

УДК 539.375

ЗАРОЖДЕНИЕ ТРЕЩИНЫ В ПОЛОСЕ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ СИЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ

М. В. Мирсалимов

Азербайджанский технический университет, AZ1129 Баку, Азербайджан
E-mail: mir-vagif@mail.ru

Построена математическая модель зарождения трещины в полосе переменной толщины при силовом нагружении. Считается, что по мере нагружения полосы внешними силами в ней возникают зоны предразрушения, моделируемые как области ослабленных межчастичных связей материала. Решение задачи о равновесии изотропной полосы переменной толщины с зародышевой трещиной сводится к решению системы нелинейных сингулярных интегральных уравнений с ядром типа ядра Коши, из которого находятся усилия в зоне зарождения трещины. С учетом критерия предельного растяжения связей материала формулируется условие появления трещины в полосе переменной толщины.

Ключевые слова: полоса переменной толщины, зона предразрушения, связи между берегами, силы сцепления.

Постановка задачи. В настоящее время методы оценки несущей способности полос переменной толщины при наличии трещин развиты недостаточно. При решении практических задач большое значение имеет исследование процессов зарождения и развития трещин в полосах переменной толщины.

Рассмотрим однородную изотропную полосу переменной толщины. Обозначим через $2L$ и $2h$ соответственно ширину и толщину полосы (рис. 1). Срединная плоскость (x, y) является плоскостью симметрии. Полоса переменной толщины находится в обобщенном плоском напряженном состоянии. Пусть полоса подвергается силовому нагружению напряжениями, приложенными на границе $y = \pm L$ полосы (условия первой основной задачи). По мере нагружения полосы в материале возникают зоны предразрушения, которые моделируются областями с ослабленными межчастичными связями в материале. Взаимодействие берегов этих областей моделируется путем введения между берегами зоны предразрушения связей с заданной диаграммой деформирования. Физическая природа таких связей и размеры области предразрушения зависят от вида материала.

В рассматриваемом случае образование зародышевой трещины в полосе переменной толщины представляет собой процесс перехода области предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала. При этом размер зоны с ослабленными межчастичными связями материала заранее неизвестен и должен быть определен в процессе решения задачи.

Как известно, на ранних стадиях разрушения формируются области с нарушенной структурой материала в виде узких слоев, занимающих незначительную часть объема тела по сравнению с объемом, занимаемым его упругой зоной [1]. Считается, что толщина

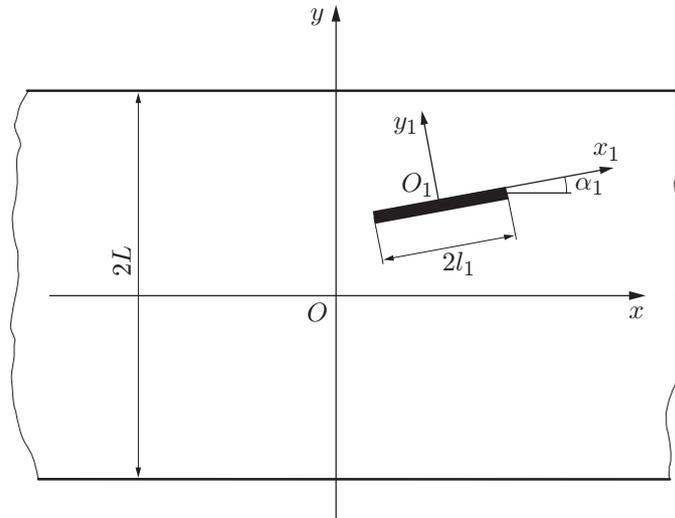


Рис. 1. Схема задачи о зарождении трещины в полосе переменной толщины

полосы $2h(x, y)$ удовлетворяет условиям $0 < h_1 \leq h(x, y) \leq h_2$, где h_1, h_2 — наименьшее и наибольшее значения толщины полосы соответственно.

Функция толщины может быть представлена в виде [2]

$$h(x, y) = h_0[1 + \varepsilon \bar{h}(x, y)],$$

где $h_0 = (h_1 + h_2)/2$; $\varepsilon = (h_2 - h_1)/(h_2 + h_1)$ — малый параметр; $-1 \leq \bar{h}(x, y) \leq 1$ — некоторая известная безразмерная переменная функция.

