УДК 539.3

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ КАСАТЕЛЬНЫХ СМЕЩЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ КОНТАКТА

И. И. Аргатов

Государственная морская академия им. С. О. Макарова, 199026 Санкт-Петербург

Рассмотрена конструкционно-нелинейная контактная задача для штампа в форме параболоида вращения. Уравнение для определения плотности контактных давлений составлено с учетом радиальных касательных смещений точек границы упругого полупространства. Предложен метод построения приближенного решения в замкнутой форме. Сформулирован ряд выводов о влиянии эффекта касательных смещений на основные параметры контакта.

Ключевые слова: контактная задача, штамп, контактное давление, приближенное решение.

1. Уточненная постановка контактной задачи. Рассмотрим упругое полупространство $z \geqslant 0$, на поверхность которого давит штамп в форме тела вращения. Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z), уравнение поверхности штампа (до его нагружения) запишем в виде

$$z = -\Phi(r).$$

Для простоты будем считать, что штамп занимает выпуклую область $z \leqslant -\Phi(r)$ и касается плоскости $z = 0$ в единственной точке, выбранной в качестве начала координат.

Обозначим через δ_0 величину вертикального перемещения штампа. Тогда условие непроникновения точек поверхности упругого тела в штамп записывается следующим образом [1] (см. также [2]):

$$u_z(r, \varphi, 0) - \delta_0 + \Phi(r + u_r(r, \varphi, 0)) \geqslant 0. \tag{1.1}$$

Равенство в соотношении (1.1) определяет область контакта ω. Вследствие осевой симметрии и ограничения на форму штампа площадка ω представляет собой круг, радиус которого обозначим через a. Таким образом, внутри области контакта ω имеет место уравнение

$$u_z - \delta_0 + \Phi(r + u_r) = 0 \qquad (r \leqslant a), \tag{1.2}$$

причем смещения u_z и u_r зависят только от радиуса r.

Предположим, что смещение u_r мало по сравнению с радиусом площадки контакта ω. Тогда нелинейное в общем случае уравнение (1.2) можно заменить следующим линеаризованным [1] уравнением:

$$u_z - \delta_0 + \Phi(r) + \Phi'(r) u_r = 0 \qquad (r \leqslant a). \tag{1.3}$$

Здесь и далее штрих обозначает операцию дифференцирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства промышленности, науки и технологий Российской Федерации (грант Президента Российской Федерации № МД-182.2003.01).

В частном случае штампа в форме параболоида вращения

$$\Phi(r) = r^2/(2R_0)$$

(R_0 — радиус кривизны поверхности штампа в его вершине) уравнение (1.3) принимает вид

$$u_z(r) + r u_r(r)/R_0 = \delta_0 - r^2/(2R_0) \qquad (r \leqslant a). \tag{1.4}$$

Выразив смещения $u_z(r)$ и $u_r(r)$ через контактное давление $p(r)$ согласно решению задачи Буссинеска (см., например, [3]), условие совместности перемещений (1.4) запишем в форме [4]

$$\iint\limits_{\omega} \frac{p(\rho)\,d\sigma}{R(r;\rho,\varphi)} - \frac{\alpha r}{2R_0} \iint\limits_{\omega} \frac{r-\rho\cos\varphi}{R(r;\rho,\varphi)^2}\, p(\rho)\,d\sigma = \frac{\pi E}{1-\nu^2}\Big(\delta_0 - \frac{r^2}{2R_0}\Big). \tag{1.5}$$

Здесь $d\sigma = \rho\,d\rho\,d\varphi$ — элемент площади; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; $R(r;\rho,\varphi) = (r^2+\rho^2-2r\rho\cos\varphi)^{1/2}$; $\alpha = (1-2\nu)/(1-\nu)$.

Уравнение (1.5) используется для нахождения плотности $p(r)$ контактных давлений. При этом радиус a площадки контакта определяется из условия положительности контактных давлений и обращения их в нуль на краю площадки контакта:

$$p(r) \geqslant 0 \quad (r \leqslant a), \qquad p(a) = 0. \tag{1.6}$$

В работах [1, 4] получено численное решение рассматриваемой задачи. Двумерная контактная задача в уточненной постановке аналитическим методом исследовалась в работах [5, 6]. Подобные (1.4) линеаризованные условия контакта для моделей пластин и оболочек рассмотрены в [7, § 2.3]. В настоящей работе предлагается метод получения приближенного решения уравнения (1.5) в замкнутой форме.

