

УДК 519.676

Анализ точности оценок первых моментов решения СДУ с винеровской и пуассоновской составляющими методом Монте-Карло*

С.С. Артемьев, М.А. Якунин

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mails: ssa@osmf.sccc.ru (Артемьев С.С.), yma@osmf.sccc.ru (Якунин М.А.)

Артемьев С.С., Якунин М.А. Анализ точности оценок первых моментов решения СДУ с винеровской и пуассоновской составляющими методом Монте-Карло // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 1. — С. 33–45.

В работе исследуется точность оценок первых моментов численного решения СДУ с винеровской и пуассоновской составляющими обобщенным явным методом Эйлера. Для тестового СДУ получены точные выражения математического ожидания и дисперсии решения, сравнение с которыми позволяет исследовать зависимость точности оценок, полученных методом Монте-Карло, от значений параметров СДУ, размеров шага интегрирования и ансамбля моделируемых траекторий решения. Приводятся результаты численных экспериментов.

DOI: 10.15372/SJNM20160103

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, винеровская и пуассоновская составляющие, метод Монте-Карло, обобщенный метод Эйлера, ансамбль траекторий, шаг интегрирования, оценки моментов.

Artemiev S.S., Yakunin M.A. Analysis of the accuracy of estimates of the first moments of solving SDE with Wiener and Poisson components by Monte Carlo method // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 1. — P. 33–45.

In this paper, we investigate the accuracy of estimates of the first moments of a numerical solution to SDE with the Wiener and the Poisson components by the generalized Euler explicit method. The exact expressions for the mathematical expectation and variance of the test SDE solution are obtained. These expressions allow us to investigate the dependence of the accuracy of estimates obtained by Monte Carlo method on the values of SDE parameters, the size of an integration step, and the size of an ensemble of simulated trajectories of the solution. The results of the numerical experiments are presented.

Keywords: stochastic differential equations, Wiener and Poisson components, Monte Carlo method, generalized Euler method, ensemble of trajectories, integration step, estimates of moments.

Исследование точности оценок первых моментов численного решения СДУ с винеровской составляющей методом Монте-Карло ранее проводилось в работах [1–3]. Наличие в СДУ пуассоновской составляющей существенно затрудняет получение требуемой точности оценок моментов, прежде всего из-за значительного увеличения трудоемкости численных алгоритмов. Первые работы по численному решению СДУ со скачками относились к стохастическим моделям ценовых рядов акций [4, 5]. Исследование точности

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00340) и научной программы “Ведущие научные школы” (НШ-5111.2014.1).

оценок моментов решения СДУ подразумевает знание точных аналитических выражений для моментов. Некоторые исследования точных решений скалярного линейного СДУ в смысле Стратоновича с пуассоновской составляющей проведены в [6]. При численном решении СДУ с винеровской и пуассоновской составляющими обобщенным явным методом Эйлера точность оценок моментов зависит от значений вещественных параметров СДУ, расстояний между скачками, величин скачков, размеров шага интегрирования и ансамбля моделируемых траекторий решения. При малых размерах шага интегрирования несовпадение узлов равномерной временной сетки с моментами скачков существенно не влияет на точность оценок, зато и не усложняет численный статистический алгоритм. На точность оценок сильно влияет рост дисперсии решения СДУ со временем, причем наличие пуассоновской составляющей может превращать устойчивое в среднем квадратическом решение в неустойчивое.

В настоящей работе для решения скалярного линейного СДУ с мультипликативными винеровским и пуассоновским случайными шумами получены точные аналитические выражения его моментов и теоретически исследованы зависимости ошибок оценок математического ожидания и дисперсии решения СДУ от параметров СДУ, размеров шага интегрирования и ансамбля моделируемых траекторий решения. Приводятся результаты численных экспериментов, которые показывают, что наличие в СДУ пуассоновской составляющей вызывает значительное увеличение трудоемкости численных алгоритмов по сравнению с СДУ только с винеровской составляющей.

1. Численное решение системы СДУ с пуассоновской составляющей

Задачу Коши для N -мерной системы СДУ Ито зададим в виде [7]:

$$dy(t) = f(y, t)dt + \sigma(y, t)dw(t) + \int_{\mathbf{R}^N} g(y, x) \nu(dx, dt), \quad y(0) = y_0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

где $w(t)$ — M -мерный стандартный винеровский процесс, ν — пуассоновская случайная мера, определенная на $\mathbf{R}^N \times (0, T]$ с параметром интенсивности λ , независимая с $w(t)$, $f(y, t)$, $g(y, x)$, $x, y \in \mathbf{R}^N$, — заданные N -мерные функции, $\sigma(y, t)$ — заданная $(N \times M)$ -мерная функция. Предполагается, что функции в (1) удовлетворяют условиям существования и единственности решения СДУ. Начальное значение y_0 без ограничения общности будем задавать неслучайным. Стохастический интеграл от пуассоновской составляющей в (1) определяется как

$$\int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} g(y(\tau), x) \nu(dx, d\tau) = \sum_{\substack{\tau_k \leq t, \\ \tau_k \in D_q}} g(y(\tau_k), q(\tau_k)), \quad (2)$$

где D_q — множество моментов скачков, $q(\tau_k)$ — векторы величин скачков. Случайные временные интервалы между моментами скачков $\theta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$, $\tau_0 = 0$ имеют экспоненциальное распределение с плотностью $f_\theta(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$.