Примем следующие предположения. Зона предразрушения ориентирована в направлении максимальных растягивающих напряжений. Центр зоны предразрушения совпадает с началом локальной системы координат $x_1 O_1 y_1$. Ось x_1 совпадает с линией, вдоль которой расположена зона предразрушения, и образует угол α_1 с осью x (см. рис. 1). Взаимодействие берегов зоны предразрушения (связи между берегами) препятствует зарождению трещины.

Для математического описания взаимодействия берегов зоны предразрушения принимается, что между ними имеются связи, закон деформирования которых задан. При действии силовой нагрузки на границе полосы $y = \pm L$ в связях, соединяющих берега зоны предразрушения, в общем случае возникают нормальные $q_{y_1}(x_1)$ и касательные $q_{x_1 y_1}(x_1)$ усилия. Эти напряжения также неизвестны и должны быть определены в процессе решения краевой задачи механики разрушения для полосы.

Краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} y = L: \quad \sigma_y - i\tau_{xy} &= p_1(x), \quad -\infty < x < \infty, \\ y = -L: \quad \sigma_y - i\tau_{xy} &= p_2(x), \quad -\infty < x < \infty, \\ y_1 = 0: \quad \sigma_{y_1} - i\tau_{x_1 y_1} &= q_{y_1} - iq_{x_1 y_1}, \quad -l_1 \leq x_1 \leq l_1, \end{aligned}$$

где $p_1(x), p_2(x)$ — заданные функции, убывающие на бесконечности и удовлетворяющие условиям статики.

Основные соотношения рассматриваемой задачи необходимо дополнить соотношением, связывающим раскрытие берегов зоны предразрушения и усилия в связях:

$$v^+(x_1, 0) - v^-(x_1, 0) - i(u^+(x_1, 0) - u^-(x_1, 0)) = C(x_1, \sigma_1)[q_{y_1}(x_1) - iq_{x_1 y_1}(x_1)]. \quad (1)$$

Здесь функция $C(x_1, \sigma_1)$ имеет смысл эффективной податливости связей, зависящей от их натяжения; $v^+ - v^-$ и $u^+ - u^-$ — нормальная и касательная составляющие раскрытия

берегов зоны предразрушения соответственно; $\sigma_1 = \sqrt{q_{y_1}^2 + q_{x_1 y_1}^2}$ — модуль вектора усилий в связях.

Для вычисления значения внешней нагрузки, при которой происходит зарождение трещины, постановку задачи нужно дополнить условием (критерием) появления трещины (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого условия примем критерий критического раскрытия берегов зоны предразрушения

$$|v^+ - v^- - i(u^+ - u^-)| = \delta_{cr}, \tag{2}$$

где δ_{cr} — характеристика сопротивления материала полосы трещинообразованию. Это дополнительное условие позволяет найти параметры полосы, при которых появляется трещина.

Метод решения. Решение системы уравнений статического деформирования полосы переменной толщины будем искать в виде разложений по малому параметру [2, 3]. При построении решения используем метод возмущений. Уравнения нулевого приближения совпадают с уравнениями классической плоской задачи теории упругости, а уравнения первого приближения представляют собой уравнения плоской задачи теории упругости с объемной силой $F = X_1 + iY_1$ (см. формулу (4) в [3]). Аналогично определяются составляющие объемной силы для второго и последующих приближений. Для решения задачи в каждом приближении используется принцип суперпозиции. При этом напряженно-деформированное состояние полосы с зоной предразрушения в каждом приближении можно представить в виде суммы двух напряженно-деформированных состояний. Первое состояние определяется из решения плоской задачи теории упругости для полосы в отсутствие зоны предразрушения, второе состояние — из решения задачи для полосы с зоной предразрушения, на берегах которой дополнительно действуют равные по величине и противоположные по знаку усилия, определяемые первым напряженным состоянием при $y_1 = 0$.

Рассмотрим решение задачи в нулевом приближении. Первое состояние в нулевом приближении (для полосы постоянной толщины) в отсутствие зоны предразрушения известно [4, 5]. Граничные условия задачи, определяющей второе состояние в нулевом приближении, имеют вид

$$\begin{aligned} y = L: \quad & \sigma_y^{(0)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(0)} = 0, \\ y = -L: \quad & \sigma_y^{(0)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(0)} = 0, \\ y_1 = 0: \quad & \sigma_{y_1}^{(0)} - i\tau_{x_1 y_1}^{(0)} = q_{y_1}^{(0)} - iq_{x_1 y_1}^{(0)} - (p_*^{(0)}(x_1) - iq_*^{(0)}(x_1)), \quad |x_1| \leq l_1. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $p_*^{(0)}(x_1)$, $q_*^{(0)}(x_1)$ — нормальные и касательные напряжения, возникающие в сплошной полосе на оси x_1 ($y_1 = 0$) в результате действия напряжений на ее границе $y = \pm L$ в нулевом приближении.

