только в пространстве напряжений и смещений. Можно рассмотреть различные преобразования вариационной задачи методами, развитыми в [5, 6]. Дальнейшие ссылки на работы по применению вариационных методов к задачам разрушения и модельным представлениям содержатся в [1, 2].

Автор выражает благодарность Е. И. Шемякину за ценные замечания.

Поступила 15 X 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И.** Некоторые постановки краевых задач L-пластичности.— ПМТФ, 1979, № 2.
2. **Крамаренко В. И., Ревуженко А. Ф.** Некоторые задачи разрушения в вариационных постановках.— ФТПРПИ, 1978, № 6.
3. **Крамаренко В. И.** Развитие линии скольжения в брусе при изгибе.— ПМТФ, 1979, № 2.
4. **Prager W.** Variational principles of linear elastostatics for discontinuous displacement, strains, and stresses.— In: Recent Progress in Applied Mechanics. The F. Odqvist Volume. N. Y., 1967. Рус. пер. **В. Прагер.** Вариационные принципы линейной статической теории упругости при разрывных смещениях, деформациях и напряжениях.— Сб. пер. Механика, 1969, № 5 (117).
5. **Абовский Н. П., Андреев Н. П., Деруга А. П.** Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М., Наука, 1978.
6. **Розин Л. А.** Вариационные постановки задач для упругих систем. Л., изд. Ленингр. ун-та, 1978.

УДК 517.946

О ПРИБЛИЖЕННОМ ОПИСАНИИ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ С МАССАМИ-ОСЦИЛЛЯТОРАМИ

А. М. Хлуднев

(*Новосибирск*)

Вопросу построения приближенных уравнений для описания статических и динамических задач механики сплошной среды с периодической структурой с помощью осреднений посвящено большое число работ. Общий принцип построения таких приближений и утверждения об их сходимости сформулированы в [1—7]. Исходная задача содержит малый параметр, характеризующий размер периода. Суть метода состоит в том, что искомое решение приближается в виде суммы гладкой и быстроосциллирующей составляющих. В работе излагается метод построения приближенных уравнений для системы, описывающей колебания стержня периодической структуры с непрерывно распределенными массами-осцилляторами [8]. Система уравнений может моделировать продольное движение стержневой конструкции с прикрепленными к ней и несущими функциональную нагрузку массами. Изучается вопрос о близости приближенных решений к точному. Получена оценка сходимости.

Рассмотрим задачу о продольных колебаниях стержня периодической структуры с непрерывно распределенными массами-осцилляторами

$$u_{\varepsilon tt}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_{\varepsilon x}\right)=-\int\limits_0^\infty m(\omega)\,v_{\varepsilon tt}d\omega+f \text{ в } Q, \tag{1}$$

$$v_{\varepsilon tt}+\omega^2(v_\varepsilon-u_\varepsilon)=0 \text{ в } \{m(\omega)>0\}\times Q,$$

$u_\varepsilon=u_{\varepsilon t}=v_\varepsilon=v_{\varepsilon t}=0$ при $t=0$; $u_\varepsilon=0$ при $x=0,\ l$. Здесь $u_\varepsilon(t,$

x) и $v_\varepsilon(t, x, \omega)$ — перемещения упругого стержня и масс-осцилляторов соответственно; $m(\omega) \geqslant 0$ — плотность распределения масс-осцилляторов; ω — параметр (собственная частота); ε — малый параметр, характеризующий периодичность упругих свойств стержня; $a(s) \geqslant a_0 > 0$ — периодическая с периодом 1 функция, a_0 — постоянная; $f(t, x)$ — внешняя нагрузка; $Q = (0, l) \times (0, T)$. Предполагается, что $a \in L^\infty(E)$, E — период.

Если $m = 0$, то второе уравнение системы рассматривать не надо и все последующие рассуждения будут относиться к смешанной задаче для одномерного волнового уравнения.

Обозначим $y = x/\varepsilon$ и рассмотрим периодическую по y задачу относительно $\varphi_1(y)$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_1 - y)\right) = 0, \quad \langle\varphi_1\rangle = 0, \tag{2}$$

где $\langle\cdot\rangle$ — среднее значение функции по периоду E. Положим также $q = \langle a(1 - \varphi_{1y})\rangle$, и пусть u, v являются решением следующей задачи:

$$u_{tt} - qu_{xx} = -\int_0^\infty m(\omega)\, v_{tt}\, d\omega + f \ \text{ в } Q, \tag{3}$$

$$v_{tt} + \omega^2 v = \omega^2 u \ \text{ в } \{m(\omega) > 0\} \times Q,$$

$$u = u_t = v = v_t = 0 \text{ при } t = 0; \ u = 0 \text{ при } x = 0, \ l.$$

Основным результатом работы является доказательство утверждения о том, что решение задачи (1) при подходящих условиях сходится к решению задачи (3) при $\varepsilon \to 0$. Ниже определяется характер сходимости и формулируются точные утверждения. Сначала будет доказано существование решения задачи (1), а затем рассмотрен вопрос о построении приближенных решений и об их сходимости.