Для численного решения СДУ (1) на основе обобщенного явного метода Эйлера используется следующая схема, учитывающая скачки траекторий. Для диффузионной составляющей на интервале $(t_n, t_{n+1}]$ имеем

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n) + \sqrt{h}\sigma(y_n, t_n)\eta_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

где h — шаг равномерной временной сетки $\{t_n\}$, η_{n+1} — независимые между собой стандартные нормальные случайные векторы с независимыми компонентами. Далее $y_{n+1} = \tilde{y}_{n+1}$ при отсутствии скачков на указанном интервале или $y_{n+1} = y_{n+1}^{(J_n)}$ при наличии на нем J_n скачков, где $y_{n+1}^{(J_n)}$ вычисляется по рекуррентной формуле на основе (2). Полагая, что моменты скачков упорядочены по возрастанию, имеем

$$y_{n+1}^{(i+1)} = y_{n+1}^{(i)} + g(y_{n+1}^{(i)}, \xi_{n+1}^{(i)}), \quad i = 0, \dots, J_n - 1, \quad (4)$$

где $y_{n+1}^{(0)} = \tilde{y}_{n+1}$, $\xi_{n+1}^{(i)}$ — векторы случайных или неслучайных величин скачков. Для случайной величины скачка задается ее распределение и предполагается ее независимость с θ_k, η_{n+1} .

Представленная выше численная схема (3), (4) решения СДУ (1) не требует формирования для каждой моделируемой траектории отдельной временной сетки, включающей в себя моменты скачков $\{\tau_k\}$. Заметим, что в частном случае при наличии в (1) только пуассоновской составляющей, т. е. при $f(y, t) \equiv 0$, $\sigma(y, t) \equiv 0$, данная схема определяет точное решение СДУ на заданной временной сетке.

2. Скалярное линейное СДУ

Рассмотрим скалярное линейное СДУ Ито с мультипликативным шумом, являющееся частным случаем системы (1):

$$dy(t) = y(t) \left(\alpha dt + \sigma dw(t) + \int_{\mathbf{R}} g(x) \nu(dx, dt) \right), \quad y(0) = y_0 > 0, \quad (5)$$

где σ, α — вещественные параметры, $g(x)$ — некоторая функция. Формула (2) в данном случае принимает вид

$$\int_0^t y(\tau) \int_{\mathbf{R}} g(x) \nu(dx, d\tau) = \sum_{\substack{\tau_k \leq t, \\ \tau_k \in D_q}} y(\tau_k) g(\xi_k), \quad (6)$$

где $\{\xi_k\}$ — совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин скачков. Различные представления точного решения СДУ (5) ранее приводились, например, в [8, 9]. Используя хорошо известное решение СДУ без пуассоновской составляющей [7] и формулу (6), точное решение СДУ (5) можно записать в следующем виде:

$$y(t) = y_0 \exp \left((\alpha - \sigma^2/2)t + \sigma w(t) \right) \prod_{i=0}^{N_t} (1 + g(\xi_i)), \quad (7)$$

где N_t — случайное число скачков на интервале $(0, t]$ (процесс Пуассона) с вероятностью появления k скачков

$$\mathbf{P}\{N_t = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

При $i = 0$ в (7) формально задается $g(\xi_0) = 0$.

Ниже для анализа точности оценок моментов решения СДУ (7) потребуется общая формула для L -го момента $\mathbf{E}y^L(t)$. Учитывая взаимную независимость случайных величин $\{\xi_k\}$, N_t и винеровского процесса $w(t)$, с использованием формулы (8) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}y^L(t) &= y_0^L e^{L(\alpha - \sigma^2/2)t} \mathbf{E}[e^{L\sigma w(t)}] e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \prod_{i=0}^k \mathbf{E}[(1 + g(\xi_i))^L] \\ &= y_0^L \exp[(L\alpha + L(L-1)\sigma^2/2 + \lambda(\mu_L - 1))t], \end{aligned} \quad (9)$$

где $\mu_L = \mathbf{E}(1+g(\xi))^L$, $\mathbf{E}e^{L\sigma w(t)} = e^{L^2\sigma^2 t/2}$. Используя далее также моменты $\mu_{gL} = \mathbf{E}g^L(\xi)$, из (9) получаем выражения для математического ожидания $m_y(t)$, второго момента $s_y(t)$ и дисперсии $D_y(t)$ случайного процесса $y(t)$:

$$m_y(t) = \mathbf{E}y(t) = y_0 e^{(\alpha + \lambda\mu_{g1})t}, \quad (10)$$

$$s_y(t) = \mathbf{E}y^2(t) = m_y^2(t) e^{(\sigma^2 + \lambda\mu_{g2})t}, \quad (11)$$

$$D_y(t) = s_y(t) - m_y^2(t) = m_y^2(t) (e^{(\sigma^2 + \lambda\mu_{g2})t} - 1). \quad (12)$$

В формулах (10)–(12) $\mu_{g1} = \mu_1 - 1$, $\mu_{g2} = \mu_2 - 2\mu_1 + 1$. Из (10), (12) следует, что СДУ (5), устойчивое в среднеквадратическом при $\lambda = 0$, $\alpha < -\sigma^2/2$ (см. [10]), становится неустойчивым при $\alpha > (-\sigma^2 + \lambda(1 - \mu_2))/2$ или $\alpha > \lambda(1 - \mu_1)$.