С помощью формул Колосова — Мусхелишвили [6] граничные условия (3) записываются в виде краевой задачи для двух аналитических функций $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$:

$$\begin{aligned} y = L: \quad & \Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} + z \overline{\Phi_0'(z)} + \overline{\Psi_0(z)} = 0, \\ y = -L: \quad & \Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} + z \overline{\Phi_0'(z)} + \overline{\Psi_0(z)} = 0, \\ y_1 = 0: \quad & \Phi_0(x_1) + \overline{\Phi_0(x_1)} + x_1 \overline{\Phi_0'(x_1)} + \overline{\Psi_0(x_1)} = f^0(x_1). \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $f^0(x_1) = q_{y_1}^{(0)} - iq_{x_1 y_1}^{(0)} - (p_*^{(0)} - iq_*^{(0)})$; $|x_1| \leq l_1$.

Комплексные потенциалы $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ будем искать в виде [5]

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^2 \int_{-l_k}^{l_k} \frac{g_k^0(t) dt}{t - z_k},$$

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^2 e^{-2i\alpha_k} \int_{-l_k}^{l_k} \left(\frac{\overline{g_k^0(t)}}{t - z_k} - \overline{T_k} \frac{g_k^0(t)}{(t - z_k)^2} e^{i\alpha_k} \right) dt,$$
(5)

где $T_k = t e^{i\alpha_k} + z_k^0$; $z_k = e^{-i\alpha_k}(z - z_k^0)$; $\alpha_0 = \alpha_2 = 0$; $z_0^0 = iL$; $z_2^0 = -iL$; $l_0 = \infty$; $l_2 = \infty$.

Подставляя функции (5) в краевые условия (4), после ряда преобразований получаем систему трех интегральных уравнений

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{g_0^0(t)}{t - x} + g_2^0(t) K_{0,2}(t - x) + \overline{g_2^0(t)} L_{0,2}(t - x) \right] dt =$$

$$= - \int_{-l_1}^{l_1} [g_1^0(t) K_{0,1}(t, x) + \overline{g_1^0(t)} L_{0,1}(t, x)] dt, \quad |x| < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{g_2^0(t)}{t - x} + g_0^0(t) K_{2,0}(t - x) + \overline{g_0^0(t)} L_{2,0}(t - x) \right] dt =$$

$$= - \int_{-l_1}^{l_1} [g_1^0(t) K_{2,1}(t, x) + \overline{g_1^0(t)} L_{2,1}(t, x)] dt, \quad |x| < \infty,$$
(6)

$$\int_{-l_1}^{l_1} \left[\frac{g_1^0(t)}{t - x} + g_1^0(t) K_{1,1}(t, x) + \overline{g_1^0(t)} L_{1,1}(t, x) \right] dt +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} [g_0^0(t) K_{1,0}(t, x) + \overline{g_0^0(t)} L_{1,0}(t, x)] dt +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} [g_2^0(t) K_{1,2}(t, x) + \overline{g_2^0(t)} L_{1,2}(t, x)] dt = \pi f^0(x), \quad |x| < l_1.$$

Выражения для величин K_{nk} , L_{nk} ($k = 0, 1, 2$, $n = 0, 1, 2$) не приводятся вследствие их громоздкости. Подставляя функции $g_0^0(x)$ и $g_2^0(x)$, найденные из решения первых двух интегральных уравнений (6), в третье интегральное уравнение (6), после ряда преобразований получаем одно комплексное сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $g_1^0(x)$

$$\int_{-l_1}^{l_1} \frac{g_1^0(t) dt}{t - x} + \int_{-l_1}^{l_1} [g_1^0(t) R_{11}(t, x) + \overline{g_1^0(t)} S_{11}(t, x)] dt = \pi f^0(x), \quad |x| \leq l_1. \quad (7)$$

Выражения для функций $R_{11}(t, x)$ и $S_{11}(t, x)$ не приводятся вследствие их громоздкости (эти выражения подобны выражениям (V.41) в [5]). К сингулярному интегральному уравнению (7) для внутренней зоны предразрушения добавляется условие

$$\int_{-l_1}^{l_1} g_1^0(t) dt = 0, \quad (8)$$

обеспечивающее однозначность смещений при обходе контура зоны предразрушения в нулевом приближении.