Пусть $H^k(\Omega)$ — пространство Соболева функций, суммируемых в Ω со второй степенью вместе со своими производными до порядка k, $\Omega = (0, l)$, $H_0^1(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi = 0, \ x = 0, \ l\}$. Обозначим через B_i пространство функций с нормой $\|\psi\|_{B_i}^2 = \int_0^\infty m(\omega)\,\omega^i \|\psi(\omega)\|_0^2\, d\omega, i = 0, 2$, $\|\cdot\|_k$ — норма в $H^k(\Omega)$. В дальнейшем условия на m будут обеспечивать непустоту пространств B_i. Обратимся теперь к задаче (1) и получим априорные оценки решения. Умножим второе уравнение системы (1) на v_ε' скалярно в $L^2(\Omega)$ (производную по t обозначим штрихом)

$$\frac{d}{dt}\left(\|v_\varepsilon'(t)\|_0^2 + \omega^2\|v_\varepsilon(t)\|_0^2\right) = 2\omega^2\left(u_\varepsilon(t), v_\varepsilon'(t)\right).$$

Учитывая соотношение $(u_\varepsilon(\tau), v_\varepsilon(\tau))_\tau = (u_\varepsilon'(\tau), v_\varepsilon(\tau)) + (u_\varepsilon(\tau), v_\varepsilon'(\tau))$ и используя неравенства Коши и Юнга, отсюда выводим

$$\|v_\varepsilon'(t)\|_0^2 + \omega^2\|v_\varepsilon(t)\|_0^2 \leqslant c_0\omega^2\left\{\|u_\varepsilon(t)\|_0^2 + \int_0^t \left(\|u_\varepsilon'(\tau)\|_0^2 + \|u_\varepsilon(\tau)\|_0^2\right) d\tau\right\}, \tag{4}$$

где постоянная c_0 зависит только от T. Зависимость функции v_ε от параметра ω здесь не указываем. Заметим теперь, что с учетом второго уравнения системы (1) первое можно записать в виде

$$L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv u_\varepsilon'' - \frac{\partial}{\partial x}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_{\varepsilon x}\right) + \alpha u_\varepsilon = \int_0^\infty m\omega^2 v_\varepsilon\, d\omega + f, \ \alpha = \int_0^\infty m\omega^2\, d\omega. \tag{5}$$

Пока предполагаем, что все возникающие нормы конечны, а интегралы по ω сходящиеся. Умножим (5) на u'_ε, оценим члены в правой части по неравенству Коши и воспользуемся (4). Тогда придем к неравенству типа Гронуолла. Его интегрирование дает

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\{\|u'_\varepsilon(t)\|_0^2+\|u_\varepsilon(t)\|_1^2\}\leqslant c_1, \tag{6}$$

c_1 зависит от m, a_0, T, f. Если теперь умножить (4) на m и проинтегрировать по ω от 0 до ∞, то будем иметь

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\{\|v'_\varepsilon(t)\|_{B_0}^2+\|v_\varepsilon(t)\|_{B_2}^2\}\leqslant c_2. \tag{7}$$

Лемма 1. Пусть $m(\omega)$, $m(\omega)\omega^2\in L^1(0,\ \infty)$; $f\in L^2(Q)$. Тогда существует единственное решение задачи (1), причем

$u_\varepsilon\in L^\infty(0,\ T;\ H_0^1(\Omega))$, $u_{\varepsilon t}\in L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega))$, $v_\varepsilon\in L^\infty(0,\ T;\ B_2)$, $v_{\varepsilon t}\in$ $\in L^\infty(0, T;\ B_0)$.

