УДК 533.6.011.72

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОНИЧЕСКИЕ И ЛОКАЛЬНО-КОНИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ БЕЗ ЗАКРУТКИ

А. Н. Крайко, Н. И. Тилляева

Центральный институт авиационного моторостроения им. П. И. Баранова, 111116 Москва
E-mails: akraiko@ciam.ru, ntill@ciam.ru

Рассмотрены осесимметричные стационарные конические и локально-конические незакрученные течения идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа. Как и двумерные конические течения, исследуемые одномерные (осесимметричные) течения могут быть конически до- и сверхзвуковыми. Показано, что если равномерный поток коническим течением не считать, то изменение типа одномерных конических течений, за исключением стыковки двух одномерных конических течений различного типа на C^+-характеристике, возможно только на ударной волне. Построены $C^{\pm}$-характеристики и линии тока для ряда локально-конических течений и ряда известных и новых конических течений.

Ключевые слова: условие локальной коничности, диффузор, кормовая часть, конус, детонационная волна, характеристики, линии тока.

Введение. Примерами осесимметричных конических течений (КТ) без закрутки являются обтекание при нулевом угле атаки кругового конуса инертным газом [1–7] и детонирующей смесью [8], течение в диффузоре А. Буземана [1–7], течение А. А. Никольского вблизи специально спрофилированной кормовой части [3–7, 9] и течение Г. Л. Гродзовского [3, 10] в ограниченных удаленных от оси симметрии кольцевых областях с одной прямолинейной границей (участком ударной волны (УВ)). В этих течениях в полярных координатах r, φ с центром на оси симметрии параметры потока не зависят от r, и уравнения КТ (УКТ) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями с производными по φ. Однако при обтекании конуса, имеющего конечные размеры, возможны режимы, для которых при наличии УВ слабого семейства поток вблизи поверхности конуса является дозвуковым и производные по r отличны от нуля всюду включая сколь угодно малую окрестность острия. Однако вблизи острия зависимость параметров от φ определяется теми же УКТ. Такие локально-конические течения (ЛКТ) являются строго коническими в центре коничности и близки к ним в малой его окрестности. Такая же картина имеет место при осесимметричном обтекании с присоединенной УВ любых заостренных тел. В малой окрестности носика оно близко к обтеканию кругового конуса с тем же углом при вершине, а в носике тождественно этому обтеканию.

В работе [1. Разд. 157] на основе анализа УКТ свойства ЛКТ используются для доказательства невозможности регулярного отражения стационарных УВ от оси симметрии: «Другая задача, в которой... содержится коническое течение, — это отражение конической УВ. Постоянное параллельное течение отклоняется к оси “падающей” УВ и снова

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00668-а)

становится параллельным, проходя через “отраженную” УВ. Можно было бы построить такое течение, считая его чисто коническим, между двумя УВ и после отраженной УВ. На самом деле течения такого типа не существуют, что можно видеть из рассуждений, основанных на знаке v_{uu}». (Здесь u, v — осевая и радиальная компоненты вектора скорости газа $\boldsymbol{V}$; $v_{uu} = d^2v/du^2$.) Аналогичное утверждение приведено в § 16 работы [4], посвященном исследованию осесимметричных конических течений.

Ниже сначала рассматриваются общие вопросы теории осесимметричных локально-конических и конических течений, в частности тех, которые должны реализовываться при сверхзвуковом обтекании кормовой части тела вращения с конечным углом заострения и при регулярном отражении УВ от оси симметрии. Затем приводятся результаты расчетов параметров большого количества локально-конических и конических течений, в том числе течений, соответствующих рассмотренному в [11] сверхзвуковому обтеканию кормовой части тела вращения и регулярному отражению УВ любых семейств от оси симметрии. Согласно [1] доказательство невозможности такого отражения сводится к установлению отсутствия решений УКТ, в силу которых поток, текущий к оси симметрии вдоль кормовой части тела вращения или повернутый к ней падающей УВ, может вновь приобрести осевое направление в УВ и непрерывных ЛКТ.

Расчеты выполнены для течения в диффузоре А. Буземана, потока, обтекающего кормовую часть тела вращения А. А. Никольского, и КТ продуктов сгорания горючей смеси с уравнениями состояния совершенного газа за детонационной волной Чепмена — Жуге. Для последних в работе [8] впервые построены автомодельные решения с расходящимися детонационной и ударной волнами, присоединенными к вершине кругового конуса. Такие идущие из точки сильные разрывы “одного семейства” оказались возможными в нормальном газе (с положительной “фундаментальной” производной $\omega_{pp} \equiv (\partial^2\omega/\partial p^2)_s$, где ω — удельный объем; p — давление; s — удельная энтропия).