Комплексное сингулярное интегральное уравнение (7) с дополнительным условием (8) сводится к системе M алгебраических уравнений относительно значений искомой функции $g_1^0(x_1)$ в узловых точках. Для получения системы алгебраических уравнений сначала в интегральном уравнении (7) и условии (8) все интервалы интегрирования приведем к одному интервалу $[-1, 1]$, выполнив замену переменных $t = l_1\tau$, $x = l_1\xi$ ($|t| < l_1$, $|x| < l_1$). Решение сингулярного интегрального уравнения будем искать в виде

$$g_1^0(\xi) = g_1^*(\xi)/\sqrt{1 - \xi^2},$$

где $g_1^*(\xi)$ — регулярная в интервале $[-1, 1]$ функция.

Используя квадратурные формулы типа формул Гаусса [5, 7], сингулярное интегральное уравнение (7) с дополнительным условием (8) сведем к системе M алгебраических уравнений для определения M неизвестных $g_1^*(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M l_1 [g_1^*(t_m) R_{11}(l_1 t_m, l_1 x_r) + \overline{g_1^*(t_m)} S_{11}(l_1 t_m, l_1 x_r)] &= f^0(x_r), \\ \sum_{m=1}^M g_1^*(t_m) &= 0 \quad (r = 1, 2, \dots, M - 1). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $t_m = \cos((2m - 1)\pi/(2M))$; $x_r = \cos(\pi r/M)$.

В правую часть системы (9) входят неизвестные значения напряжений $q_{y_1}^{(0)}(x_1)$ и $q_{x_1 y_1}^{(0)}(x_1)$ в узловых точках, принадлежащих зоне предразрушения. Для определения напряжений в связях между берегами зоны предразрушения в нулевом приближении используется соотношение

$$v_0^+(x_1, 0) - v_0^-(x_1, 0) - i(u_0^+(x_1, 0) - u_0^-(x_1, 0)) = C(x_1, \sigma_1^0) [q_{y_1}^{(0)}(x_1) - iq_{x_1 y_1}^{(0)}(x_1)], \quad (10)$$

где

$$\sigma_1^0 = \sqrt{[q_{y_1}^{(0)}]^2 + [q_{x_1 y_1}^{(0)}]^2}.$$

С помощью полученного решения соотношение (10) можно записать в виде

$$g_1^0(x_1) = \frac{2\mu}{1 + \varkappa} \frac{d}{dx_1} [C(x_1, \sigma_1^0)(q_{y_1}^{(0)}(x_1) - iq_{x_1 y_1}^{(0)}(x_1))], \quad (11)$$

где x_1 — аффикс точек берегов зоны предразрушения; μ — модуль сдвига материала полосы.

Комплексное уравнение (11) используется для определения усилий $q_{y_1}^{(0)}$ и $q_{x_1 y_1}^{(0)}$ в связях между берегами зоны предразрушения. Для построения недостающих алгебраических уравнений для нахождения значений напряжений $q_{y_1}^{(0)}(t_m)$ и $q_{x_1 y_1}^{(0)}(t_m)$ в узловых точках потребуем выполнения условий (11) в узловых точках t_m , содержащихся в зоне предразрушения. С помощью метода конечных разностей получаем комплексную алгебраическую

систему M уравнений для определения значений $q_{y_1}^{(0)}(t_m)$ и $q_{x_1 y_1}^{(0)}(t_m)$ в узловых точках зоны предразрушения. При этом использовались граничные условия

$$t_0 = \pm 1: \quad q_{y_1}^{(0)}(l_1 t_0) = 0, \quad q_{x_1 y_1}^{(0)}(l_1 t_0) = 0,$$

соответствующие условиям

$$v_0^+(\pm l_1, 0) - v_0^-(\pm l_1, 0) = 0, \quad u_0^+(\pm l_1, 0) - u_0^-(\pm l_1, 0) = 0.$$

Для замыкания полученных уравнений необходимы два комплексных уравнения, определяющие размеры зоны предразрушения. Так как решение сингулярного интегрального уравнения (7) ищется в классе всюду ограниченных функций (напряжений), к системе (9) необходимо добавить условия ограниченности напряжений на концах зоны предразрушения $x_1 = \pm l_1$, имеющие вид

$$\sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_1^*(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0, \quad \sum_{m=1}^M (-1)^m g_1^*(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0. \quad (12)$$