Для доказательства существования выберем базис $\{\psi_j\}(j=1,\ 2,\ 3,\ldots)$ в пространстве $H_0^1(\Omega)$ и будем искать приближения Галеркина в виде

$$u_{\varepsilon n}(t)=\sum_{i=1}^n q_{in}(t)\,\psi_i,\quad v_{\varepsilon n}(t)=\sum_{i=1}^n p_{in}(t,\omega)\,\psi_i.$$

Функции q_{in} и p_{in} удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left(u'_{\varepsilon n},\psi_j\right)+\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_{\varepsilon nx},\psi_{jx}\right)+\alpha\,(u_{\varepsilon n},\psi_j)=\int_0^\infty m\omega^2\,(v_{\varepsilon n},\psi_j)\,d\omega+(f,\psi_j),$$

$$\left(v'_{\varepsilon n}+\omega^2\,(v_{\varepsilon n}-u_{\varepsilon n}),\psi_j\right)=0,\quad 1\leqslant j\leqslant n,$$

$$u_{\varepsilon n}(0)=u'_{\varepsilon n}(0)=v_{\varepsilon n}(0)=v'_{\varepsilon n}(0)=0.$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$— скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. Для $u_{\varepsilon n}$ и $v_{\varepsilon n}$ справедливы оценки (6), (7), так как умножение второго уравнения (1) и (5) на v'_ε и u'_ε соответственно можно воспроизвести для приближенных решений. При этом постоянные c_1 и c_2 можно выбрать не зависящими от n. Это будет гарантировать разрешимость приближенных уравнений на $[0,\ T]$. Подробно вопрос о построении галеркинских приближений в близкой ситуации рассмотрен в [9]. Согласно оценкам (6), (7), существует подпоследовательность $u_{\varepsilon s}$, $v_{\varepsilon s}$ такая, что при $s\to\infty$ $u_{\varepsilon s}\to u_\varepsilon$, $u'_{\varepsilon s}\to u'_\varepsilon$, $v_{\varepsilon s}\to v_\varepsilon$, $v'_{\varepsilon s}\to v'_\varepsilon$ $*$-слабо в $L^\infty(0,\ T;\ H_0^1(\Omega))$, $L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega))$, $L^\infty(0,\ T;\ B_2)$, $L^\infty(0,\ T;\ B_0)$ соответственно. Предельные функции u_ε и v_ε будут удовлетворять (5) и второму уравнению системы (1) в смысле интегральных тождеств.

В силу линейности задачи доказательство единственности проводится обычным образом для разности двух возможных решений.

Для того чтобы получить более высокую гладкость решения, необходимо налагать дополнительные условия на функцию $a(s)$. В приложениях, как правило, $a(s)$ является разрывной функцией, и поэтому требование $a\in L^\infty(E)$ является естественным. Из полученных оценок, в частности, следует, что усилия в стержне $\sigma_\varepsilon=au_{\varepsilon x}$ ограничены в $L^2(Q)$ (a — модуль Юнга). Что касается ускорений $u_{\varepsilon tt}$, то они ограничены лишь в пространстве $L^\infty(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega))$, $H^{-1}(\Omega)$ — сопряженное к $H_0^1(\Omega)$. Однако для задачи (3), где $q > 0$ — постоянная, имеет место оценка u_{tt} в более гладких классах. А именно положим $\|\psi\|^2_{F_i} = \int\limits_0^\infty m\omega^i \|\psi(\omega)\|^2_i d\omega$, $i = 0, 2$.

Л е м м а 2. Пусть в условиях леммы 1 $f \in L^2(0, T; H^1_0(\Omega))$. Тогда для решения задачи (3) имеют место включения

$$u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty(0, T; H^1_0(\Omega)),$$
$$v \in L^\infty(0, T; F_2), \; v_t \in L^\infty(0, T; F_0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим уравнение для u, v, аналогичное(5), и умножим его на u'_{xx}. Умножим также второе уравнение системы (3) на v'_{xx}. Учитывая равенство $(f(t), u'_{xx}(t)) = -(f_x(t), u'_x(t))$, замечаем, что эти два соотношения полностью аналогичны тем, которые применялись при выводе (6), (7) и формально могут быть получены из них. Для чего в (4) норму в $L^2(\Omega)$ всюду следует заменить на норму в $H^1_0(\Omega)$ и т.д. Отличие состоит лишь в том, что теперь гладкость по x на единицу выше. Тем самым получаем оценки, подобные (6), (7):

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \{\|u'_x(t)\|^2_0 + \|u_{xx}(t)\|^2_0\} \leqslant \bar{c}_1, \quad \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \{\|v'_x(t)\|^2_{B_0} + \|v_x(t)\|^2_{B_2}\} \leqslant \bar{c}_2.$$

Постоянные $\bar{c}_i$ зависят от m, q, T, f. Отсюда следует $u_{xx} \in L^2(Q)$, и поэтому из равенства вида (5) имеем включение $u_{tt} \in L^2(Q)$.

Подобным образом можно изучать вопрос о дальнейшем повышении гладкости решения.

