УДК 539.3

Л. М. Зубов, М. И. Карякин

ДИСЛОКАЦИИ И ДИСКЛИНАЦИИ В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ТЕЛАХ С МОМЕНТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Построена теория дислокаций и дисклинаций в упругих средах, обладающих моментными напряжениями и испытывающих большие деформации. Путем решения задачи об определении полей перемещений и вращений в многосвязной области при заданных полях тензора деформации и тензора изгибной деформации доказано существование дефектов типа дислокаций Вольтерра в нелинейно-упругом континууме Коссера. При помощи мультипликативного контурного интеграла дано выражение характеристик дислокации Вольтерра через поле тензоров деформации. В качестве специального случая рассмотрена плоская деформация, при которой характеристики дислокаций и дисклинаций удается выразить через обычные контурные интегралы. В рамках моментной нелинейной теории упругости найдены точные решения задач о винтовой дислокации и клиновой дисклинации. Проанализировано влияние учета моментных напряжений и нелинейности на поведение решений вблизи оси дефекта.

1. В модели континуума Коссера [1—4] каждая частица сплошной среды имеет степени свободы абсолютно твердого тела. Положение частицы в деформированной конфигурации определяется радиусом-вектором $\mathbf{R}$ и собственно ортогональным тензором $\mathbf{H}$, называемым ниже тензором микроповорота. Используя принцип материальной индифферентности [5], можно показать, что удельная (на единицу объема отсчетной конфигурации) потенциальная энергия W упругого континуума Коссера будет зависеть от деформации тела посредством двух тензоров второго ранга: тензора $\mathbf{U} = (\nabla^0\mathbf{R})\cdot\mathbf{H}^T$, называемого далее первой мерой деформации, и тензора (точнее, псевдотензора) $\mathbf{L}$, называемого первым тензором изгибной деформации и определяемого из соотношения

$$\mathbf{L}\times\mathbf{E} = -(\nabla^0\mathbf{H})\cdot\mathbf{H}^T. \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{E}$ — единичный тензор; $\nabla^0 = \mathbf{r}^s\partial/\partial x^s$ — набла-оператор отсчетной (недеформированной) конфигурации; x^s — лагранжевы координаты. Векторы $\mathbf{r}^s$ находятся из уравнений $\mathbf{r}^s\cdot\mathbf{r}_k = \delta_k{}^s$, $\mathbf{r}_k = \partial\mathbf{r}/\partial x^k$ ($\delta_k{}^s$ — символ Кронекера, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор частицы в отсчетной конфигурации).

Для гиротропной среды W будет гиротропной функцией от $\mathbf{U}$ и $\mathbf{L}$, т. е. удовлетворяет требованию

$$W(\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{Q},\ \mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{L}\cdot\mathbf{Q}) = W(\mathbf{U},\ \mathbf{L}) \tag{1.2}$$

($\mathbf{Q}$ — любой собственно ортогональный тензор).

Воспользовавшись представлением собственно ортогонального тензора $\mathbf{H}$ через вектор конечного поворота $\boldsymbol{\theta}$ [6]

$$\mathbf{H} = \mathbf{P}_+^{-1}\cdot\mathbf{P}_- = \mathbf{P}_-\cdot\mathbf{P}_+^{-1},\quad \mathbf{P}_\pm = \mathbf{E}\pm\frac{1}{2}\mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta}, \tag{1.3}$$

при помощи (1.1) получим

$$\mathbf{L} = \frac{4}{4+\theta^2}(\nabla^0\boldsymbol{\theta})\cdot\left(\mathbf{E}+\frac{1}{2}\mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta}\right),\quad \theta^2 = \boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}. \tag{1.4}$$

При линеаризации для случая малых деформаций тензоров $\mathbf{U}$ и $\mathbf{L}$ относительно $\boldsymbol{\theta}$ и $\nabla^0\mathbf{w}$ ($\mathbf{w} = \mathbf{R}-\mathbf{r}$ — вектор перемещения) придем к тензору деформаций $\mathbf{e}$ и к тензору изгиба-кручения $\nabla^0\boldsymbol{\theta}$, используемым [1] в линейной моментной теории упругости:

$$\mathbf{U}\approx\mathbf{E}+\mathbf{e},\ \mathbf{e} = \nabla^0\mathbf{w}+\mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta},\ \mathbf{L}\approx\nabla^0\boldsymbol{\theta}. \tag{1.5}$$