Алгебраическая система (9), (11), (12) даже при линейно-упругих связях является нелинейной, поскольку размер зоны предразрушения неизвестен. При заданной внешней нагрузке с использованием полученной системы уравнений относительно $g_1^*(t_m)$, $q_{y_1}^{(0)}(t_m)$, $q_{x_1 y_1}^{(0)}(t_m)$, l_1 можно найти напряженно-деформированное состояние полосы при наличии зоны предразрушения в нулевом приближении. Совместное решение полученных систем уравнений позволяет найти значения функций $v_0(t_m)$, $u_0(t_m)$, $q_{y_1}^{(0)}(t_m)$, $q_{x_1 y_1}^{(0)}(t_m)$ и размеры зоны предразрушения. Для решения этих систем используется метод последовательных приближений, суть которого состоит в следующем. При некотором значении размера зоны предразрушения l_1^* решается линейная (при наличии линейно-упругих связей) алгебраическая система (9), (11) относительно остальных неизвестных, входящих в систему. Это значение l_1^* и соответствующие ему значения остальных неизвестных, вообще говоря, не удовлетворяют уравнениям (12). Поэтому, подбирая значения длины зоны предразрушения, многократно повторяем вычисления, до тех пор пока условия (12) не будут выполнены с заданной точностью. В каждом приближении алгебраическая система решалась численно методом Гаусса с выбором главного элемента. В случае нелинейного закона деформирования связей для нахождения усилий в связях между берегами зоны предразрушения используется также итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [8].

Построим решение задачи в первом приближении. Найдя компоненты усилий $N_x^{(0)}$, $N_y^{(0)}$, $N_{xy}^{(0)}$, по формулам [2, 3]

$$X_1 = N_x^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + N_{xy}^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y}, \quad Y_1 = N_y^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} + N_{xy}^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \quad (13)$$

вычислим компоненты объемной силы $F_1(x, y)$ в первом приближении. Для определения первого состояния в первом приближении имеем уравнения плоской теории упругости при наличии объемных сил (13). Решение плоской задачи для первого состояния будем искать в виде

$$N_x^* = N_{x_*}^{(1)} + N_{x_1}^{(1)}, \quad N_y^* = N_{y_*}^{(1)} + N_{y_1}^{(1)}, \quad N_{xy}^* = N_{xy_*}^{(1)} + N_{xy_1}^{(1)},$$

где $N_{x_*}^{(1)}$, $N_{y_*}^{(1)}$, $N_{xy_*}^{(1)}$ — частное решение уравнений плоской теории упругости при наличии объемной силы (13); $N_{x_1}^{(1)}$, $N_{y_1}^{(1)}$, $N_{xy_1}^{(1)}$ — общее решение уравнений плоской теории упругости в отсутствие объемных сил.

Для усилий в первом состоянии в первом приближении при наличии объемных сил имеем общие представления

$$\frac{N_x^* + N_y^*}{2h_0} = 4 \operatorname{Re} \left(\Phi_{10}(z) - \frac{1}{2(1 + \varkappa)} \frac{\partial F_1}{\partial z} \right),$$

$$\frac{N_y^* - N_x^* + 2iN_{xy}^*}{2h_0} = 2 \left(\bar{z} \Phi'_{10}(z) + \Psi_{10}(z) - \frac{1}{2(1 + \varkappa)} \frac{\partial (\varkappa \bar{F}_1 - \bar{Q}_1)}{\partial z} \right).$$

В эти соотношения входят две аналитические функции $\Phi_{10}(z)$ и $\Psi_{10}(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$ и две функции $F_1(z, \bar{z})$ и $Q_1(z, \bar{z})$, представляющие собой любые частные решения уравнений

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial \bar{z}} = F, \quad \frac{\partial^2 Q_1}{\partial z^2} = \bar{F}.$$

Краевые условия задачи об определении первого напряженно-деформированного состояния для полосы в отсутствие зоны предразрушения в первом приближении имеют вид

$$\begin{aligned} y = L: \quad & \Phi_{10}(z) + \overline{\Phi_{10}(z)} + z \overline{\Phi'_{10}(z)} + \overline{\Psi_{10}(z)} = f_1(z) - \bar{h}p_1(x), \\ y = -L: \quad & \Phi_{10}(z) + \overline{\Phi_{10}(z)} + z \overline{\Phi'_{10}(z)} + \overline{\Psi_{10}(z)} = f_1(z) - \bar{h}p_2(x), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$f_1(z) = \frac{1}{1 + \varkappa} \operatorname{Re} \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{1}{2(1 + \varkappa)} \left(\varkappa \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial z} - \frac{\partial \bar{Q}_1}{\partial z} \right),$$