Построим теперь приближенное решение задачи (1) и докажем утверждение о его сходимости. Положим

$$\begin{aligned} \bar{u}_\varepsilon &= u + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2, \\ u &= u(t, x), \; w_1 = u - \varphi_1(y) u_x, \; w_2 = u - \varphi_1(y) u_x + \\ &+ \varphi_2(y) u_{xx}. \end{aligned} \tag{8}$$

Периодическая по y функция φ_2 определяется как решение задачи $(a\varphi_{2y})_y = (a\varphi_1)_y$, $\langle \varphi_2 \rangle = 0$, которая так же, как и (2), имеет единственное решение в пространстве $H^1(E)$ периодических по y функций, причем $\max\limits_{\bar{E}} |\varphi_i| \leqslant c\|\varphi_i\|_1$ $(i = 1, 2)$, c не зависит от ε. Отметим теперь тождество

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x}\right) = \varepsilon^{-2} A_2 + \varepsilon^{-1} A_1 + \varepsilon^0 A_0,$$

$$A_2 = -\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad A_1 = -\frac{\partial}{\partial x}\left(a(y)\frac{\partial}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad A_0 = -a(y)\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

С учетом этого разложения подставим $\bar{u}_\varepsilon$ в (5) и определим u, v из уравнений

$$L_\varepsilon \bar{u}_\varepsilon = f + \int\limits_0^\infty m\omega^2 v \, d\omega + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2, \quad v_{tt} + \omega^2(v - u) = 0$$

с нулевыми начальными и граничными условиями. Здесь

$$h_1 = \alpha w_1 + w_{1tt} + A_1 w_2 + A_0 w_1, \quad h_2 = \alpha w_2 + w_{2tt} + A_0 w_2.$$

В этих равенствах переменные x и y следует рассматривать как независимые. Тогда для $\bar{e}_\varepsilon = u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon$ и $d_\varepsilon = v_\varepsilon - v$ получим

$$L_\varepsilon \bar{e}_\varepsilon = \int\limits_0^\infty m\omega^2 d_\varepsilon d\omega - \varepsilon h_1 - \varepsilon^2 h_2,$$

$$d_{\varepsilon tt} + \omega^2(d_\varepsilon - \bar{e}_\varepsilon - \varepsilon\lambda_\varepsilon) = 0,\ \lambda_\varepsilon = w_1 + \varepsilon w_2.$$

Заметим при этом, что начальные данные для $\bar{e}_\varepsilon$ и $-\varepsilon\lambda_\varepsilon$ нулевые, а граничные условия совпадают.

Т е о р е м а. Пусть выполнены условия леммы 1 и, кроме того, $u \in H^5(Q)$, $m\omega^4 \in L^1(0, \infty)$. Тогда

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \{\|u_\varepsilon(t) - \bar{u}_\varepsilon(t)\|_1 + \|u_{\varepsilon t}(t) - u_t(t)\|_0\} \leqslant c_3\varepsilon^{1/2},$$
(9)
$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \{\|v_\varepsilon(t) - v(t)\|_{B_2} + \|v_{\varepsilon t}(t) - v_t(t)\|_{B_0}\} \leqslant c_4\varepsilon^{1/2}.$$

Постоянные c_3 и c_4 не зависят от ε.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\bar{\Lambda}_\varepsilon$ продолжение функции λ_ε с границы $\{t = 0\} \cup \{x = 0,\ l\}$ в область Q такое, что $\|\bar{\Lambda}_\varepsilon\|_3 \leqslant c_5$, c_5 не зависит от ε для всех $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Это возможно в силу указанной оценки на $|\varphi_i|$ и имеющейся гладкости функции u. Положим $\Lambda_\varepsilon = \lambda_\varepsilon - \bar{\Lambda}_\varepsilon$. Тогда для $e_\varepsilon = \bar{e}_\varepsilon + \varepsilon\bar{\Lambda}_\varepsilon$ и d_ε получим задачу с однородными условиями

(10) $$L_\varepsilon e_\varepsilon = \int\limits_0^\infty m\omega^2 d_\varepsilon d\omega - \varepsilon h_1 - \varepsilon^2 h_2 + \varepsilon L_\varepsilon \bar{\Lambda}_\varepsilon,$$

$$d_{\varepsilon tt} + \omega^2(d_\varepsilon - e_\varepsilon - \varepsilon\Lambda_\varepsilon) = 0,$$

$e_\varepsilon = e_{\varepsilon t} = d_\varepsilon = d_{\varepsilon t} = 0$ при $t = 0$; $e_\varepsilon = 0$ при $x = 0,\ l$. Так как $a \in L^\infty(E)$, то правая часть первого уравнения здесь вместе со своей первой производной по t принадлежит пространству $L^\infty(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega))$. Следовательно, для $t \in [0,\ T]$ имеет место оценка [10]