Рассмотрим теперь стандартные несмещенные оценки математического ожидания $\hat{m}_y(t)$, второго момента $\hat{s}_y(t)$ и дисперсии $\hat{D}_y(t)$ случайного процесса $y(t)$ на основе ансамбля из N_{tr} траекторий решения СДУ (5) $\{\bar{y}^{(k)}(t)\}$:

$$\hat{m}_y(t) = \frac{1}{N_{\text{tr}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{tr}}} \bar{y}^{(k)}(t), \quad (13)$$

$$\hat{s}_y(t) = \frac{1}{N_{\text{tr}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{tr}}} (\bar{y}^{(k)}(t))^2, \quad \hat{D}_y(t) = \frac{1}{N_{\text{tr}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{tr}}} (\bar{y}^{(k)}(t) - m_y(t))^2. \quad (14)$$

Точность оценки (13) определяется ее среднеквадратичным отклонением

$$\sigma_{\hat{m}_y}(t) = \sqrt{\mathbf{E}(\hat{m}_y(t) - m_y(t))^2} = \sqrt{D_y(t)/N_{\text{tr}}}, \quad (15)$$

где дисперсия $D_y(t)$ определяется согласно (12). При анализе оценки математического ожидания вместо (15) удобнее использовать относительную ошибку оценки

$$\varepsilon_{\hat{m}_y}(t) = \sigma_{\hat{m}_y}(t)/m_y(t) = \sqrt{(e^{(\sigma^2 + \lambda\mu_{g2})t} - 1)/N_{\text{tr}}}, \quad (16)$$

которая не зависит от y_0 , α , μ_{g1} . Из (16) можно оценить размер ансамбля траекторий N_{tr} , необходимый для достижения заданной точности оценки $\varepsilon = \varepsilon_{\hat{m}_y}(T)$ в конце интервала интегрирования:

$$N_{\text{tr}} = \lceil (e^{(\sigma^2 + \lambda\mu_{g2})T} - 1)/\varepsilon^2 \rceil, \quad (17)$$

где $\lceil x \rceil$ — ближайшее к x целое число, большее или равное x .

Среднеквадратичные отклонения оценок $\hat{s}_y(t)$, $\hat{D}_y(t)$ определяются аналогично (15), (16) с использованием формулы (9) для нахождения дисперсий оценок:

$$\sigma_{\hat{s}_y}(t) = \sqrt{\mathbf{E}(y^2(t) - s_y(t))^2}/N_{\text{tr}} = y_0^2 e^{(2\alpha + \sigma^2)t} \sqrt{(e^{(4\sigma^2 + \lambda(\mu_4 - 1))t} - e^{2\lambda(\mu_2 - 1)t})}/N_{\text{tr}}, \quad (18)$$

$$\varepsilon_{\hat{s}_y}(t) = \sigma_{\hat{s}_y}(t)/s_y(t) = \sqrt{(e^{(4\sigma^2 + \lambda(4\mu_{g2} + 4\mu_{g3} + \mu_{g4}))t} - 1)/N_{\text{tr}}}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\widehat{D}_y}(t) &= \sqrt{\mathbf{E}((y(t) - m_y(t))^2 - D_y(t))^2 / N_{\text{tr}}} \\ &= \frac{y_0^2 e^{2\alpha t}}{\sqrt{N_{\text{tr}}}} \left(e^{(6\sigma^2 + \lambda(\mu_4 - 1))t} - 4e^{(3\sigma^2 + \lambda(\mu_3 + \mu_1 - 2))t} - e^{2(\sigma^2 + \lambda(\mu_2 - 1))t} + \right. \\ &\quad \left. 8e^{(\sigma^2 + \lambda(\mu_2 + 2\mu_1 - 3))t} - 4e^{4\lambda(\mu_1 - 1)t} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (20)$$

В формуле (19) $4\mu_{g2} + 4\mu_{g3} + \mu_{g4} = \mu_4 - 2\mu_2 + 1$. Ошибки оценок второго момента и дисперсии (18)–(20) при увеличении значений t , σ и параметров пуассоновской составляющей растут гораздо быстрее ошибки оценки математического ожидания. Поэтому для получения оценок второго момента и дисперсии такой же точности, как и оценок математического ожидания, требуется использовать значительно больший размер ансамбля моделируемых траекторий, чем для $\widehat{m}_y(t)$. Заметим, однако, что ошибки (18)–(20) при численном моделировании достигаются только на большой выборке независимых оценок $\{\widehat{D}_y^{(j)}(t)\}$ или $\{\widehat{s}_y^{(j)}(t)\}$ (за счет редких больших значений оценок). Большинство же их значений получаются заниженными и более точными, чем можно было бы ожидать из приведенных выше формул (см. ниже пример 2). В случае когда решение СДУ (5) имеет сильно растущие моменты второго и более высоких порядков, формулы (17)–(20) позволяют лишь приближенно оценивать сверху величину N_{tr} , необходимую для достижения заданной точности оценок $\widehat{m}_y(T)$, $\widehat{s}_y(T)$ и $\widehat{D}_y(T)$ в конце интервала интегрирования. Более точное определение необходимого количества N_{tr} (как и в случае СДУ без пуассоновской составляющей) в такой ситуации может дать интервальное оценивание моментов решения СДУ на основе распределений случайных величин (13), (14).

Моменты решения (9) являются положительными функциями (при $y_0 > 0$), однако само решение СДУ (7) может принимать как положительные, так и отрицательные значения, что невозможно только для винеровской составляющей. Далее будем рассматривать случай $y(t) > 0$, при этом данный случайный процесс является геометрическим броуновским движением со скачками. Для выполнения условия $1 + g(x) > 0$ целесообразно задать в СДУ (5) функцию амплитуд скачков $g(x) = e^x - 1$, при этом случайный процесс (7) принимает вид (см. также [8]):

$$y(t) = y_0 \exp \left((\alpha - \sigma^2/2)t + \sigma w(t) + \sum_{i=0}^{N_t} \xi_i \right), \quad \xi_0 = 0. \quad (21)$$

Замечание. При данном выборе функции $g(x)$ из СДУ (5) на основе формулы Ито для случайного процесса $z(t) = \ln y(t)$ получается простейшее линейное СДУ:

$$dz(t) = (\alpha - \sigma^2/2)dt + \sigma dw(t) + \int_{\mathbf{R}} x\nu(dx, dt), \quad z(0) = \ln y_0.$$

