходит потеря устойчивости по первой моде, а также область неустойчивости. Зависимость ширины области неустойчивости от модулей упругости нелинейных опор при потере устойчивости по второй моде менее значительна. Предложенная модель может быть использована для определения характеристик колеблющихся систем, изготовленных из различных материалов, и определения области их неустойчивости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Almazan J. L., De la Llera J. C., Inaudi J. A., et al.** A bidirectional and homogeneous tuned mass damper: a new device for passive control of vibrations // *Engng Structures*. 2007. V. 29. P. 1548–1560.
2. **Hijmissen J. W., van Horssen W. T.** On aspects of damping for a vertical beam with a tuned mass damper at the top // *Nonlinear Dynamics*. 2007. V. 50. P. 169–190.
3. **Zhang Xin, Brownjohn J. M. W., Wang Yi, Pan Tso-Chien.** Direct observations of non-stationary bridge deck aeroelastic vibration in wind tunnel // *J. Sound Vibrat.* 2006. V. 291. P. 202–214.
4. **Li S., Reynders E., Maes K., De Roeck G.** Vibration-based estimation of axial force for a beam member with uncertain boundary conditions // *J. Sound Vibrat.* 2013. V. 332. P. 795–806.
5. **Ibrahim R. A., Somnay R. J.** Nonlinear dynamic analysis of an elastic beam isolator sliding on frictional supports // *J. Sound Vibrat.* 2007. V. 308. P. 735–757.
6. **Choi Y. S., Jen K. C., Mckenna P. J.** The structure of the solution set for periodic oscillations in a suspension bridge model // *IMA J. Appl. Math.* 1991. V. 47. P. 283–306.
7. **Mindlin R. D., Goodman L. E.** Beam vibration with time-dependent boundary conditions // *ASME. J. Appl. Mech.* 1950. V. 17. P. 377–380.
8. **Grant D. A.** Beam vibration with time-dependent boundary conditions // *J. Sound Vibrat.* 1983. V. 89. P. 519–522.
9. **Lin S. M.** Pretwisted nonuniform beams with time-dependent elastic boundary conditions // *AIAA J.* 1998. V. 36. P. 1516–1522.
10. **Lee S. Y., Lu S. Y., Liu Y. T., Huang H. C.** Exact large deflection solutions for Timoshenko beams with nonlinear boundary conditions // *Computer Modeling Engng Sci.* 2008. V. 33, N 3. P. 293–312.
11. **Yang J. N., Pan S., Lin S.** Least-squares estimation with unknown excitations for damage identification of structures // *ASCE J. Engng Mech.* 1983. V. 133. P. 12–21.
12. **Suzuki A., Kamiya K., Yasuda K.** Identification technique for nonlinear boundary conditions of a circular plate // *J. Sound Vibrat.* 2006. V. 289. P. 130–147.
13. **Wang Y.-R., Chen T.-H.** The vibration reduction analysis of a rotating mechanism deck system // *J. Mech.* 2008. V. 24, N 3. P. 253–266.
14. **Wang Y.-R., Chang H.-L.** The effect of a vibration absorber on a nonlinear two-dimensional system in vibration reduction // *J. Emerging Trends Engng Appl. Sci.* 2010. V. 1, N 1. P. 60–71.
15. **Rao S. S.** *Mechanical vibrations*. Singapore: Prentice Hall, 2004.

*Поступила в редакцию 28/І 2013 г.,  
в окончательном варианте — 28/V 2013 г.*

---