Предположим для упрощения записи, что отсутствуют как массовые внешние силы и моменты, так и нагрузки. распределенные по поверхности тела. Тогда из вариационного принципа $\delta\int\limits_v W dv = 0$ получим уравнения равновесия

$$\nabla^0\cdot(\mathbf{T}^*\cdot\mathbf{H}) = 0,\ \nabla^0\cdot(\mathbf{M}^*\cdot\mathbf{H}) + (\nabla^0\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{T}^*\cdot\mathbf{H})_\times = 0, \tag{1.6}$$
$$\mathbf{T}^* = \partial W/\partial\mathbf{U},\ \mathbf{M}^* = \partial W/\partial\mathbf{L},$$

и граничные условия

(1.7) $$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{H} = 0,\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^* \cdot \mathbf{H} = 0 \text{ на } \partial v,$$

где v — объем, занимаемый упругой средой Коссера в отсчетной конфигурации; $\mathbf{n}$ — нормаль к границе тела ∂v; символ $\mathbf{P}_\times$ означает векторный инвариант тензора второго ранга $\mathbf{P}$: $(P^{ks}\mathbf{r}_k\mathbf{r}_s)_\times = P^{ks}\mathbf{r}_k \times \mathbf{r}_s$. Используя тождество Пиолы [5], уравнения (1.6) можно записать в пространственных (эйлеровых) координатах X^α ($\alpha = 1, 2, 3$):

(1.8) $$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0,\ \nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times = 0 \text{ в } V,\ \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = 0,\ \mathbf{N} \cdot \mathbf{M} = 0 \text{ на } \partial V;$$

(1.9) $$\mathbf{T} = J^{-1}(\nabla^0\mathbf{R})^T \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{H},\ \mathbf{M} = J^{-1}(\nabla^0\mathbf{R})^T \cdot \mathbf{M}^* \cdot \mathbf{H},$$

$$\nabla = \mathbf{R}^\alpha\partial/\partial X^\alpha,\ \mathbf{R}_\beta = \partial\mathbf{R}/\partial X^\beta,\ \mathbf{R}^\alpha \cdot \mathbf{R}_\beta = \delta_\beta{}^\alpha,\ J = \det(\nabla^0\mathbf{R}).$$

Здесь ∇ — пространственный оператор градиента; V — область, занимаемая телом в деформированном состоянии; $\mathbf{N}$ — нормаль к ∂V; $\mathbf{T}$ — тензор напряжений; $\mathbf{M}$ — тензор моментных напряжений.

Сформулированные уравнения нелинейной моментной теории упругости другими способами получены в [2—4]. Заметим, что модели сплошной среды, учитывающие моментные напряжения, используются при описании структурно-неоднородных сред [7], в теории жидких кристаллов [8] и в других вопросах механики деформируемых тел.

Тензоры $\mathbf{U}$ и $\mathbf{L}$ аналогичны мере деформации Коши — Грина [5]. Меняя местами отсчетную и деформированную конфигурации, т. е. сделав замены $\mathbf{R} \to \mathbf{r}$, $\nabla^0 \to \nabla$, $\boldsymbol{\theta} \to -\boldsymbol{\theta}$, получим тензоры, являющиеся аналогами меры деформации Альманзи [5] в классической нелинейной теории упругости:

(1.10) $$\mathbf{u} = \nabla\mathbf{r}\cdot\mathbf{H},\quad \mathbf{l} = -\frac{4}{4+\theta^2}(\nabla\boldsymbol{\theta})\cdot\left(\mathbf{E} - \frac{1}{2}\mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta}\right).$$

Тензоры $\mathbf{u}$ и $\mathbf{l}$ будем называть соответственно второй мерой деформации и вторым тензором изгибной деформации. Из (1.3), (1.4), (1.10) вытекают соотношения

(1.11) $$\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{H},\ \mathbf{u}^{-1} \cdot \mathbf{l} = -\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{H}.$$

Положив в (1.2) $\mathbf{Q} = \mathbf{H}$, на основании (1.11) получим для гиротропного материала $W = W(\mathbf{u}, \mathbf{l})$. Точно так же можно показать, что в гиротропном континууме Коссера тензоры напряжений $\mathbf{T}$ и моментных напряжений $\mathbf{M}$ зависят от деформации среды посредством второй меры деформации и второго тензора изгибной деформации.