3. Численные эксперименты

Численные эксперименты в примерах 1–4 проводились путем статистического моделирования траекторий решения скалярного СДУ (5) на основе численной схемы решения (3), (4), которая применительно к данному СДУ имеет вид:

$$\widetilde{y}_{n+1} = y_n (1 + \alpha h + \sigma \sqrt{h} \eta_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (22)$$

$$y_{n+1}^{(i+1)} = y_{n+1}^{(i)} \exp(\xi_{n+1}^{(i)}), \quad i = 0, \dots, J_n - 1. \quad (23)$$

Как следует из (22), (23), численное решение СДУ в конце интервала интегрирования T можно представить в виде

$$y_c(T) = \tilde{y}(T) \exp\left(\sum_{i=0}^{N_T} \xi_i\right), \quad \xi_0 = 0, \quad (24)$$

где диффузионная составляющая $\tilde{y}(T)$ вычисляется в соответствии со схемой Эйлера (22), если в ней заменить y_n на \tilde{y}_n , $n \geq 1$, а второй сомножитель есть пуассоновская составляющая точного решения (21). Поэтому схема (22), (23) решения СДУ (5) имеет тот же порядок сходимости, что и схема Эйлера решения СДУ без пуассоновской составляющей. Сказанное справедливо и в случае функции $g(x)$ общего вида в СДУ (5). В этом случае вторым сомножителем в (24) будет вместо экспоненты пуассоновская составляющая точного решения (7).

При использовании для диффузионной составляющей вместо (22) точной рекуррентной формулы

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n \exp\left((\alpha - \sigma^2/2)h + \sigma\sqrt{h}\eta_{n+1}\right), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (25)$$

вся схема решения (25), (23) данного СДУ также является точной. Она позволяет моделировать с произвольно большим шагом вплоть до $h = T$.

Случайные величины скачков ξ_k задаются нормальными $\xi_k \sim \mathbf{N}(m_\xi, \sigma_\xi^2)$, при этом $\mu_L = \mathbf{E}e^{L\xi_k} = e^{Lm_\xi + L^2\sigma_\xi^2/2}$, и формулы (10), (12) принимают вид:

$$m_y(t) = y_0 \exp\left((\alpha + \lambda(e^{m_\xi + \sigma_\xi^2/2} - 1))t\right), \quad (26)$$

$$D_y(t) = y_0^2 \exp\left((2\alpha + \sigma^2 + \lambda(e^{2(m_\xi + \sigma_\xi^2)} - 1))t\right) - m_y^2(t). \quad (27)$$

Ниже везде задаются: $y_0 = 1$, интервал интегрирования $T = 10$, $m_\xi = 0$ (за исключением примера 1). Математическое ожидание $m_y(t)$ и дисперсия $D_y(t)$ случайного процесса $y(t)$ вычисляются по формулам (26), (27), а среднеквадратичные отклонения оценок $\sigma_{\hat{m}_y}(t)$ и $\sigma_{\hat{D}_y}(t)$ — по формулам (15), (20) соответственно. Будем для краткости обозначать m_y вместо $m_y(10)$, D_y вместо $D_y(10)$ и т. д.

Пример 1. Исследуется зависимость точности оценок от размера ансамбля моделируемых траекторий решения в случае, когда в СДУ присутствует только пуассоновская составляющая ($\alpha = \sigma = 0$), $\lambda = 1$, величина скачков постоянная $g(\xi) = 0.3$ (формально $\xi = m_\xi = \ln 1.3$, $\sigma_\xi = 0$).

На рис. 1 приведены графики одной траектории решения СДУ и двух оценок математического ожидания $\hat{m}_y(t)$. При $N_{\text{tr}} = 100$ в конце интервала интегрирования имеем $\hat{m}_y = 19.0318$, $m_y = 20.0855$, $\sigma_{\hat{m}_y} = 2.43$. При $N_{\text{tr}} = 10^6$ оценка $\hat{m}_y(t)$ совпадает с точностью 3–4 значащие цифры со значениями $m_y(t)$, в конце интервала интегрирования имеем $\hat{m}_y = 20.0786$, $\sigma_{\hat{m}_y} = 0.0243$. Таким образом, уменьшение ошибки оценки в 100 раз требует, как и следует из формулы (15), увеличения размера ансамбля траекторий в 10^4 раз. Для дисперсии при $N_{\text{tr}} = 10^6$ имеем $\hat{D}_y = 582.27$, $D_y = 588.85$, $\sigma_{\hat{D}_y} = 10.195$. Результаты в конце интервала T одинаковы при любом размере шага интегрирования.

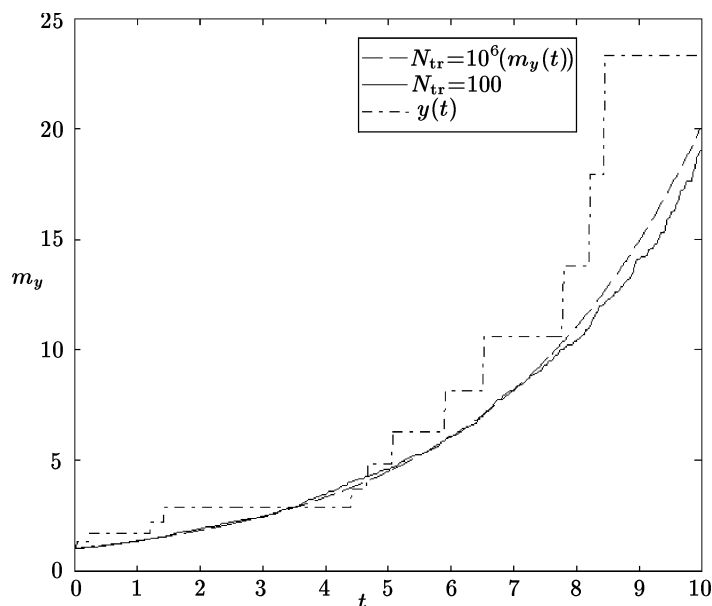


Рис. 1. Траектория $y(t)$ и оценки математического ожидания при различных размерах ансамбля моделируемых траекторий решения СДУ (5) (оценка при $N_{\text{tr}} = 10^6$ визуально совпадает с точным математическим ожиданием $m_y(t)$)

Пример 2. Исследуется зависимость точности оценок от величины шага интегрирования разностной схемы (22), (23) и размера ансамбля моделируемых траекторий решения СДУ с винеровской и пуассоновской составляющими. Значения параметров СДУ: $\alpha = 0.2$, $\sigma = 0.15$, $\lambda = 1$, $\sigma_\xi = 0.35$.