Обсуждаемые вопросы частично исследованы в [12–14]. Конические течения с закруткой рассмотрены в [15].

1. Общая теория осесимметричных незакрученных локально-конических и конических течений. Описанные выше свойства ЛКТ следуют из уравнений для давления p и угла θ между вектором скорости газа $\boldsymbol{V}$ и направленной по оси симметрии осью x декартовых (в меридиональной плоскости) координат x, y. Для осесимметричных незакрученных течений идеального газа в полярных координатах r, φ при произвольном положении их начала (точки o) на оси x эти уравнения принимают вид

$$\begin{gathered}
[\mathrm{M}^2\cos^2(\varphi-\theta)-1]p_r = r^{-1}P(p_\varphi,\ldots),\\
P(p_\varphi,\ldots) = \mathrm{M}^2 p_\varphi \sin(\varphi-\theta)\cos(\varphi-\theta) - \rho V^2\theta_\varphi - \rho V^2\sin\theta\cos(\varphi-\theta)\sin^{-1}\varphi,\\
[\mathrm{M}^2\cos^2(\varphi-\theta)-1]\rho V^2\theta_r = r^{-1}\Theta(p_\varphi,\ldots),\\
\Theta(p_\varphi,\ldots) = (1-\mathrm{M}^2)p_\varphi + \rho V^2\theta_\varphi\,\mathrm{M}^2\sin(\varphi-\theta)\cos(\varphi-\theta) + \rho V^2\sin\theta\sin(\varphi-\theta)\sin^{-1}\varphi.
\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $V = |\boldsymbol{V}|$; $\mathrm{M} = V/a$ — число Маха; $\rho = 1/\omega$ и a — плотность и скорость звука, являющиеся известными функциями p и s; p_r, p_φ, … — производные по r и φ. Еще два уравнения являются конечными интегралами полной энтальпии и энтропии (получаются при введении функции тока).

При произвольном выборе точки o правые части уравнений (1.1) — величины того же порядка, что и левые части, и соотношения (1.1) — записанные в координатах r, φ уравнения в частных производных. В случае если o — центр коничности, необходимым условием локальной коничности является отличие от нуля y-компоненты скорости $v = V\sin\theta$ как минимум на одном из лучей, направленных под углом $\varphi = \mathrm{const}$. Для тел, заостренных спереди или сзади, θ — полуугол заострения, не равный нулю, а для косой УВ, приходящей на ось симметрии (если это возможно) или уходящей от нее (как при обтекании заостренных тел), θ — угол за УВ. Вследствие этого при $r \to 0$ в выражениях для P и Θ появляются пропорциональные $\rho V^2 \sin\theta$ конечные слагаемые, которые должны компенсировать также конечные слагаемые p_φ и $\rho V^2 \theta_\varphi$. Поэтому в точке o при всех φ, для которых $V \sin\theta \neq 0$, должны выполняться уравнения $P = 0$, $\Theta = 0$. В противном случае при приближении к этой точке $|p|$ и $|\theta|$ увеличивались бы пропорционально $\ln|r|$. Однако в стационарных течениях $|p|$ и $|\theta|$ конечны (p вследствие конечности энтропии и полной энтальпии), поэтому уравнения $P = 0$, $\Theta = 0$ или следующие из них уравнения

$$p_\varphi = \frac{\rho V^2 \sin\theta \sin(\varphi - \theta)}{[\mathrm{M}^2 \sin^2(\varphi - \theta) - 1] \sin\varphi}, \qquad V^2 \theta_\varphi = \frac{V^2 \sin\theta \cos(\varphi - \theta)}{[\mathrm{M}^2 \sin^2(\varphi - \theta) - 1] \sin\varphi} \tag{1.2}$$

точно описывают ЛКТ в центре коничности и приближенно в его малой окрестности. В частности, это имело бы место при регулярном отражении от оси симметрии косой УВ любого семейства, причем в малой окрестности точки отражения падающая УВ и ряд других рассматриваемых далее кривых были бы близки к лучам с углом наклона $\varphi = \mathrm{const}$. При $V^2 \to 0$ второе уравнение (1.2) выполняется вследствие наличия этого множителя.