2. Уравнение для определения радиуса площадки контакта. С помощью формулы (3.613.2) из [8] находим

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{a} \frac{r-\rho\cos\varphi}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\varphi}\, p(\rho)\rho\,d\rho\,d\varphi = \frac{2\pi}{r}\int\limits_0^{r} p(\rho)\rho\,d\rho. \tag{2.1}$$

С учетом данного равенства уравнение (1.5) преобразуется к виду

$$\iint\limits_{\omega} \frac{p(\rho)\,d\sigma}{R(r;\rho,\varphi)} = u(r); \tag{2.2}$$

$$u(r) = \frac{\pi E}{1-\nu^2}\Big(\delta_0 - \frac{r^2}{2R_0}\Big) + \frac{\pi\alpha}{R_0}\int\limits_0^{r} p(\rho)\rho\,d\rho. \tag{2.3}$$

Используем общее решение интегрального уравнения (2.2), полученное в работах [9–11]:

$$p(r) = \frac{F(a)}{\pi\sqrt{a^2-r^2}} - \frac{1}{\pi}\int\limits_r^{a} \frac{F'(s)}{\sqrt{s^2-r^2}}\,ds; \tag{2.4}$$

$$\pi F(r) = u(0) + r\int\limits_0^{r} \frac{u'(t)}{\sqrt{r^2-t^2}}\,dt. \tag{2.5}$$

Из условия (1.6) обращения в нуль контактных давлений на краю площадки контакта выводим равенство $F(a)=0$. Согласно (2.3) и (2.5) имеем

$$\delta_0 = \frac{a^2}{R_0} - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{ER_0}\, a\int\limits_0^a \frac{p(t)t}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt. \tag{2.6}$$

При этом формула (2.4) принимает вид

$$p(r) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_r^a \frac{F'(s)}{\sqrt{s^2-r^2}}\,ds. \tag{2.7}$$

Уравнение (2.6) используется для определения искомого радиуса площадки контакта по заданному значению δ_0 перемещения штампа.

3. Вычисление силы, прижимающей штамп к поверхности упругого тела. Обозначим через P величину равнодействующей контактных давлений:

$$P = 2\pi\int\limits_0^a p(\rho)\rho\,d\rho. \tag{3.1}$$

Подставляя выражение (2.7) в равенство (3.1), получим следующее уравнение [11]:

$$P = 2\int\limits_0^a F(s)\,ds. \tag{3.2}$$

Подставив в уравнение (3.2) выражение для функции $F(s)$, определяемое формулой (2.5), согласно (2.3) имеем

$$u(0) = \frac{\pi E}{1-\nu^2}\,\delta_0, \qquad u'(t) = \frac{\pi\alpha}{R_0}\,p(t)t - \frac{\pi E}{1-\nu^2}\,\frac{t}{R_0}.$$

Тем самым уравнение (3.2) после вычисления определенных интегралов принимает вид

$$P = \frac{2E}{1-\nu^2}\Bigl(a\delta_0 - \frac{a^3}{3R_0}\Bigr) + \frac{2\alpha}{R_0}\int\limits_0^a\int\limits_0^s \frac{p(t)ts}{\sqrt{s^2-t^2}}\,dt\,ds.$$

Изменяя порядок интегрирования в повторном интеграле, находим

$$P = \frac{2E}{1-\nu^2}\Bigl(a\delta_0 - \frac{a^3}{3R_0} + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{ER_0}\int\limits_0^a p(t)\sqrt{a^2-t^2}\,t\,dt\Bigr).$$

С учетом выражения для величины δ_0 (2.6) окончательно получаем

$$P = \frac{4E}{3(1-\nu^2)}\,\frac{a^3}{R_0} - \frac{2\alpha}{R_0}\int\limits_0^a \frac{p(t)t^3}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt. \tag{3.3}$$

Заметим, что уравнение (3.3) может быть выведено непосредственно из уравнения (2.2) при учете (2.3) с использованием теоремы Моссаковского [12].