Определяющие соотношения материалов со связями строятся с помощью введения множителей Лагранжа [5]. Так, наложение условия несжимаемости

(1.12) $$\det \mathbf{U} = 1$$

приводит к добавлению в выражение (1.9) для $\mathbf{T}$ не зависящего от деформации шарового тензора $p\mathbf{E}$. Отождествление тензора микроповорота $\mathbf{H}$ с тензором макроповорота $\mathbf{A} = (\nabla^0\mathbf{R} \cdot \nabla^0\mathbf{R}^T)^{-1/2} \cdot \nabla^0\mathbf{R}$ приводит к векторной связи

(1.13) $$\mathbf{U}_\times = 0.$$

Линеаризация (1.13) с учетом (1.5) дает известное соотношение псевдоконтинуума Коссера $\boldsymbol{\theta} = (1/2)\nabla^0 \times \mathbf{w}$ [9]. В этом случае выражение для $\mathbf{M}$ не меняется, а выражение тензора $\mathbf{T}$ для несжимаемых материалов принимает вид

(1.14) $$\mathbf{T} = p\mathbf{E} + (\nabla^0\mathbf{R})^T \cdot (\partial W/\partial\mathbf{U} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{D}) \cdot \mathbf{H},$$

где $\mathbf{D} = -\mathbf{E} \times \mathbf{E}$ — тензор Леви — Чивита [5, 6]; $\mathbf{q}$ — не зависящий от деформации вектор.

2. Рассмотрим задачу определения поля перемещений и микроповоротов континуума Коссера по известным полям тензоров $\mathbf{u}$ и $\mathbf{l}$, которые заданы как дважды дифференцируемые функции эйлеровых координат X^α. Из (1.3), (1.10) имеем

$$\partial \mathbf{H}^T/\partial X^\alpha = \mathbf{\Pi}_\alpha \cdot \mathbf{H}^T,\ \mathbf{\Pi}_\alpha = -\mathbf{E} \times (\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{l}). \tag{2.1}$$

Необходимые и достаточные условия разрешимости этих уравнений относительно $\mathbf{H}$ содержат девять независимых соотношений и имеют вид

$$\partial \mathbf{\Pi}_\beta/\partial X^\alpha - \partial \mathbf{\Pi}_\alpha/\partial X^\beta = \mathbf{\Pi}_\alpha \cdot \mathbf{\Pi}_\beta - \mathbf{\Pi}_\beta \cdot \mathbf{\Pi}_\alpha. \tag{2.2}$$

Решение уравнений (2.1), как и в [10], можно записать при помощи мультипликативного интеграла [11]

$$\mathbf{H}\ (M) = \overset{M}{\underset{M_0}{\widehat{\int}}} (\mathbf{E} + d\mathbf{R}\cdot\mathbf{\Pi})\cdot\mathbf{H}_0^T,\quad \mathbf{\Pi} = \mathbf{R}^\alpha \mathbf{\Pi}_\alpha. \tag{2.3}$$

Здесь M_0 — точка области V, в которой задано начальное значение тензора $\mathbf{H}(M_0) = \mathbf{H}_0$; M — текущая точка. В односвязной области V значение $\mathbf{H}(M)$ не зависит от выбора кривой, соединяющей точки M_0 и M. После определения $\mathbf{H}$ по формуле (2.3) положение частиц среды в отсчетной конфигурации находится из (1.10) в квадратурах

$$\mathbf{r}(M) = \int_{M_0}^{M} d\mathbf{R}\cdot(\mathbf{u}\cdot\mathbf{H}^T) + \mathbf{r}(M_0). \tag{2.4}$$

Необходимые и достаточные условия независимости интеграла в (2.4) от пути интегрирования в односвязной области состоят в выполнении равенств

$$\mathbf{R}^\alpha \times (\partial \mathbf{u}/\partial X^\alpha) + \mathbf{R}^\alpha \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{\Pi}_\alpha = 0. \tag{2.5}$$

Условия (2.2), (2.5), состоящие из 18 скалярных соотношений, представляют собой соотношения совместности деформаций нелинейной моментной теории упругости. Аналогичные уравнения для тензоров деформации $\mathbf{U} - \mathbf{E}$ и $\mathbf{L}$, заданных как функции лагранжевых координат, получены в [3].