функции $F_1(z, \bar{z})$ и $Q_1(z, \bar{z})$ определяются по формулам

$$F_1(z, \bar{z}) = \int^z dz \int^{\bar{z}} F(z, \bar{z}) d\bar{z}, \quad Q_1(z, \bar{z}) = \int^z dz \int^{\bar{z}} \overline{F(z, \bar{z})} dz. \quad (15)$$

Решение краевой задачи (14) известно [4, 5].

Согласно принципу суперпозиции граничные условия задачи, определяющей второе напряженно-деформированное состояние в первом приближении, имеют вид

$$\begin{aligned} y = L: \quad & N_y^* = 0, \quad N_{xy}^* = 0, \\ y = -L: \quad & N_y^* = 0, \quad N_{xy}^* = 0, \\ y_1 = 0: \quad & N_{y_1}^* = q_{y_1}^{(1)} - \bar{h}q_{y_1}^{(0)} - p_*^{(1)}, \quad N_{x_1 y_1}^* = q_{x_1 y_1}^{(1)} - \bar{h}q_{x_1 y_1}^{(0)} - q_*^{(1)}. \end{aligned}$$

Здесь $p_*^{(1)}(x_1)$, $q_*^{(1)}(x_1)$ — соответственно нормальные и касательные напряжения, возникающие в сплошной полосе в отсутствие зоны предразрушения на оси x_1 ($y_1 = 0$) в первом состоянии в первом приближении.

Для определения комплексных потенциалов $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ второго состояния в первом приближении имеем следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} y = L: \quad & \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} + z \overline{\Phi'_1(z)} + \overline{\Psi_1(z)} = 0, \\ y = -L: \quad & \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} + z \overline{\Phi'_1(z)} + \overline{\Psi_1(z)} = 0, \\ y_1 = 0: \quad & \Phi_1(x_1) + \overline{\Phi_1(x_1)} + x_1 \overline{\Phi'_1(x_1)} + \overline{\Psi_1(x_1)} = f^1(x_1), \end{aligned}$$

где $f^1(x_1) = q_{y_1}^{(1)} - iq_{x_1 y_1}^{(1)} - \bar{h}(q_{y_1}^{(0)} - iq_{x_1 y_1}^{(0)}) - (p_*^{(1)} - iq_*^{(1)})$.

Комплексные потенциалы $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ будем искать в виде, аналогичном (4). По аналогии с изложенным выше получаем комплексное сингулярное уравнение относительно искомой функции $g_1^1(x)$

$$\int_{-l_1}^{l_1} \frac{g_1^1(t) dt}{t - x_1} + \int_{-l_1}^{l_1} [g_1^1(t)R_{11}(t, x_1) + \overline{g_1^1(t)} S_{11}(t, x_1)] dt = \pi f^1(x_1), \quad |x_1| \leq l_1 \quad (16)$$

с дополнительным условием типа (8).

Как и в нулевом приближении, сингулярное интегральное уравнение (16) с дополнительным условием типа (8) сводится к системе комплексных алгебраических уравнений относительно M неизвестных $g_{1*}^1(t_m)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M l_1 [g_{1*}^1(t_m)R_{11}^*(l_1 t_m, l_1 x_r) + \overline{g_{1*}^1(t_m)} S_{11}^*(l_1 t_m, l_1 x_r)] &= f^1(x_r), \\ \sum_{m=1}^M g_{1*}^1(t_m) &= 0 \quad (r = 1, 2, \dots, M-1, \quad m = 1, 2, \dots, M). \end{aligned} \quad (17)$$

В правую часть (17) входят неизвестные значения напряжений $q_{y_1}^{(1)}$ и $q_{x_1 y_1}^{(1)}$ в узловых точках, расположенных в зоне предразрушения. Для определения неизвестных напряжений $q_{y_1}^{(1)}$ и $q_{x_1 y_1}^{(1)}$ в связях между берегами зоны предразрушения в первом приближении используется соотношение

$$\begin{aligned} v_1^+(x_1, 0) - v_1^-(x_1, 0) - i(u_1^+(x_1, 0) - u_1^-(x_1, 0)) &= C(x_1, \sigma_1^1)(q_{y_1}^{(1)} - iq_{x_1 y_1}^{(1)}), \\ \sigma_1^1 &= \sqrt{[q_{y_1}^{(1)}]^2 + [q_{x_1 y_1}^{(1)}]^2}. \end{aligned}$$