4. Максимальное значение контактного давления. Из формулы (2.7) находим следующее выражение для максимума контактных давлений (в центре площадки контакта):

$$p(0) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^a \frac{F'(s)}{s}\,ds. \tag{4.1}$$

Дифференцируя выражение (2.5), находим

$$\pi F'(r) = \int\limits_0^r \frac{u'(t) + tu''(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}}\, dt.$$

Подставляя данное выражение в формулу (4.1), получаем

$$-\pi^2 p(0) = \int\limits_0^a \frac{ds}{s} \int\limits_0^s \frac{u'(t) + tu''(t)}{\sqrt{s^2 - t^2}}\, dt.$$

Изменяя порядок интегрирования, получаем

$$-\pi^2 p(0) = \int\limits_0^a \Big(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{t}{a}\Big)[u'(t) + tu''(t)]\,\frac{dt}{t}.$$

Наконец, интегрируя по частям, находим

$$-\pi^2 p(0) = \int\limits_0^a \Big(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{t}{a}\Big)\frac{u'(t)}{t}\, dt + \int\limits_0^a \frac{u'(t)\, dt}{\sqrt{a^2 - t^2}}. \tag{4.2}$$

Формула (4.2) получена в предположении $u'(0) = 0$.

Дифференцируя выражение (2.5) с учетом (2.3), находим

$$\frac{F'(s)}{s} = -\frac{2E}{(1 - \nu^2)R_0} + \frac{\alpha}{R_0 s}\Big(2\int\limits_0^s \frac{p(t)t}{\sqrt{s^2 - t^2}}\, dt + \int\limits_0^s \frac{p'(t)t^2}{\sqrt{s^2 - t^2}}\, dt\Big).$$

Изменяя порядок интегрирования по частям, получаем

$$\int\limits_0^a \int\limits_0^s \frac{p(t)t}{s\sqrt{s^2 - t^2}}\, dt\, ds = \int\limits_0^a p(t)\arccos\frac{t}{a}\, dt.$$

Аналогично интегрированием по частям находим

$$\int\limits_0^a \int\limits_0^s \frac{p'(t)t^2}{s\sqrt{s^2 - t^2}}\, dt\, ds = t\Big(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{t}{a}\Big)p(t)\Big|_0^a - \int\limits_0^a p(t)\Big(\arccos\frac{t}{a} - \frac{t}{\sqrt{a^2 - t^2}}\Big)\, dt.$$

Заметим, что для обращения в нуль двойной подстановки достаточно ограниченности плотности $p(t)$ в пределах площадки контакта.

С учетом данных соотношений из формулы (4.1) выводим соотношение

$$p(0) = \frac{2E}{\pi(1 - \nu^2)}\frac{a}{R_0} - \frac{\alpha}{\pi R_0}\Big(\int\limits_0^a p(t)\arccos\frac{t}{a}\, dt + \int\limits_0^a \frac{p(t)t}{\sqrt{a^2 - t^2}}\, dt\Big). \tag{4.3}$$

Заметим, что последний интеграл в (4.3) может быть исключен согласно уравнению (2.6).

5. Приближенное решение контактной задачи в уточненной постановке. Следует отметить, что полученные уравнения, в частности (2.6), (3.3) и (4.3), представляют собой точные равенства, выведенные из исходного уравнения (1.5) без каких-либо упрощений. При этом правые части данных уравнений представляют собой сумму соответствующего выражения, получаемого по теории Герца (см., например, [13, 14]), и поправки, учитывающей влияние касательных смещений.

Согласно теории Герца под штампом в форме параболоида вращения развивается контактное давление

$$p(r) = p_0\sqrt{1 - r^2/a^2} \tag{5.1}$$

(p_0 — максимальное контактное давление).

Подставляя выражение (5.1) в правую часть уравнения (4.3), получаем приближенное уравнение для определения величины p_0. В результате после вычисления квадратур имеем

$$p_0 = \frac{2E}{\pi(1-\nu^2)}\frac{a}{R_0} - \frac{\alpha}{2\pi}\frac{a}{R_0}\Bigl(\frac{\pi^2}{4} + 2\Bigr)p_0.$$

Отсюда находим

$$p_0 = \frac{2E}{\pi(1-\nu^2)}\frac{a}{R_0}\Bigl(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\frac{a}{R_0}\Bigl(\frac{\pi^2}{4} + 2\Bigr)\Bigr)^{-1}. \tag{5.2}$$

В то же время, подставляя выражение (5.1) в уравнение (5.2), получим

$$\delta_0 = \frac{a^2}{R_0} - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2ER_0}\,p_0 a^2. \tag{5.3}$$