Если область V, занимаемая упругим телом в деформированном состоянии, многосвязна, то перемещения $\mathbf{w} = \mathbf{R} - \mathbf{r}$ и микроповороты, определяемые формулами (2.3), (2.4), будут, вообще говоря, неоднозначными. Неоднозначность можно устранить, если область превратить в односвязную проведением необходимого числа разрезов. При этом векторы $\mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\theta}$ могут претерпевать скачок при пересечении каждого из разрезов. Методом [10] можно показать, что скачок описывается формулами

$$\mathbf{H}_+ = \mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{H}_-,\quad \boldsymbol{\theta}_+ = \frac{4}{4 - \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\theta}_-}\left(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\theta}_- + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\theta}_- \times \boldsymbol{\omega}\right), \tag{2.6}$$
$$\boldsymbol{\omega} = 2(1 + \operatorname{tr}\mathbf{\Omega})^{-1}\mathbf{\Omega}_\times,\ \mathbf{r}_+ = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{r}_- + \mathbf{b},$$

где $\mathbf{\Omega}$ — собственно ортогональный тензор, постоянный для всех точек каждого разреза; $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные векторы. Формулы (2.6) означают, что если разрезать нелинейно-упругое тело Коссера, занимающее в напряженном состоянии многосвязную область, в которой непрерывны меры деформации типа Альманзи $\mathbf{u}$, $\mathbf{l}$ (а следовательно, непрерывны тензор напряжений $\mathbf{T}$ и тензор моментных напряжений $\mathbf{M}$), то в ненапряженном состоянии положения противоположных берегов разреза будут отличаться одно от другого на жесткое движение. Аналогичное утверждение для нелинейно-упругой среды без моментных напряжений доказано в [10].

В случае двусвязной области $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{b}$ выражаются через поле тензоров деформации $\mathbf{u}$, $\mathbf{l}$ по формулам, аналогичным приведенным в [10]:

$$\mathbf{\Omega}^T = \mathbf{H}_0 \cdot \oint (\mathbf{E} + d\mathbf{R} \cdot \mathbf{\Pi}) \cdot \mathbf{H}_0^T, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{b} = \oint d\mathbf{R}' \cdot \mathbf{u}(\mathbf{R}') \cdot \int_{M_0}^{M'} (\mathbf{E} + d\mathbf{R} \cdot \mathbf{\Pi}) \cdot \mathbf{H}_0^T + \mathbf{r}_0 \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{\Omega}^T).$$

Таким образом, доказано, что в нелинейно-упругих телах с моментными напряжениями могут существовать дефекты в виде дислокаций Вольтерра. Параметры дефекта $\mathbf{b}$ и ω, как и в [10], назовем соответственно вектором Бюргерса и вектором Франка. Система уравнений для определения напряженного состояния нелинейно-упругой среды Коссера, содержащей дислокацию Вольтерра с заданными характеристиками $\mathbf{b}$ и $\boldsymbol{\omega}$, состоит из уравнений равновесия (1.8), в которых тензоры $\mathbf{T}$, $\mathbf{M}$ выражены через $\mathbf{u}$ и $\mathbf{l}$, уравнений совместности (2.1), (2.5) и соотношений (2.7).

Аналогично предыдущему рассматривается задача определения перемещений и микроповоротов в неодносвязной области, занимаемой средой Коссера в недеформированной конфигурации, по известным полям тензоров $\mathbf{U}$ и $\mathbf{L}$, заданным как непрерывные и дважды дифференцируемые функции лагранжевых координат.

3. Ограничиваясь случаем плоской деформации, описываемой соотношениями

$$X_1 = X_1(x_1, x_2), \; X_2 = X_2(x_1, x_2), \; X_3 = x_3, \tag{3.1}$$

где x_k, X_k — координаты точек среды в декартовом базисе $\{\mathbf{e}_k\}$ соответственно до и после деформации, можно упростить постановку задачи о напряжениях, создаваемых изолированным дефектом, в частности, получить выражения его характеристик через обычные контурные интегралы. Введем комплексные координаты [5, 12]

$$\zeta = x_1 + ix_2, \; \bar{\zeta} = x_1 - ix_2, \; z = X_1 + iX_2, \; \bar{z} = X_1 - iX_2.$$

Плоскую деформацию (3.1) зададим при помощи комплексно-значной функции

$$z = z(\zeta, \bar{\zeta}), \; X_3 = x_3. \tag{3.2}$$

Рассматривая случай, когда неодносвязной является область, занимаемая телом в недеформированном состоянии, считаем заданными тензоры $\mathbf{U}$ и $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L} = L_1(\zeta, \bar{\zeta})\, \mathbf{f}^1\mathbf{f}_3 + L_2(\zeta, \bar{\zeta})\mathbf{f}^2\mathbf{f}_3; \tag{3.3}$$

$$\mathbf{U} = U_\alpha{}^\beta(\zeta, \zeta)\, \mathbf{f}^\alpha \mathbf{f}_\beta + \mathbf{f}^3\mathbf{f}_3, \; \alpha, \beta = 1, 2. \tag{3.4}$$

Здесь $\{\mathbf{f}^\alpha\}$, $\{\mathbf{f}_\beta\}$ — комплексные базисы, соответствующие комплексным координатам ζ, $\bar{\zeta}$ [12], $\mathbf{f}^3 = \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3$.