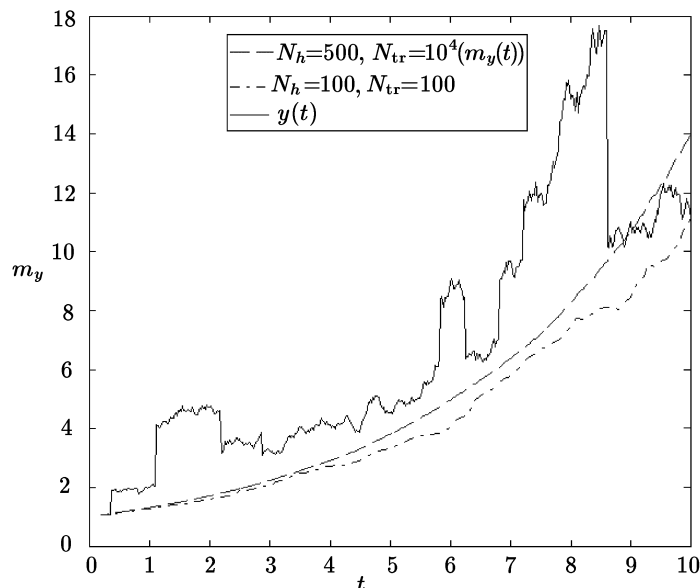


Рис. 2. Траектория $y(t)$ и оценки математического ожидания при различных размерах шага интегрирования и ансамбля моделируемых траекторий решения СДУ (5) на основе численной схемы (22), (23)

На рис. 2 приведены графики одной траектории точного решения СДУ и двух оценок математического ожидания $\tilde{m}_y(t)$ решения СДУ по разностной схеме. В варианте с низкой точностью оценки задавались количество шагов $N_h = T/h = 100$ и $N_{\text{tr}} = 100$,

в конце интервала интегрирования получено $\tilde{m}_y = 11.143$ при точном значении математического ожидания $m_y = 13.89663$. В варианте с высокой точностью оценки $N_h = 500$ и $N_{tr} = 10^4$ график оценки $\tilde{m}_y(t)$ визуальнo совпадает с графиком точного математического ожидания $m_y(t)$, в конце интервала интегрирования имеем $\tilde{m}_y = 13.930$, оценку по точной схеме (25), (23) $\hat{m}_y = 13.985$, среднеквадратичное отклонение оценки $\sigma_{\hat{m}_y} = 0.301$. Трудоемкость вычислений в варианте с высокой точностью увеличивается по сравнению с вариантом с низкой точностью в 500 раз.

Для СДУ с указанными выше значениями параметров на рис. 3 приведены графики оценок дисперсии решения по разностной схеме $\tilde{D}_y(t)$. При $N_{tr} \leq 10^4$ точность оценок дисперсии остается низкой при любом шаге интегрирования разностной схемы или замене ее на точную схему решения СДУ. В варианте с высокой точностью оценки при $N_h = 500$, $N_{tr} = 10^7$ в конце интервала интегрирования имеем $\tilde{D}_y = 891.05$, $\hat{D}_y = 900.06$, $D_y = 904.85$, $\sigma_{\hat{D}_y} = 139.50$. Заметим, что при моделировании по точной схеме с одним шагом $h = T$ и $N_{tr} = 10^9$ имеем $\hat{m}_y = 13.89754$, $\sigma_{\hat{m}_y} = 0.00095$, $\hat{D}_y = 906.26$, $\sigma_{\hat{D}_y} = 13.95$.

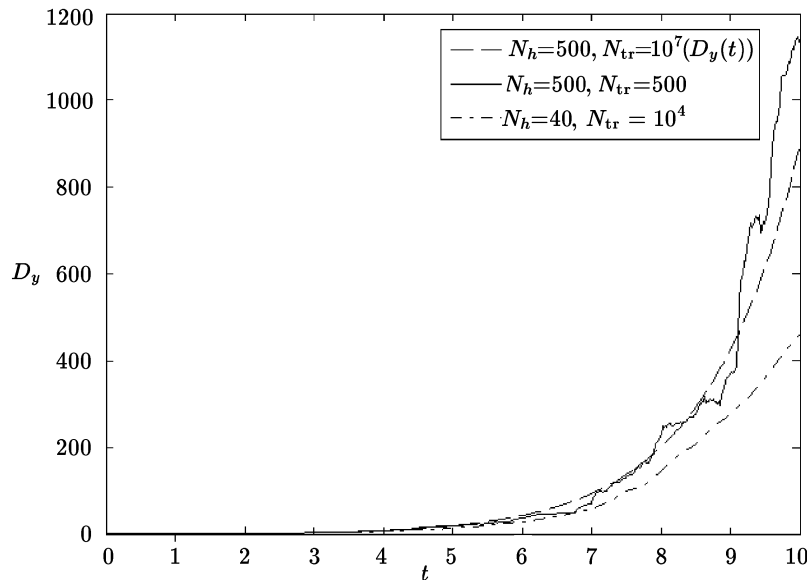


Рис. 3. Оценки дисперсии при различных размерах шага интегрирования и ансамбля моделируемых траекторий решения СДУ (5) на основе численной схемы (22), (23)

Пример 3. Исследуется зависимость точности оценок математического ожидания решения СДУ от величины параметра интенсивности λ . Значения параметров СДУ: $\alpha = 0.2$, $\sigma = 0.15$, $\sigma_\xi = 0.35$, число шагов интегрирования разностной схемы $N_h = 500$.