(11) $$\|e_{\varepsilon t}(t)\|_{-1}^2 + \|e_\varepsilon(t)\|_0^2 \leqslant c_6\varepsilon \int\limits_0^t \|h_1 + \varepsilon h_2 - L_\varepsilon\bar{\Lambda}_\varepsilon\|_{-1}^2 d\tau + $$
$$+ c_7\varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty m\omega^2 \|d_\varepsilon\|_{-1}^2 d\omega d\tau.$$

Однако из второго уравнения системы (10) подобно (4) можно получить

(12) $$\|d_{\varepsilon t}(t)\|_{-1}^2 + \omega^2\|d_\varepsilon(t)\|_{-1}^2 \leqslant c_0\omega^2 \Big(\|e_\varepsilon(t) + \varepsilon\Lambda_\varepsilon(t)\|_{-1}^2 + $$
$$+ \int\limits_0^t (\|e_\varepsilon(\tau) + \varepsilon\Lambda_\varepsilon(\tau)\|_{-1}^2 + \|e_{\varepsilon\tau}(\tau) + \varepsilon\Lambda_{\varepsilon\tau}(\tau)\|_{-1}^2)\, d\tau\Big).$$

Поэтому отсюда и из (11) в силу леммы Гронуолла будем иметь

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \{\|e_{\varepsilon t}(t)\|_{-1}^2 + \|e_\varepsilon(t)\|_0^2\} \leqslant c_8\varepsilon.$$

Аналогично, дифференцируя по t первое уравнение системы (10), можно показать

(13) $$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \{\|e_{\varepsilon tt}(t)\|_{-1}^2 + \|e_{\varepsilon t}(t)\|_0^2\} \leqslant c_9\varepsilon.$$

Из (12) при этом после умножения на m и интегрирования по ω от 0 до ∞ получим

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|d_\varepsilon(t)\|^2_{E_2}\leqslant c_{10}\varepsilon,\quad \|\psi\|^2_{E_2}=\int_0^\infty m\omega^2\|\psi(\omega)\|^2_{-1}d\omega. \tag{14}$$

Так как оператор $-\frac{\partial}{\partial x}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x}\right)$ осуществляет взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное отображение между $H_0^1(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$ с соответствующей оценкой, то из (13), (14) и первого уравнения системы (10) получаем

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|e_\varepsilon(t)\|_1^2\leqslant c_{11}\varepsilon.$$

Отсюда с учетом (13) и соотношения вида (4) для d_ε следует второе неравенство (9).

Теорема доказана. Таким образом, установлена сходимость в форме (9) решения задачи (1) к решению задачи (3) при $\varepsilon\to 0$. Тем самым доказана возможность аппроксимации решения задачи о колебаниях стержня периодической структуры задачей о колебаниях однородного стержня. Физический параметр последнего q находится с помощью указанной в работе процедуры. Отметим также, что приближенный анализ некоторых задач для уравнений (3) проводился в работе [8]. Полученные в этой работе решения могут быть использованы в формуле (8) для построения приближения $\bar{u}_\varepsilon$ задачи (1).

Поступила 4 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бахвалов Н. С.** Осредненные характеристики тел с периодической структурой.— ДАН СССР, 1974, т. 218, № 5.
2. **Бахвалов Н. С.** Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами.— ДАН СССР, 1975, т. 221, № 3.
3. **Победря Б. Е., Горбачев В. И.** О статических задачах упругих композитов.— Вестн. Моск. ун-та. Математика и механика, 1977, № 5.
4. **Бердичевский В. Л.** Об осреднении периодических структур.— ПММ, т. 41, № 6.
5. **Bensoussan A., Lions J.—L., Papanicolaou G.** Sur quelques phenomenes asymptotiques stationnaires.— C. R. Acad. Sci. Paris, 1975, t. 281, ser. A, p. 89.
6. **Bensoussan A., Lions J.—L., Papanicolaou G.** Sur quelques phenomenes asymptotiques d'evolution.— C. R. Acad. Sci. Paris, 1975, t. 281, ser. A, p. 317.
7. **Bensoussan A., Lions J.—L., Papanicolaou G.** Sur de nouveaux problemes asymptotiques.— C. R. Acad. Sci. Paris, 1976, t. 282, ser. A, p. 143.
8. **Пальмов В. А.** Об одной модели среды сложной структуры.— ПММ, 1969, т. 33, № 4.
9. **Хлуднев А. М.** О разрешимости начально-краевой задачи для одного класса квазилинейных систем.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 28. Новосибирск, 1977.
10. **Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.** Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М., Мир, 1971.