Уравнение (5.3) с учетом равенства (5.2) используется для приближенного определения радиуса a площадки контакта по заданному значению перемещения штампа δ_0. Таким образом, для нахождения относительного значения радиуса площадки контакта $x = a/R_0$ имеем следующее уравнение:

$$\frac{\delta_0}{R_0} = x^2\Bigl(1 - \frac{\alpha x}{\pi + \alpha x(\pi^2/8 + 1)}\Bigr). \tag{5.4}$$

Значения корней уравнения (5.4) хорошо согласуются с результатами численного решения [4], основанного на непосредственной аппроксимации интегральных операторов в уравнении (1.5) конечными суммами. Например, относительная погрешность при определении радиуса площадки контакта a для $\nu = 0{,}375$ и $\lambda = \alpha(\delta_0/2R_0)^{1/2} = 0{,}5$ не превышает 2 %.

В случае задания силы P уравнение для определения радиуса площадки контакта следует выводить из уравнения (3.3), подставляя в него выражение (5.1) с учетом (5.2). В результате для силы P получим выражение

$$P = \frac{4E}{3(1-\nu^2)}\,\frac{a^3}{R_0} - \frac{\alpha a^3 p_0}{2R_0}, \tag{5.5}$$

где величина p_0 определена формулой (5.2). Из уравнения (5.5) получаем

$$\frac{3(1-\nu^2)}{4ER_0^2}P = x^3\Bigl(1 - \frac{(3\alpha/4)x}{\pi + \alpha x(\pi^2/8 + 1)}\Bigr). \tag{5.6}$$

Наконец, приближенное выражение для плотности контактных давлений получается на основе формулы (2.7), в которую следует подставить выражение

$$F(r) = \frac{E}{1-\nu^2}\Bigl(\delta_0 - \frac{r^2}{R_0}\Bigr) + \frac{\alpha p_0 r}{4R_0 a}\Bigl(2ra + (a^2 - r^2)\ln\frac{a+r}{a-r}\Bigr),$$

где величина p_0 определена формулой (5.2).

6. Асимптотика приближенного решения в случае малой площадки контакта. В предположении малости отношения $x = a/R_0$ из уравнения (5.4) с точностью до членов порядка x^2 по сравнению с единицей находим

$$a = \sqrt{\delta_0 R_0}\Big(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\sqrt{\frac{\delta_0}{R_0}}\Big). \tag{6.1}$$

В свою очередь, с учетом выражения (6.1) из уравнения (5.6) выводим

$$P = \frac{4E\sqrt{R_0}}{3(1-\nu^2)}\,\delta_0^{3/2}\Big(1 + \frac{3\alpha}{4\pi}\sqrt{\frac{\delta_0}{R_0}}\Big). \tag{6.2}$$

Подставляя выражение (6.1) в формулу (5.2) и пренебрегая малыми более высокого порядка малости, получаем

$$p_0 = \frac{2E}{\pi(1-\nu^2)}\sqrt{\frac{\delta_0}{R_0}}\Big(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\Big(\frac{\pi^2}{4} + 1\Big)\sqrt{\frac{\delta_0}{R_0}}\Big). \tag{6.3}$$

Точность формул (6.1)–(6.3) повышается при уменьшении отношения δ_0/R_0.

7. Обсуждение. Полученные точные соотношения (2.6), (3.3) и (4.3) позволяют проанализировать влияние эффекта касательных смещений на основные параметры контакта. Так, решение контактной задачи в уточненной постановке (при заданном значении перемещения штампа δ_0) приводит к увеличению радиуса площадки контакта, поскольку согласно уравнению (2.6) имеет место равенство

$$a = \sqrt{\delta_0 R_0}\Big(1 - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}\int\limits_0^1 \frac{p(a\tau)\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau\Big)^{-1/2}. \tag{7.1}$$

Следует отметить, что согласно условию (1.6) плотность контактных давлений внутри площадки положительна.