Аналогичный анализ (без введения необходимого условия локальной коничности — неравенства $V \sin\theta \neq 0$) уравнений (1.1), умноженных на $r/(\rho V^2)$, а при $\mathrm{M} \geqslant 1$ — уравнений, эквивалентных (1.2), проведен в [16]. Однако и до выхода работы [12] следствия этих уравнений считались очевидными. Так, при расчете параметров обтекания заостренных тел вращения с криволинейной образующей течение в малой окрестности острия с присоединенной к нему УВ заменялось на коническое даже при углах атаки, не равных нулю.

Таким образом, в центре коничности для ЛКТ или во всем КТ справедливы уравнения (1.2) или эквивалентные им УКТ в виде [1–7]

$$\begin{gathered} v_{uu} \equiv \frac{d^2 v}{du^2} = N \, \frac{1 + v_u^2}{a^2 v}, \qquad v_u = -\operatorname{ctg}\varphi, \qquad \varphi_u = \frac{N}{a^2 v}, \\ N = a^2 - V_n^2, \qquad V_n^2 = (u + v v_u)^2 / (1 + v_u^2) = (u \sin\varphi - v \cos\varphi)^2. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь все параметры — функции только x-компоненты скорости u; V_n — проекция $\boldsymbol{V}$ на нормаль к лучу, направленному под углом $\varphi = \mathrm{const}$; в качестве масштабов скорости, плотности и давления выбраны критические скорость a_*, плотность ρ_* и $\rho_* a_*^2$. Рассматриваемые газы полагаются нормальными (с положительной фундаментальной производной ω_{pp}), расчеты выполнены для совершенного газа, для которого $a^2 = [\gamma + 1 - (\gamma - 1) V^2]/2$, как правило, при $\gamma = 1{,}4$. В нормальном газе и газе, не являющемся нормальным (с $\omega_{pp} < 0$), конические течения различаются принципиально. Например, конус обтекается сверхзвуковым потоком не являющегося нормальным газа без головной УВ.

Отношение $\mathrm{M}_n = V_n/a$ имеет тот же смысл, что и число Маха, определяющее тип двумерных КТ [6, 7]. Исходя из этого одномерные (осесимметричные) КТ также будем называть конически сверхзвуковыми ($\mathrm{M}_n > 1$), конически дозвуковыми ($\mathrm{M}_n < 1$), например за УВ и на конусе, а луч, на котором $\mathrm{M}_n = 1$, — конически звуковым. Следует отметить, что за исключением одного случая непрерывное изменение знака N, т. е. типа осесимметричных КТ, в отличие от двумерных, невозможно. Это утверждение справедливо, если равномерный осевой поток не рассматривать в качестве КТ.

Умножив уравнения (1.1) на r, а затем устремив r к нулю, находим, что уравнения $P = 0$, $\Theta = 0$ и следующие из них равенства (1.2) и уравнения, получающиеся после перехода в (1.3) к независимой переменной φ, выполняются и в тех точках на оси x, в которых $v \equiv V \sin\theta = 0$. Однако в случае отсутствия частных производных по r, исчезнувших при $r = 0$ вследствие умножения на r, из этих уравнений следует, что при $V \neq 0$ в таких точках на оси x от φ не зависят p и θ, а при $V = 0$, т. е. в точке торможения, — только p. При $V = 0$ второе уравнение (1.2), становясь тождеством, не определяет зависимость $\theta(\varphi)$. Следовательно, для описания течения в окрестности таких точек переход к полярным координатам нецелесообразен. В переменных x, y уравнения для p и θ в таких точках принимают вид

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\,\frac{\partial p}{\partial x} + 2\rho V^2\,\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

В равномерном осевом потоке угол θ и все производные тождественно равны нулю, поэтому параметры такого течения удовлетворяют и исходным уравнениям (1.1), и уравнениям конического течения $P = 0$, $\Theta = 0$, а при независимой переменной φ — и всем следующим из них равенствам. При этом для любого положения точки o на оси симметрии $\mathrm{M}_n > 1$ в секторе между C^-- и C^+-характеристиками, приходящими в точку o, и $\mathrm{M}_n < 1$ вне этого сектора с непрерывным переходом через единицу на его границах. Данный случай можно считать примером непрерывного изменения типа конического течения и знака разности N, входящей в уравнения (1.3). Однако в рассматриваемом случае изменения M_n и N обусловлены лишь ориентацией луча, на нормаль к которому проецируется параллельная оси x постоянная скорость потока, а сам поток в центре коничности не удовлетворяет необходимому условию локальной коничности, т. е. в соответствии со сказанным выше такой поток не следует считать КТ. Однако в секторе между C^-- и C^+-характеристиками равномерного потока, как и в неравномерных конически сверхзвуковых КТ, любой луч с углом наклона $\varphi = \mathrm{const}$ (или его часть) может стать УВ (левой границей КТ).