На рис. 4 приведены графики оценок $\tilde{m}_y(t)$ при двух значениях параметра: $\lambda = 1$ и $\lambda = 3$. Вариант с $\lambda = 1$, $N_{tr} = 10^4$ тот же, что и в примере 2, относительная ошибка оценки в конце интервала интегрирования $\varepsilon_{\tilde{m}_y} = \sigma_{\tilde{m}_y}/m_y = 0.0216$. Однако при $\lambda = 3$, как видно из рис. 4, размер ансамбля траекторий 10^4 уже не обеспечивает такую точность оценки. Она достигается, согласно формуле (17), при $N_{tr} \approx 2.5 \cdot 10^5$, т. е. при увеличении трудоемкости вычислений в 25 раз. В этом случае в конце интервала интегрирования имеем: $\tilde{m}_y = 50.24$, $\hat{m}_y = 50.44$, $m_y = 49.15$.

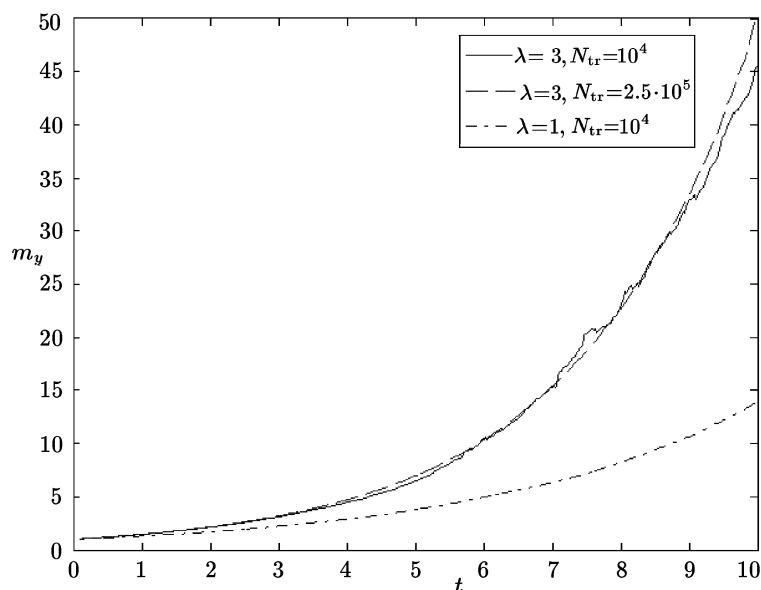


Рис. 4. Оценки математического ожидания решения СДУ (5) на основе численной схемы (22), (23) при различных значениях параметра λ

Пример 4. Исследуется зависимость точности оценок математического ожидания решения СДУ от дисперсии величины скачка σ_ξ^2 . Значения параметров СДУ: $\alpha = -0.1$, $\sigma = 0.15$, $\lambda = 1$, число шагов интегрирования разностной схемы $N_h = 500$.

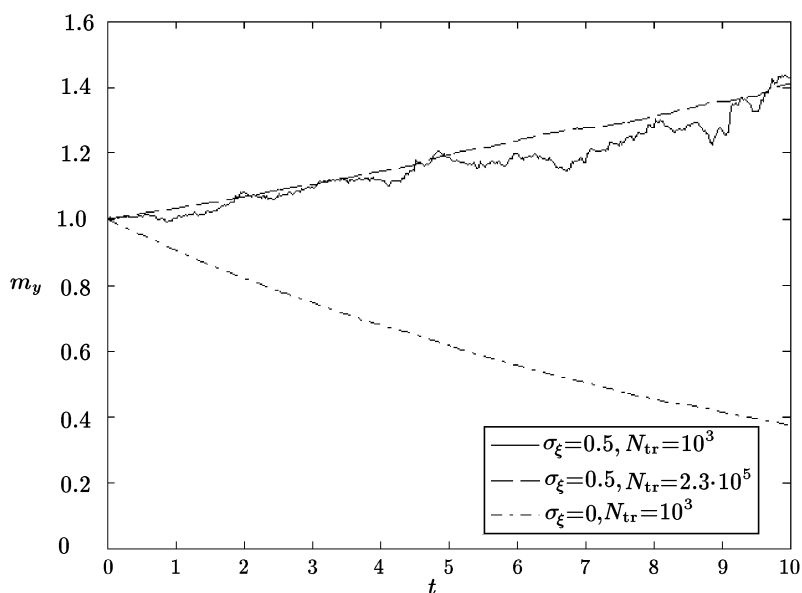


Рис. 5. Оценки математического ожидания решения СДУ (5) на основе численной схемы (22), (23) при различных значениях параметра σ_ξ

На рис. 5 приведены графики оценок $\tilde{m}_y(t)$ при значениях параметра $\sigma_\xi=0$ и $\sigma_\xi=0.5$. При $\sigma_\xi = 0$ в СДУ присутствует только винеровская составляющая, и оно является устойчивым в среднеквадратическом смысле. Достаточно высокая точность оценки математического ожидания в этом случае достигается уже при $N_{tr} = 10^3$, в конце интервала интегрирования имеем $\tilde{m}_y = 0.3750$ при $m_y = 0.3679$ и относительной ошибке оценки $\varepsilon_{\tilde{m}_y} = 0.0159$. При $\sigma_\xi = 0.5$ СДУ, в соответствии с (26), (27), становится неустойчивым,

а точность оценки, соответствующая предыдущему случаю, достигается, согласно (17), только при $N_{tr} \approx 2.3 \cdot 10^5$, т. е. при увеличении трудоемкости вычислений в 230 раз. В этом случае в конце интервала интегрирования имеем $\tilde{m}_y = 1.4105$, $\hat{m}_y = 1.4117$, $m_y = 1.3930$.