Как и в нулевом приближении, это дополнительное условие удобнее записать для производной раскрытия перемещений берегов зоны предразрушения. Используя полученное решение, получаем

$$g_1^1(x_1) = \frac{2\mu}{1 + \varkappa} \frac{d}{dx_1} [C(x_1, \sigma_1^1)(q_{y_1}^{(1)}(x_1) - iq_{x_1 y_1}^{(1)}(x_1))].$$

Для построения недостающих алгебраических уравнений, необходимых для определения значений напряжений $q_{y_1}^{(1)}(t_m)$ и $q_{x_1 y_1}^{(1)}(t_m)$ в узловых точках и размеров зоны предразрушения, выполняем те же действия, что и при вычислении нулевого приближения. В результате получаем комплексную алгебраическую систему M уравнений для вычисления значений $q_{y_1}^{(1)}(t_m)$ и $q_{x_1 y_1}^{(1)}(t_m)$ в узловых точках и два комплексных уравнения типа (12) для определения размера зоны предразрушения. Для определения раскрытия берегов зоны предразрушения, распределения усилий в связях и размеров зоны предразрушения задается закон изменения толщины полосы. Функцию $h(x, y)$ разложим в ряд Тейлора в окрестности начала координат, ограничиваясь для простоты несколькими членами разложения. Интегрируя (15), находим функции $F_1(z, \bar{z})$ и $Q_1(z, \bar{z})$, с помощью которых определяем функцию $f_1(z)$.

С учетом соотношения (1) предельное условие записывается в виде

$$C(x_0, \sigma_1(x_0))\sigma_1(x_0) = \delta_{cr}, \quad (18)$$

где $\sigma_1(x_0) = \sigma_1^0(x_0) + \varepsilon\sigma_1^1(x_0)$.

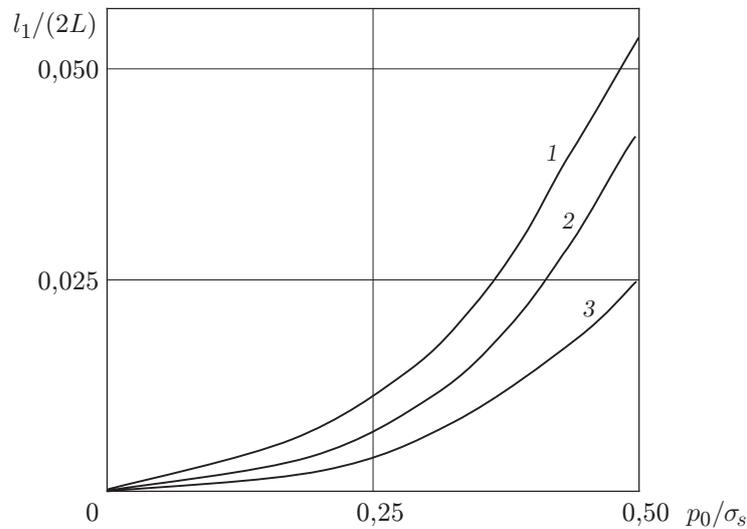


Рис. 2. Зависимость длины зоны предразрушения $l_1/(2L)$ от безразмерной нагрузки p_0/σ_s :
 1 — $h_1/h_0 = 0,5$; 2 — $h_1/h_0 = 0,6$; 3 — $h_1/h_0 = 0,75$

Совместное решение полученных уравнений и условия (18) при заданных характеристиках связей позволяет определить критическое значение внешней нагрузки и размер l_{cr} зоны предразрушения в состоянии предельного равновесия, при котором возникает трещина.

На рис. 2 представлена зависимость длины зоны предразрушения $l_1/(2L)$ от безразмерной нагрузки p_0/σ_s (σ_s — предел текучести материала полосы при растяжении) для полосы, толщина которой меняется по линейному закону. В расчетах использовались следующие значения параметров задачи: коэффициент Пуассона $\nu = 0,30$, $\alpha_1 = \pi/4$, модуль упругости материала полосы $E = 1,8 \cdot 10^5$ МПа, $z_1^0 = 0$, $M = 30$. На рис. 3 приведено распределение модуля вектора усилий в связях σ_1/p_0 вдоль зоны предразрушения. Податливости связей в нормальном и касательном направлениях были приняты равными и постоянными вдоль зоны предразрушения. Распределение касательных напряжений $q_{x_1 y_1}^{(1)}$ вдоль зоны предразрушения подобно изменению нормальных напряжений с той разницей, что абсолютные значения касательных напряжений существенно меньше, а их максимальные значения достигаются при меньших размерах зоны предразрушения. На рис. 4 приведена зависимость безразмерной предельной нагрузки $p^* = p_0 \sqrt{L}/\sqrt{E \sigma_s \delta_{cr}}$ от относительной толщины полосы h_1/h_0 .