Использование первого уравнения (1.3) и выражения V_n^2, определенного по u, v, v_u, принято считать более предпочтительным, поскольку интегрирование одного этого уравнения позволяет строить кривые КТ $v = v(u)$ в плоскости годографа. Однако в действительности при одинаково простом численном интегрировании одного уравнения второго порядка — первого уравнения (1.3) — и двух уравнений первого порядка — второго и третьего уравнений (1.3) — использование двух уравнений упрощает анализ и построение КТ.

В случае если газ течет в направлении слева направо, а $y > 0$, начиная от левой границы КТ угол φ всегда уменьшается. Так, при обтекании конуса он уменьшается от угла наклона УВ φ_{SW} до полуугла при вершине конуса $\varphi = \theta_c$. За УВ конечной интенсивности $v_+ \geqslant 0$, $V_{n+}^2 < a_+^2$, $N_+ > 0$ (индекс “+” соответствует параметрам за УВ), т. е. течение является конически дозвуковым и правая часть третьего уравнения (1.3) положительна. Поэтому для уменьшения угла φ x-компоненту скорости u необходимо уменьшать от ее значения u_+ за УВ до неизвестной заранее величины u_c. При этом в силу второго уравнения (1.3) с отрицательной правой частью y-компонента скорости v, а также $\operatorname{tg}\theta = v/u$ будут увеличиваться. С учетом изоэнтропичности и изоэнергетичности КТ и формулы $a^2 = -\omega^2/\omega_p$ имеем

$$N_u = -N\,\frac{\sin 2(\varphi - \theta)}{v \sin^2 \mu} - V\rho^3 a^4 \omega_{pp}\,\frac{\sin(\varphi - \theta)}{\sin\varphi}, \tag{1.4}$$

где μ — угол Маха ($\sin\mu = 1/\mathrm{M}$); $\varphi - \theta \geqslant 0$ ($\varphi - \theta = 0$ только на образующей конуса). Для совершенного газа $\mathrm{M}^2 = 2V^2/[\gamma + 1 - (\gamma - 1)V^2]$, $\rho^3 a^4 \omega_{pp} = \gamma + 1$ [6, 7], и при $N > 0$ правая часть уравнения (1.4) отрицательна. Поэтому при обтекании конуса параметр N монотонно увеличивается с уменьшением u и течение остается конически дозвуковым.

2. Анализ и результаты расчета осесимметричных незакрученных локально-конических и конических течений. Результаты интегрирования уравнений (1.3) для скорости потока перед УВ $V_\infty = 2{,}1$ ($\mathrm{M}_\infty = 3{,}724$) приведены на рис. 1.

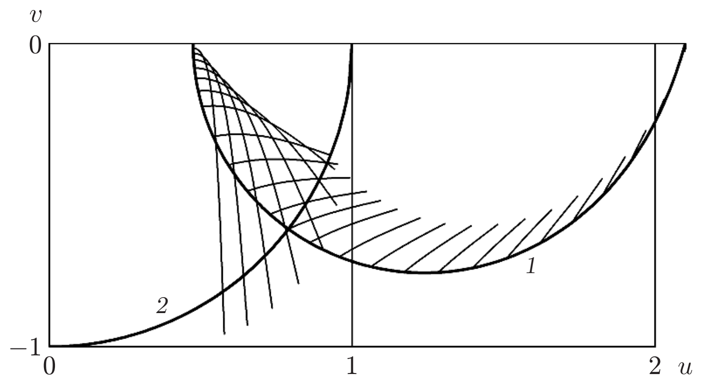

Рис. 1. Звуковая окружность (*1*), ударная поляра (*2*) и кривые КТ при $V_\infty = 2{,}1$, $\mathrm{M}_\infty \approx 3{,}72$