Найдем тензор $\mathbf{H}$ в виде

$$\mathbf{H} = \exp(i\chi)\, \mathbf{f}^1\mathbf{f}_1 + \exp(-i\chi)\, \mathbf{f}^2\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}^3\mathbf{f}_3. \tag{3.5}$$

В этом общем представлении тензора поворота при плоской деформации χ — подлежащий определению угол конечного поворота частиц среды. Подставляя (3.3), (3.5) в (1.1), получим

$$\partial\chi/\partial\zeta = L_1, \; \partial\chi/\partial\bar{\zeta} = L_2. \tag{3.6}$$

Условие разрешимости (3.6) относительно χ запишем как

$$\partial L_1/\partial\bar{\zeta} = \partial L_2/\partial\zeta. \tag{3.7}$$

Сравнивая выражение для градиента деформации $\nabla^0\mathbf{R}$, соответствующего преобразованию (3.2), с получаемым из определения $\mathbf{U}$ выражением

$\nabla^0 \mathbf{R} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{H}$, с учетом (3.4), (3.5) находим

$$\partial z/\partial\zeta = U_1^1 \exp(i\chi), \quad \partial z/\partial\bar{\zeta} = U_2^1 \exp(i\chi).$$

Условие разрешимости этих уравнений, согласно (3.6), имеет вид

$$\partial U_2^1/\partial\zeta - \partial U_1^1/\partial\bar{\zeta} + i\left(L_1 U_2^1 - L_2 U_1^1\right) = 0. \tag{3.8}$$

Уравнения (3.7), (3.8) являются уравнениями совместности при плоской деформации среды. Они эквивалентны трем действительным уравнениям.

Анализ характера многозначности функций χ и z в двусвязной области проводится аналогично [12]. В частности, на разрезе, превращающем область в односвязную, предельные значения функций χ и z связаны соотношениями

$$\chi_+ - \chi_- = K, \quad K = \oint L_1 d\zeta + L_2 d\bar{\zeta}; \tag{3.9}$$

$$z_+ = z_- \exp(iK) + \beta; \tag{3.10}$$

$$\beta = z_0\left(1 - \exp(iK)\right) + \oint \exp(i\chi)\left(U_1^1 d\zeta + U_2^1 d\bar{\zeta}\right) \tag{3.11}$$

(z_0 — заданное значение функции z в некоторой точке области). Соотношение (3.10) — обобщение теоремы Вейнгартена линейной теории упругости в случае плоской деформации. Его вещественная форма имеет вид

$$\mathbf{w}_+ - \mathbf{w}_- = \frac{4}{4+\omega^2}\,\boldsymbol{\omega}\times\left(\mathbf{R}_- + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}_-\right) + \mathbf{b}$$

$\left(\boldsymbol{\omega} = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{K}{2}\,\mathbf{e}_3\right.$ — вектор Франка, $\mathbf{b} = \mathrm{Re}\beta\mathbf{e}_1 + \mathrm{Im}\,\beta\mathbf{e}_2$ — вектор Бюргерса$\left.\right)$.

Краевая задача о плоской деформации тела, содержащего изолированный дефект с заданными характеристиками, состоит из уравнений равновесия (1.6), краевых условий (1.7), в которых тензоры $\mathbf{T}^*$, $\mathbf{M}^*$ выражены через $\mathbf{U}$ и $\mathbf{L}$, уравнений совместности (3.7), (3.8) и соотношений (3.9), (3.11), задающих параметры дислокации.

В качестве примера рассмотрим задачу определения механических полей, создаваемых изолированным дефектом в упругом кольце $a \leqslant r \leqslant b$. Тензоры $\mathbf{U}$ и $\mathbf{L}$, удовлетворяющие условиям совместности и уравнениям равновесия, разыскиваются в виде

$$\mathbf{L} = L_r(r)\,\mathbf{e}_r\mathbf{e}_z + L_\varphi(r)\,\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_z; \tag{3.12}$$

$$\mathbf{U} = U_1(r)\,\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + U_2(r)\,\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z, \tag{3.13}$$