Далее, в соответствии с формулой (3.3) имеем

$$P = \frac{4E}{3(1-\nu^2)}\frac{a^3}{R_0}\Big(1 - \frac{3(1-2\nu)(1+\nu)}{2E}\int\limits_0^1 \frac{p(a\tau)\tau^3}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau\Big). \tag{7.2}$$

Подставляя значение радиуса a, определяемое формулой (7.1), в уравнение (7.2), получаем

$$P = \frac{4E\sqrt{R_0}}{3(1-\nu^2)}\frac{1-(3/2)I_3(p)}{\big(1-I_1(p)\big)^{3/2}}\,\delta_0^{3/2}, \qquad I_k(p) = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}\int\limits_0^1 \frac{p(a\tau)\tau^k}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau.$$

Отсюда в силу неравенства $I_3(p) < I_1(p)$ следует, что учет касательных смещений в контактной задаче приводит к увеличению силы P при заданном значении перемещения штампа δ_0. Наконец, по формуле (4.3) находим

$$p(0) = \frac{2E}{\pi(1-\nu^2)}\frac{a}{R_0}\Big(1 - \frac{1}{2}I_1(p) - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E}\int\limits_0^1 p(a\tau)\arccos\tau\,d\tau\Big).$$

Подставляя в данное равенство выражение (7.1), получаем

$$p(0) = \frac{2E}{\pi(1-\nu^2)}\sqrt{\frac{\delta_0}{R_0}}\,\frac{1}{(1-I_1(p))^{1/2}}\Big(1 - \frac{1}{2}I_1(p) - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E}\int\limits_0^1 p(a\tau)\arccos\tau\,d\tau\Big).$$

Тем самым учет касательных смещений приводит к уменьшению максимума контактных давлений. Следует отметить, что уменьшение максимального значения контактных давлений $p(0)$ при одновременном увеличении равнодействующей контактных давлений P достигается за счет перераспределения контактных давлений на большую площадь. Заметим также, что сформулированные выводы согласуются с асимптотическими формулами (6.1)–(6.3).

В работе [4] проводились расчеты величины касательных смещений $u_r(a)$. Согласно формулам (2.1) и (3.2) имеем

$$u_r(a) = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2\pi E}\,\frac{P}{a}. \tag{7.3}$$

Подставляя в формулу (7.3) выражения (7.1) и (3.3), находим

$$u_r(a) = -\frac{2\alpha\delta_0}{3\pi}\,\frac{1-(3/2)I_3(p)}{1-I_1(p)}.$$

Отметим, что при выводе уравнения (1.5) расчет проводился по недеформированному состоянию. Иными словами, собственно радиус площадки контакта, по которой поверхности упругих тел соприкасаются в результате деформации, равен $a + u_r(a)$.

В работе [15] отмечено, что учет касательных смещений приводит к уменьшению несовместности перемещений, т. е. к проникновению точек упругого полупространства внутрь штампа. Однако учет касательных смещений значительно усложняет контактную задачу. Построенное приближенное решение позволяет достаточно просто производить расчеты и оценивать влияние данного эффекта на основные параметры контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Галанов Б. А.** Постановка и решение некоторых уточненных задач упругого контакта двух тел // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1983. № 6. С. 56–63.
2. **Кравчук А. С.** К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, вып. 2. С. 329–337.
3. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.
4. **Галанов Б. А., Кривонос Ю. М.** Об учете в задаче Герца тангенциальных смещений на поверхности контакта // Вычислительная и прикладная математика. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1984. Вып. 53. С. 87–94.
5. **Солдатенков И. А.** Контактная задача для полуплоскости в уточненной постановке (учет касательного перемещения). М., 1991. (Препр. / Ин-т пробл. механики АН СССР; № 501).
6. **Солдатенков И. А.** Контактная задача для полуплоскости при учете касательного перемещения на контакте // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1994. № 4. С. 51–61.
7. **Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.** Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT-Press, 2000.
8. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
9. **Леонов М. Я.** К теории расчета упругих оснований // Прикл. математика и механика. 1939. Т. 3, вып. 2. С. 53–78.
10. **Schubert G.** Zur Frage der Druckverteilung unter elastisch gelagerten Tragwerken // Ing.-Arch. 1942. Bd 13, N 3. S. 132–147.
11. **Штаерман И. Я.** Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.

12. **Моссаковский В. И.** Применение теоремы взаимности к определению суммарных сил и моментов в пространственных контактных задачах // Прикл. математика и механика. 1953. Т. 17, вып. 4. С. 477–482.
13. **Джонсон К.** Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989.
14. **Лурье А. И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970.
15. **Галанов Б. А.** Численное определение зон нарушения совместности деформаций в некоторых контактных задачах теории упругости и решение этих задач в уточненной постановке // Докл. АН УССР. Сер. А. 1982. № 7. С. 36–40.

Поступила в редакцию 26/V 2003 г.