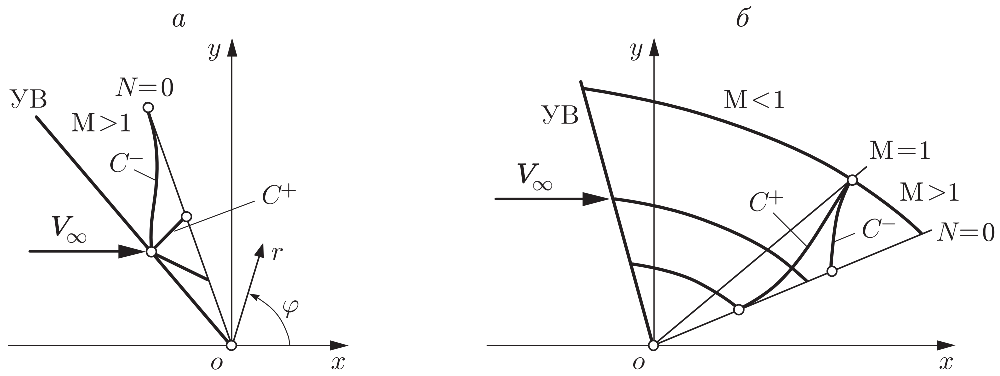

Рис. 2. Ударная волна и $C^{\pm}$-характеристики в плоскости (x, y):
а — случай сверхзвукового течения за УВ, *б* — случай дозвукового течения за УВ

В плоскости (u, v) построены звуковая окружность $V = 1$, нижняя половина ударной поляры, соответствующая идущим к оси симметрии УВ слабого и сильного семейств, и начинающиеся на ударной поляре кривые КТ. Кривые КТ, начинающиеся на поляре при $V > 1$, описывают одно из КТ [10] в конечных не примыкающих к оси областях плоскости (x, y).

Согласно второму уравнению (1.3) направление нормалей к кривым КТ в плоскости (u, v) (см. рис. 1) совпадает с направлением лучей, расположенных под углом $\varphi = \text{const}$ в плоскости (x, y) (рис. 2,*а*). В рассмотренных случаях углы φ для точек на ударной поляре, т. е. углы φ_{SW} наклона УВ, находятся в диапазоне $\pi/2 \leqslant \varphi_{SW} < \pi$, за УВ $\mathrm{M}_n < 1$, $N > 0$, $v_{uu} < 0$, кривые КТ являются выпуклыми, а нормали к ним при движении от точек на поляре поворачиваются по часовой стрелке. Это имеет место до луча с углом наклона $\varphi = \varphi_{N0}$, на котором $N = a^2 - V_n^2$ обращается в нуль.

На приведенных на рис. 1 кривых КТ компонента скорости v отрицательна. Интегрирование уравнений (1.3) проводится до величины $u = u_{N0}$ и соответствующего ей луча с углом наклона $\varphi = \varphi_{N0}$. Так как v не обращается в нуль одновременно с N, в силу третьего уравнения (1.3) кривую КТ продолжить невозможно. Действительно, если направление изменения u сохраняется, угол φ начинает увеличиваться, и на плоскости (x, y) лучи, направленные под углом $\varphi = \text{const}$, покрывают рассчитанный ранее сектор КТ с новыми значениями параметров потока. Если при достижении значения $N = 0$ параметр u изменять в обратном направлении, то с точностью до погрешностей интегрирования повторится рассчитанное КТ вплоть до УВ и соответствующей ей точки поляры. Несмотря

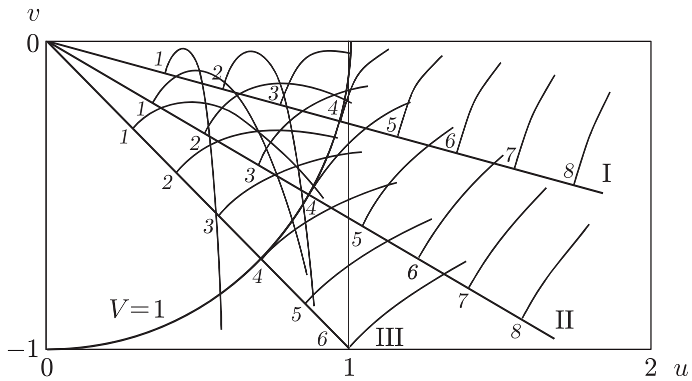

Рис. 3. Кривые КТ в плоскости годографа при различных значениях θ_o, V_o: I — $\theta_o = -15°$, II — $\theta_o = -30°$, III — $\theta_o = -45°$; *1* — $V_o = 0{,}4$, *2* — $V_o = 0{,}6$, *3* — $V_o = 0{,}8$, *4* — $V_o = 1{,}0$, *5* — $V_o = 1{,}2$, *6* — $V_o = 1{,}4$, *7* — $V_o = 1{,}6$, *8* — $V_o = 1{,}8$