где r, φ, z — цилиндрические координаты; $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ — соответствующие им базисные векторы. В этом случае уравнение (3.7) принимает вид $dL_\varphi/dr + L_\varphi/r = 0$, откуда, согласно (3.9), получаем

$$L_\varphi(r) = K/(2\pi r). \tag{3.14}$$

Соотношения (3.8) с учетом (3.12)—(3.14) преобразуются:

$$L_r(r) \equiv 0, \quad dU_2/dr + U_2/r + \varkappa U_1/r = 0, \quad \varkappa = (2\pi + K)/2\pi. \tag{3.15}$$

Полагая $\chi = 0$ при $\varphi = 0$, находим $\chi = (\varkappa - 1)\,\varphi$. Тем самым по (3.5) определен тензор микроповорота $\mathbf{H}$. Вычисляя β по (3.11), аналогично [12] можно показать, что представление (3.12), (3.13) описывает деформированное состояние цилиндра с клиновой дисклинацией.

Изучение напряженного состояния проведем для «физически линейного» материала, удельная потенциальная энергия которого принимается в виде

$$W = \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{tr}^2\,\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\mu+\alpha}{2}\,\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^T\right) + \frac{\mu-\alpha}{2}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}^2 + \tag{3.16}$$
$$+ \frac{\delta}{2}\,\mathrm{tr}^2\,\mathbf{L} + \frac{\gamma+\eta}{2}\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}^T\right) + \frac{\gamma-\eta}{2}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{L}^2, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{U} - \mathbf{E}$$

(λ, μ, α, δ, η, γ — упругие постоянные). С учетом полученного выше можно показать, что уравнения равновесия в моментах удовлетворяются тождественно, а из уравнений равновесия в напряжениях нетривиальным остается одно

$$(3.17)\qquad (\lambda+2\mu)\frac{dU_1}{dr}+\lambda\frac{dU_2}{dr}+[\lambda(1-\varkappa)+2\mu]\frac{U_1}{r}+ \\ +[\lambda(1-\varkappa)-2\mu\varkappa]\frac{U_2}{r}=2\frac{(\lambda+\mu)(1-\varkappa)}{r}.$$

Граничные условия (1.7) сводятся к соотношению

$$(3.18)\qquad (\lambda+2\mu)U_1(r)+\lambda U_2(r)=2(\lambda+\mu),\ r=a,\ b.$$

Особый интерес представляет случай сплошного цилиндра ($a=0$). Решая краевую задачу (3.15), (3.17), (3.18) и устремляя параметр a к нулю, для функций U_1, U_2 получим

$$(3.19)\qquad U_1=\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\rho^{\varkappa-1}+\frac{1}{(1+\varkappa)(1-\nu)}, \\ U_2=\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\rho^{\varkappa-1}+\frac{\varkappa}{(1+\varkappa)(1-\nu)},\quad \rho=\frac{r}{b},\quad \nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}.$$

Выражения для компонент тензора напряжений $\mathbf{T}$ при этом не имеют особенности на оси дислокации и совпадают с вычисляемыми в безмоментной нелинейной теории упругости [12].

Отличные от нуля компоненты тензора моментных напряжений $\mathbf{M}$ запишем в форме

$$(3.20)\qquad M_{23}=(\gamma+\eta)\frac{\varkappa-1}{rU_1(r)},\quad M_{32}=(\gamma-\eta)\frac{\varkappa-1}{rU_1(r)U_2(r)}.$$

Из данных соотношений и (3.19) видно, что в сплошном цилиндре моментное напряжение M_{23} имеет особенность порядка ρ^{-1} при $\varkappa>1$ и $\rho^{-\varkappa}$ при $\varkappa<1$, а напряжение M_{32} — особенность порядка ρ^{-1} при $\varkappa>1$ и $\rho^{1-2\varkappa}$ при $\varkappa<1$. Линеаризация выражений (3.20) по параметру $\varkappa-1$ приводит при $\rho>0$ к известным из линейной теории упругости формулам [13], согласно которым при $\rho\to 0$ моментные напряжения имеют особенность порядка ρ^{-1} для всех $\varkappa\neq 1$.

На основании (3.16) с учетом (3.14), (3.19) легко установить, что при учете моментных напряжений потенциальная энергия, приходящаяся на единицу длины цилиндра с дисклинацией и вычисляемая по формуле

$$\Pi=g(\varkappa)\int_a^b rW(r)\,dr,\quad g(\varkappa)=\begin{cases}2\pi, & \varkappa\leqslant 1,\\ 2\pi\varkappa^{-1}, & \varkappa>1,\end{cases}$$

имеет логарифмическую особенность при $a\to 0$.