Пример 5. Исследуются оценки моментов решения СДУ Ито (5) с вынужденными колебаниями:

$$dy(t) = y(t) \left((\alpha + A \sin \omega t) dt + \sigma dw(t) + \int_{\mathbf{R}} g(x) \nu(dx, dt) \right), \quad y(0) = y_0 > 0, \quad (28)$$

где $A, \omega > 0$ — амплитуда и частота вынужденных колебаний соответственно. Точное решение СДУ (28) можно получить аналогично решению СДУ (5):

$$y(t) = y_0 \exp \left(\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \frac{A}{\omega} (1 - \cos \omega t) + \sigma w(t) \right) \prod_{i=0}^{N_t} (1 + g(\xi_i)), \quad g(\xi_0) = 0. \quad (29)$$

При замене во всех приведенных выше в настоящей работе формулах выражения αt на $\alpha t + (A/\omega)(1 - \cos \omega t)$ все они будут справедливы для СДУ (28). В частности, для математического ожидания случайного процесса (29) вместо (26) получаем

$$m_y(t) = y_0 \exp \left(\alpha t + (A/\omega)(1 - \cos \omega t) + \lambda (e^{m_\xi + \sigma_\xi^2/2} - 1) t \right). \quad (30)$$

Из (30) видно, что величина λ определяет темпы роста $m_y(t)$.

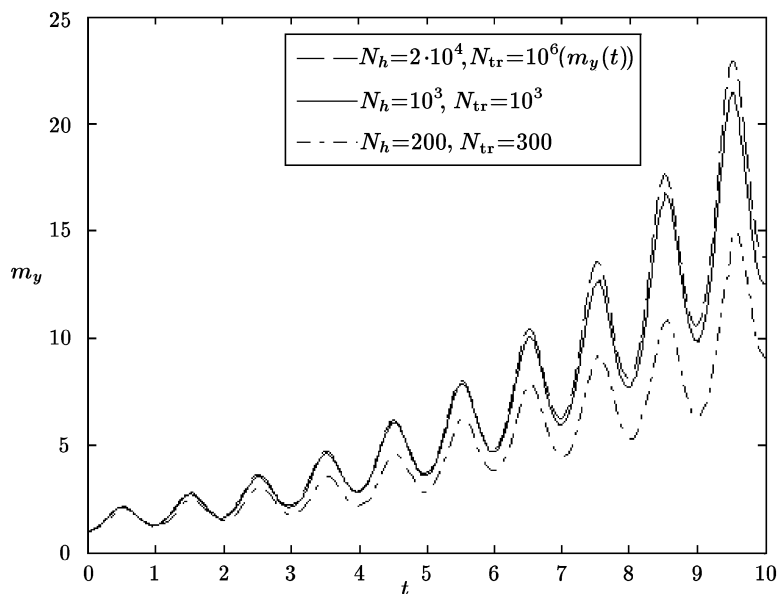


Рис. 6. Оценки математического ожидания при различных размерах шага интегрирования и ансамбля моделируемых траекторий решения СДУ (28) на основе численной схемы (3), (4)

На рис. 6 приведены графики оценок математического ожидания при различных размерах шага интегрирования и ансамбля моделируемых траекторий решения СДУ (28) при использовании разностной схемы (3), (4). Значения параметров СДУ: $\alpha = 0.2$, $\sigma = 0.15$, $\lambda = 1$, $\sigma_\xi = 0.35$, $A = 2$, $\omega = 2\pi$. Заметим, что наличие в СДУ колебаний требует для получения точной оценки использования значительно меньшего шага интегрирования метода Эйлера, чем в случае СДУ (5) (когда достаточная точность оценки достигается уже при $N_h = 200$).

На рис. 6 почти полное визуальное совпадение графиков оценки $\tilde{m}_y(t)$ и точного математического ожидания (30) достигается при $N_h = 2 \cdot 10^4$, $N_{tr} = 10^6$, в конце интервала интегрирования имеем $\tilde{m}_y = 13.816$, оценку по точной схеме $\hat{m}_y = 13.887$, точное значение $m_y = 13.897$, среднеквадратичное отклонение оценки $\sigma_{\hat{m}_y} = 0.030$. В этом случае по сравнению с неточной оценкой ($N_h = 10^3$, $N_{tr} = 10^3$) трудоемкость вычислений увеличивается в $2 \cdot 10^4$ раз. При $N_h = 200$ и $N_h = 10^3$ смещение оценок (рис. 6) мало изменяется с увеличением размера ансамбля моделируемых траекторий.

Заключение

Для нахождения решений СДУ можно использовать различные численные методы типа метода Мильштейна и обобщенного метода Розенброка [10]. Однако эти методы требуют гораздо больше вычислений на шаге интегрирования, чем обобщенный явный метод Эйлера и, кроме того, для них необходимо вычислять производные от функции сноса или матрицы диффузии, что затруднительно для многомерных систем СДУ со многими шумами или, когда функции сноса или диффузии — разрывные. В связи с этим для расчетов рекомендуется использовать наименее трудоемкий обобщенный явный метод Эйлера.