на то что при $\varphi = \varphi_{N0}$ $V_n^2 = a^2$, этот луч не является C^+- или C^--характеристикой, поскольку на нем не выполняется ни одно из условий совместности [6, 7]

$$d\theta \pm \frac{\operatorname{ctg}\mu}{\rho V^2}\,dp \pm \frac{\sin\theta\sin\mu}{y\sin(\theta\pm\mu)}\,dy = 0. \tag{2.1}$$

На таком луче p и θ постоянны, а при $\theta \neq 0$ третьи слагаемые отличны от нуля. Здесь и далее при наличии в уравнениях двух знаков верхний (нижний) соответствует C^+- (C^-)-характеристике.

Для кривых КТ, начинающихся на ударной поляре вне звуковой окружности в точках, соответствующих УВ слабого семейства, к УВ ($\varphi = \varphi_{SW}$) примыкает сектор сверхзвукового (M > 1), но конически дозвукового течения (см. рис. 2,*а*). При $\varphi = \varphi_{N0}$ на кривой КТ $\mathrm{M}_n = 1$. Для кривых КТ, начинающихся на ударной поляре внутри звуковой окружности (в точках, соответствующих УВ сильного семейства), к УВ примыкает сектор дозвукового течения (см. рис. 2,*б*). Однако при $\varphi = \varphi_{N0}$ на кривой КТ $\mathrm{M}_n = 1$, поэтому на данном луче в общем случае $\mathrm{M} > \mathrm{M}_n = 1$, и при некотором $\varphi_{\mathrm{M}1} \geqslant \varphi_{N0}$ происходит переход через скорость звука (M $= 1$).

Если допустить обтекание остроконечной кормовой части тела вращения с ненулевым углом заострения ($\theta_o < 0$) без торможения потока в его концевой точке o, то в силу неравенства $V_o \sin\theta_o \neq 0$ такое течение будет локально-коническим при любом $V_o > 0$. Из условия непротекания на теле следует, что $N_o = a_o^2 > 0$, а непрерывное изменение знака N невозможно. Это видно на рис. 3, на котором приведены кривые КТ, рассчитанные для различных значений θ_o и V_o. Поверхности тела соответствуют углы $\varphi_o = \pi + \theta_o$ и начальные точки кривых КТ, лежащие на прямых $v/u = \operatorname{tg}\theta_o$. Кривые КТ заканчиваются при $N = 0$, чему соответствуют углы $\varphi = \varphi_{N0}$. Рассчитанные ЛКТ, оставаясь, как и на поверхности тела, конически дозвуковыми, существенно различаются при сверх- и дозвуковых скоростях V_o. При $V_o \geqslant 1$ значения φ_o, φ_{N0} близки и лучи с углом наклона $\varphi = \varphi_{N0}$, являющиеся нормалями к кривым КТ, как и лучи с углом наклона $\varphi = \varphi_o$, лежат во втором квадранте плоскости (x, y) с началом координат в точке o. При $V_o < 1$ направление лучей, расположенных под углом $\varphi = \varphi_{N0}$, близко к направлению оси x. Тем не менее все построенные конически дозвуковые течения нельзя продолжить за луч, направленный под углом $\varphi = \varphi_{N0}$, и обтекание остроконечной кормовой части с углом $\theta_o < 0$ возможно только при полном торможении потока в точке o. В этом случае при конечном изменении угла θ в этой точке $V\sin\theta \to 0$ при $r \to 0$, и уравнения (1.1) с левыми и правыми частями одного порядка остаются уравнениями в частных производных в сколь угодно малой окрестности острия.