Если один конец зоны предразрушения выходит на внешнюю поверхность полосы ($y = \pm L$), необходимость использовать условие (8) отсутствует. Изменяя параметры α_1 и z_1^0 , с помощью построенной расчетной модели можно исследовать трещинообразование в полосе при различной ориентации зоны предразрушения.

Анализ состояния предельного равновесия полосы переменной толщины, при котором появляется трещина, сводится к параметрическому исследованию полученных алгебраических систем и критерия появления трещины при различных законах деформирования связей, упругих постоянных материала и геометрических характеристиках полосы. Непосредственно из решения полученных алгебраических систем в каждом приближении определяются усилия в связях и раскрытие берегов зоны предразрушения.

Таким образом, создан эффективный алгоритм решения задач механики разрушения о зарождении трещин в полосе переменной толщины при действии силовой нагрузки, позво-

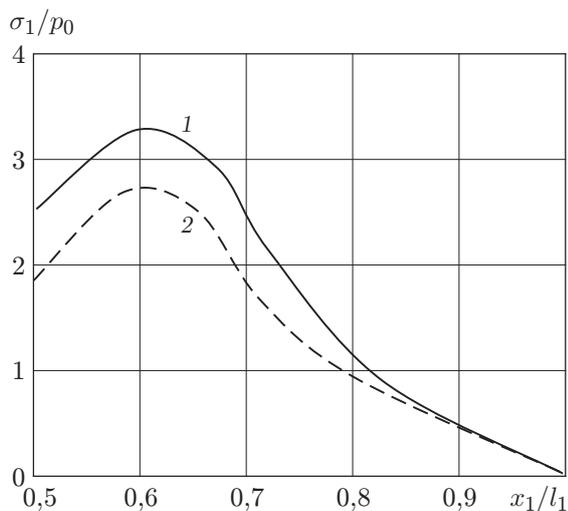


Рис. 3

Рис. 3. Распределение модуля вектора усилий в связях σ_1/p_0 вдоль зоны предразрушения:

1 — $h_1/h_0 = 0,5$; 2 — $h_1/h_0 = 0,75$

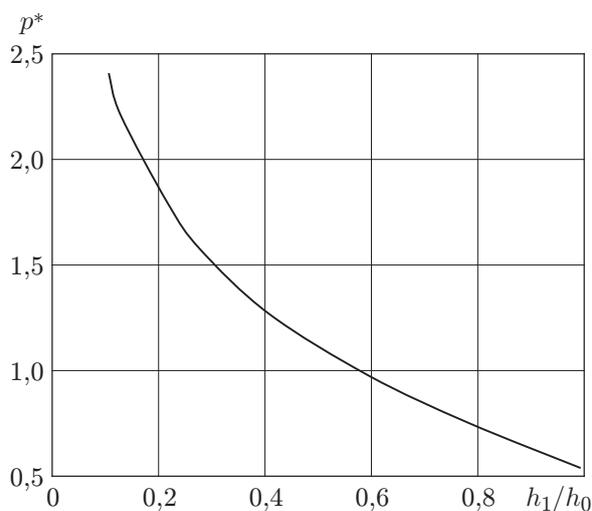


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость безразмерной предельной нагрузки p^* от относительной толщины полосы h_1/h_0

ляющий единообразно построить решение методом возмущений с использованием теории аналитических функций в каждом приближении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наук. думка, 1991.
2. Мирсалимов М. В. Решение задачи механики разрушения для полосы переменной толщины // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Актуальные вопросы механики. 2006. Т. 1, вып. 2. С. 241–247.
3. Мирсалимов М. В. Зарождение трещины при изгибе полосы переменной толщины // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 6. С. 165–176.
4. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1967.
5. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. Киев: Наук. думка, 1976.
6. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
7. Мирсалимов В. М. Неоднородные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987.
8. Ильюшин А. А. Пластичность. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.

Поступила в редакцию 11/IV 2011 г.