При использовании алгоритмов ММК (метода Монте-Карло) обычно применяются методы уменьшения трудоемкости вычислений: выборка по важности, метод математических ожиданий, метод расщепления и др. В настоящей работе не обсуждались вопросы уменьшения трудоемкости алгоритмов ММК, хотя при численном решении стохастических систем параболических дифференциальных уравнений (типа уравнений Навье–Стокса), когда приходится моделировать решения систем СДУ с десятками тысяч уравнений, такие проблемы естественно возникнут, особенно относительно межъядерного обмена данными вычислений.

При численном решении СДУ с пуассоновской составляющей на равномерной временной сетке необходимо учитывать точное число скачков на каждом шаге интегрирования. Размер ансамбля моделируемых траекторий, необходимый для достижения заданной точности оценки математического ожидания решения, можно оценить по формулам (15), (17).

Наиболее интересный вывод, который можно сделать по результатам проведенных исследований, заключается в том, что пуассоновская составляющая влияет, в отличие от винеровской, на математическое ожидание решения СДУ, в частности, на его темп роста.

Проведенные численные эксперименты показали, что наличие в СДУ пуассоновской составляющей, особенно с частыми скачками большой величины, значительно ухудшает точность оценок математического ожидания и дисперсии решения СДУ и требует для достижения удовлетворительной точности оценок уменьшения величины шага интегрирования метода Эйлера и увеличения размера ансамбля моделируемых траекторий на несколько порядков. А это означает, что при численном решении больших систем СДУ с винеровской и пуассоновской составляющими возникнет необходимость использования для вычислений суперкомпьютеров с параллельными программами. Отметим, что эффективность распараллеливания таких алгоритмов, когда одна траектория решения СДУ моделируется на одном ядре кластера, близка к 100%, так как в процессе счета нет межъядерных обменов и окончательные оценки формируются только при достижении конца интервала интегрирования всеми моделируемыми траекториями.

Литература

1. **Артемьев С.С., Корнеев В.Д.** Численное решение стохастических дифференциальных уравнений на суперкомпьютерах // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2011. — Т. 14, № 1. — С. 5–17.
2. **Артемьев С.С., Иванов А.А., Корнеев В.Д.** Численный анализ стохастических осцилляторов на суперкомпьютерах // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2012. — Т. 15, № 1. — С. 31–43.
3. **Артемьев С.С., Корнеев В.Д., Якунин М.А.** Численное решение стохастических дифференциальных уравнений со случайной структурой на суперкомпьютерах // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 4. — С. 303–311.
4. **Артемьев С.С., Якунин М.А.** Математическое и статистическое моделирование в финансах. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2008.
5. **Аверина Т.А., Якунин М.А.** Оценки параметров модели ценового ряда в виде решения линейного СДУ с пуассоновской составляющей // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2009. — Т. 12, № 2. — С. 121–129.
6. **Аверина Т.А.** Численное решение стохастических дифференциальных уравнений с пуассоновской составляющей // Теория и приложения статистического моделирования. — Новосибирск, 1989. — С. 81–89. — (Сб. научных статей).
7. **Гихман И.И., Скороход А.В.** Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев: Наукова думка, 1968.
8. **Hanson F.B.** Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions: Modeling, Analysis, and Computation. — SIAM Books: Advances in Design and Control Series, Order Code DC13, 2007.
9. **Privault N.** Notes on Stochastic Finance. — 2013. — <http://www.ntu.edu.sg/home/nprivault/index.html>.
10. **Артемьев С.С.** Численное решение задачи Коши для систем обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1993.

*Поступила в редакцию 29 мая 2014 г.,
в окончательном варианте 11 ноября 2014 г.*

Литература в транслитерации

1. **Artem'ev S.S., Korneev V.D.** Chislennoe reshenie stokhasticheskikh differentsial'nykh uravneniy na superkomp'yuterakh // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2011. — T. 14, № 1. — S. 5–17.
2. **Artem'ev S.S., Ivanov A.A., Korneev V.D.** Chislennyy analiz stokhasticheskikh ostillyatorov na superkomp'yuterakh // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2012. — T. 15, № 1. — S. 31–43.
3. **Artem'ev S.S., Korneev V.D., Yakunin M.A.** Chislennoe reshenie stokhasticheskikh differentsial'nykh uravneniy so sluchaynoy strukturoy na superkomp'yuterakh // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2013. — T. 16, № 4. — S. 303–311.
4. **Artem'ev S.S., Yakunin M.A.** Matematicheskoe i statisticheskoe modelirovanie v finansakh. — Novosibirsk: Izd-vo IVMiMG SO RAN, 2008.
5. **Averina T.A., Yakunin M.A.** Otsenki parametrov modeli tsenovogo ryada v vide resheniya lineynogo SDU s puassonovskoy sostavlyayushchey // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2009. — T. 12, № 2. — S. 121–129.

6. **Averina T.A.** Chislennoe reshenie stokhasticheskikh differentsial'nykh uravneniy s puassonovskoy sostavlyayushchey // Teoriya i prilozheniya statisticheskogo modelirovaniya. — Novosibirsk, 1989. — S. 81–89. — (Sb. nauchnykh statey).
7. **Gikhman I.I., Skorokhod A.V.** Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya. — Kiev: Naukova dumka, 1968.
8. **Hanson F.B.** Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions: Modeling, Analysis, and Computation. — SIAM Books: Advances in Design and Control Series, Order Code DC13, 2007.
9. **Privault N.** Notes on Stochastic Finance. — 2013.
— <http://www.ntu.edu.sg/home/nprivault/index.html>.
10. **Artem'ev S.S.** Chislennoe reshenie zadachi Koshi dlya sistem obyknovennykh i stokhasticheskikh differentsial'nykh uravneniy. — Novosibirsk: Izd-vo VTs SO RAN, 1993.