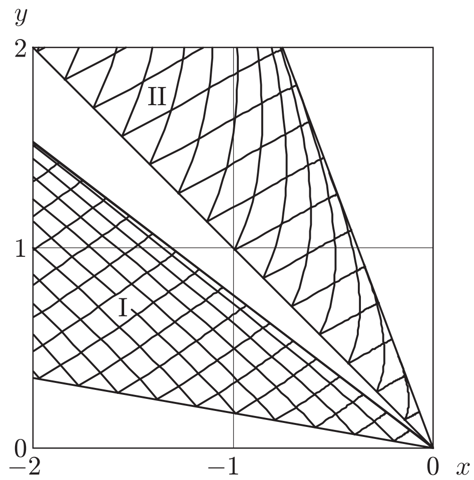

Рис. 4. $C^{\pm}$-характеристики в плоскости (x, y) при различных значениях θ_o, V_o:
I — $\theta_o = -15°$, $V_o = 1{,}2$; II — $\theta_o = -45°$, $V_o = 1{,}05$

В плоскости (x, y) $C^{\pm}$-характеристики КТ получаются путем интегрирования уравнений [13]

$$\frac{y_u}{\sin(\theta \pm \mu)} = \frac{x_u}{\cos(\theta \pm \mu)} = \frac{y \sin(\varphi - \theta \pm \mu)}{V \sin\varphi \sin\theta \sin^2\mu}. \tag{2.2}$$

При выводе уравнений $C^{\pm}$-характеристик учитывалось, что на них $dy/dx = \operatorname{tg}(\theta \pm \mu)$. Результаты интегрирования для двух пар значений θ_o, V_o приведены на рис. 4 с $C^{\pm}$-характеристиками между лучами, направленными под углами $\varphi = \varphi_o$ и $\varphi = \varphi_{N0}$.

КТ А. Буземана [1–7] и А. А. Никольского [3–7, 9] примыкают к равномерному потоку по C^-- и C^+-характеристикам с углами $\varphi = \varphi_\infty = \pi - \mu_\infty$ и μ_∞ соответственно. На таких характеристиках $N = v = \theta = 0$, а согласно уравнению (1.4) и второму уравнению (1.3) справа от них $(N_u)_{\infty+} = (V\rho^3 a^4 \omega_{pp})_\infty$ (индекс “+” соответствует значению разрывной производной справа от характеристики). При отходе от этих характеристик, выбрав в качестве независимой переменной компоненту скорости v и ограничившись совершенным газом, для определения N, φ, u получаем

$$\frac{dN}{dv} = N \frac{\sin\varphi \sin 2(\varphi - \theta)}{v \sin^2\mu \cos\varphi} + (\gamma + 1)V \frac{\sin(\varphi - \theta)}{\cos\varphi},$$
$$\frac{d\varphi}{dv} = -N \frac{\operatorname{tg}\varphi}{a^2 v}, \qquad \frac{du}{dv} = -\operatorname{tg}\varphi, \qquad N = a^2 - (u \sin\varphi - v \cos\varphi)^2. \tag{2.3}$$

Из (2.3) для определения N вблизи разрывной характеристики (при малых v, N, $\delta\varphi = \varphi - \varphi_\infty$ и $\delta u = u - V_\infty$) получаем уравнение Риккати (верхние знаки — для КТ А. А. Никольского, нижние — для КТ А. Буземана)

$$\frac{dN}{dv} = \frac{2 \mp fv}{v} N - \frac{c}{v} N^2 \pm b + gv + \ldots = \frac{2N \pm bv - cN^2 \mp fvN + gv^2}{v} + \ldots, \tag{2.4}$$

где

$$b = \frac{\gamma + 1}{\operatorname{ctg}\mu_\infty} V_\infty, \qquad c = \frac{2}{V_\infty^2 \sin^2\mu_\infty},$$
$$f = \frac{\gamma + 1 - 4\cos^2\mu_\infty}{2V_\infty \sin\mu_\infty \cos^3\mu_\infty}, \qquad g = (\gamma + 1) \frac{\gamma + 1 - 2\cos^2\mu_\infty}{2\cos^4\mu_\infty}.$$

При получении уравнения (2.4) правая часть первого уравнения (2.3) преобразовывалась с учетом того, что согласно выражению для N и интегралу полной энтальпии в главных порядках $\delta\varphi$ — линейная форма v, N и δu, а в силу третьего уравнения (2.3) $\delta u = -v \operatorname{tg}\varphi_\infty + \ldots$; точка $N = v = 0$ — особая точка первого уравнения (2.3) и уравнения (2.4).