4. Рассмотрим следующее преобразование отсчетной конфигурации в текущую:

$$(4.1)\qquad R=R(r),\ \Phi=\varphi,\ Z=a\varphi+z$$

(r, φ, z, и R, Φ, Z — цилиндрические координаты в отсчетной и текущей конфигурациях соответственно). Это преобразование описывает деформацию цилиндра, содержащего винтовую дислокацию с вектором Бюргерса $\mathbf{b}=2\pi a\mathbf{e}_z$. Зададим представление тензора микроповорота $\mathbf{H}$:

$$(4.2)\qquad \mathbf{H}=\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r+\cos\chi(r)(\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi+\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z)+ \\ +\sin\chi(r)(\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_z-\mathbf{e}_z\mathbf{e}_\varphi).$$

Соответствующие (4.1), (4.2) меры деформации $\mathbf{U}$ и $\mathbf{L}$ имеют вид

$$(4.3)\qquad \mathbf{U}=\frac{dR}{dr}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}(R\cos\chi+a\sin\chi)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi+ \\ +\frac{1}{r}(a\cos\chi-R\sin\chi)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_z+\sin\chi\mathbf{e}_z\mathbf{e}_\varphi+\cos\chi\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z;$$

$$(4.4)\qquad \mathbf{L}=\frac{d\chi}{dr}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r+\frac{\sin\chi}{r}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi+\frac{\cos\chi-1}{r}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_z.$$

Ограничимся рассмотрением несжимаемого псевдоконтинуума Коссера, т. е. будем считать, что на материал наложены связи (1.12), (1.13). Это позволяет сразу найти функции $R(r)$ и $\chi(r)$:

$$R(r) = \sqrt{r^2 + A}, \quad \chi(r) = \operatorname{arctg} \frac{a}{r + \sqrt{r^2 + A}}.$$

Постоянная A определяется из граничных условий. В частности, для сплошного цилиндра $R(0) = 0$, следовательно, $A = 0$ и

(4.5) $$R(r) = r, \ \chi(r) = \operatorname{arctg}(a/2r).$$

Рассмотрим материал с энергией $W = 2\mu \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\delta}{2} \operatorname{tr}^2 \mathbf{L} + \frac{\gamma + \eta}{2} \times$ $\times \operatorname{tr}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T) + \frac{\gamma - \eta}{2} \operatorname{tr} \mathbf{L}^2$. Задача о винтовой дислокации для таких материалов без учета моментных напряжений исследовалась в [14]. В данном случае с учетом (1.14), (4.3)—(4.5) уравнения равновесия (1.8) для сплошного цилиндра сводятся к четырем соотношениям

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{2\mu}{r} + \frac{4\mu}{\sqrt{4r^2 + a^2}} + (\delta + 2\gamma) \frac{4a^2}{r(4r^2 + a^2)^2},$$

$$q_r = -(\delta + 2\gamma) \frac{4a}{(4r^2 + a^2)^{3/2}}, \quad q_\varphi = 0, \quad q_z = 0.$$

Здесь $q_r = \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_r$; $q_\varphi = \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_\varphi$; $q_z = \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_z$. При помощи этих формул можно показать, что в окрестности оси дислокации касательное напряжение $T_{\varphi z}$, как и в [14], стремится к конечному предельному значению 2μ, напряжение же $T_{z\varphi}$ возрастает пропорционально r^{-1}, как в линейной теории упругости. Моментные напряжения M_{rr} и $M_{\varphi\varphi}$ запишем в форме

(4.6) $$M_{rr} = a \left(\frac{\beta}{r\sqrt{4r^2 + a^2}} - \frac{2(\beta + 2\gamma)}{4r^2 + a^2} \right),$$

$$M_{\varphi\varphi} = a \left(\frac{2\beta}{4r^2 + a^2} - \frac{4\beta r}{(4r^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{2\gamma}{r\sqrt{4r^2 + a^2}} \right).$$

Если в решении (4.6) при $r > 0$ сохранить только члены первого порядка относительно параметра a, то придем к решению задачи о винтовой дислокации в рамках линейной теории псевдоконтинуума Коссера:

(4.7) $$M_{rr}^0 = -\gamma a/r^2, \quad M_{\varphi\varphi}^0 = \gamma a/r^2.$$

Согласно (4.6), (4.7), решение линейной теории имеет при $r \to 0$ более сильную особенность в моментных напряжениях по сравнению с нелинейной теорией. При удалении от оси дислокации различие между решениями линейной и нелинейной теорий пропадает, т. е. $M_{rr} \sim M_{rr}^0$, $M_{\varphi\varphi} \sim$ $\sim M_{\varphi\varphi}^0$ при $r \to \infty$. Потенциальная энергия, приходящаяся на единицу длины цилиндра с дислокацией, имеет логарифмическую особенность на оси цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пальмов В. А.** Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ.— 1964.— Т. 28, вып. 3.
2. **Тупин Р. А.** Теории упругости, учитывающие моментные напряжения // Механика.— М., 1965.— № 3(91).
3. **Шкутин Л. И.** Нелинейные модели моментных деформируемых сред // ПМТФ.— 1980.— № 6.
4. **Жилин П. А.** Основные уравнения неклассической теории упругих оболочек // Тр./Ленингр. политехн. ин-т.— 1982.— № 386.
5. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости.— М.: Наука, 1980.
6. **Зубов Л. М.** Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек.— Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1982.

7. **Панин В. Е., Лихачев В. А., Гриняев Ю. В.** Структурные уровни деформации твердых тел.— Новосибирск: Наука, 1985.
8. **Аэро Э. Л., Булыгин А. Н.** Гидромеханика жидких кристаллов // Итоги науки и техники. Сер. Гидромеханика.— М.: ВИНИТИ, 1973.— Т. 7.
9. **Новацкий В.** Теория упругости.— М.: Мир, 1975.
10. **Зубов Л. М.** О дислокациях Вольтерра в нелинейно-упругих телах // ДАН СССР.— 1986.— Т. 287, № 3.
11. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц.— М.: Наука, 1967.
12. **Зубов Л. М., Карякин М. И.** Многозначные смещения и дислокации Вольтерра в плоской нелинейной теории упругости // ПМТФ.— 1987.— № 6.
13. **Nowacki W.** On discrete dislocations in micropolar elasticity // Arch. Mech.— 1974.— V. 26, N 1.
14. **Зубов Л. М.** Теория дислокаций Вольтерра в нелинейно-упругих телах // Изв. АН СССР. МТТ.— 1987.— № 5.

г. Ростов-на-Дону *Поступила 12/VII 1988 г.*

УДК 620.171.5

В. М. Тихомиров, В. П. Тырин

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА РАССЕЯННОГО СВЕТА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ K_{III} В ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ

Для экспериментального определения коэффициента интенсивности напряжений (КИН) K_{III} при исследовании объемных элементов конструкций с поверхностными или внутренними трещинами используются методы «замораживания» деформаций [1, 2] и рассеянного света [3]. Метод рассеянного света обладает большими потенциальными возможностями и существенными преимуществами перед методом «замораживания», позволяя получать необходимые данные без разрезки модели. Однако из-за сложности эксперимента и интерпретации измеряемых величин этот метод не получил широкого применения. Например, в [3] предлагается просвечивать модель в плоскости, перпендикулярной фронту трещины, лучом света, пересекающим вершину трещины. Такая схема просвечивания требует тщательного подбора иммерсионной жидкости и обработки поверхности берегов трещины, а также вращения модели или установки вокруг точки пересечения лучом фронта трещины.

В настоящей работе описывается более простая методика проведения эксперимента, позволяющая перенести способы обработки экспериментальных данных для определения КИН, известные в плоской фотоупругости, на случай определения K_{III} для пространственных трещин.

При продольном сдвиге напряжения вблизи вершины трещины выражаются следующим образом [4]:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \tag{1}$$

$$\tau_{xz} = K_{III}(2\pi r)^{-1/2}\sin(\theta/2), \quad \tau_{yz} = K_{III}(2\pi r)^{-1/2}\cos(\theta/2),$$

где x, y, z — ортогональная система координат, ориентированная таким образом, что ось z является касательной к фронту трещины в точке O (рис. 1); r, θ — полярные координаты.

Так как по методу рассеянного света измеряется величина оптической разности хода лучей света, обусловленная разностью квазиглавных напряжений, которые действуют в плоскости, перпендикулярной просвечивающему лучу, то наиболее эффективными будут просвечивания в плоскости xOy, параллельные оси x. Важным обстоятельством является то, что направления главных напряжений не меняют своей ориентации вдоль этих направлений (отсутствует вращение главных осей). В этом случае порядок полосы интерференции m_{ij} для точки x_i, взятой на луче $y = y_j$, связан с напряжениями зависимостью

$$m_{ij} = 2C\int_{x_0}^{x_i} \tau_{yz}\,dx \tag{2}$$