В окрестности особой точки решением уравнения Риккати (2.4) является разложение

$$N = \mp\frac{(\gamma+1)V_\infty}{\operatorname{ctg}\mu_\infty}\, v + (\gamma+1)\,\frac{\gamma+1-2(2\gamma+3)\cos^2\mu_\infty}{2\cos^4\mu_\infty}\, v^2\ln|v| + Cv^2 + \ldots \tag{2.5}$$

с постоянной интегрирования C. Подставляя N из (2.5) в линеаризованное относительно $\delta\varphi$ второе уравнение (2.3), получаем линейное уравнение для $\delta\varphi$, проинтегрировав которое находим

$$\delta\varphi = \frac{(\gamma+1)v}{V_\infty\cos^2\mu_\infty} \mp (\gamma+1)\,\frac{\gamma+1-2(2\gamma+3)\cos^2\mu_\infty}{4V_\infty^2\sin\mu_\infty\cos^5\mu_\infty}\, v^2\ln|v| \pm$$
$$\pm\,\frac{(\gamma+1)[5(\gamma+1)-2(4\gamma+1)\cos^2\mu_\infty]-4C\cos^4\mu_\infty}{8V_\infty^2\sin\mu_\infty\cos^5\mu_\infty}\, v^2 + \ldots. \tag{2.6}$$

После подстановки (2.6) в третье уравнение (2.3) и интегрирования получаем

$$\delta u = \mp\frac{v}{\operatorname{ctg}\mu_\infty} - \frac{(\gamma+1)v^2}{2V_\infty\cos^4\mu_\infty} \pm (\gamma+1)\,\frac{\gamma+1-2(2\gamma+3)\cos^2\mu_\infty}{12V_\infty^2\sin\mu_\infty\cos^7\mu_\infty}\, v^3\ln|v| \mp$$
$$\mp\,\frac{(\gamma+1)[41(\gamma+1)-14(4\gamma+3)\cos^2\mu_\infty]-12C\cos^4\mu_\infty}{72V_\infty^2\sin\mu_\infty\cos^7\mu_\infty}\, v^3 + \ldots. \tag{2.7}$$

Решения (2.5)–(2.7) с одной постоянной интегрирования C позволяют строить однопараметрическое семейство начальных участков соответствующих КТ, примыкающих к равномерному потоку. Для рассматриваемых течений угол φ должен уменьшаться, поэтому значение $\delta\varphi$ должно быть отрицательным, тогда в соответствии с главным слагаемым решения (2.6) отрицательным будет и v. Следовательно, для КТ в диффузоре А. Буземана, которое примыкает к равномерному потоку по C^--характеристике, в силу решения (2.7) с нижним знаком величина u, а значит и V, будет уменьшаться (КТ торможения). При этом из решения (2.5) с нижним знаком следует, что в этом КТ значение N становится отрицательным, а течение — конически сверхзвуковым до луча, направленного под углом $\varphi = \varphi_{N0} > 0$. За этот луч рассматриваемое КТ продолжить нельзя, однако по любому лучу, расположенному под углом $\varphi_\infty > \varphi > \varphi_{N0}$, можно направить УВ, за которой разность N принимает положительные значения, а течение становится конически дозвуковым. Ниже показано, каким образом его можно продолжить за УВ. В противоположность этому течению КТ А. А. Никольского вблизи кормовых частей, начальные участки которых описываются решениями (2.5), (2.7) с верхними знаками, являются конически дозвуковыми течениями разрежения до луча с углом наклона $\varphi = \varphi_{N0} > 0$.

Непрерывно примыкающие к равномерному потоку КТ А. Буземана и А. А. Никольского описаны в работах [1, 3–7], однако примеры таких КТ, построенные еще в докомпьютерную эпоху, до последнего времени были лишь у авторов этих КТ (один диффузор для $\mathrm{M}_\infty = 3$ — в [2] и десять кормовых частей при $\mathrm{M}_\infty = 1{,}2$; 1,5; 1,7; 2,0 — в [9]). Исключения составляют два примера, приведенные в [12]. В расчетах, выполненных для этих примеров, обнаружены особенности, требующие отдельного исследования.

Рассмотрим поведение интегральных кривых первого уравнения (2.3) и следующего из него уравнения (2.4) в окрестности узла $N = v = 0$. Отбрасывая квадратичные члены в числителе правой части уравнения (2.4), получаем решение (2.5) без слагаемого с $v^2 \ln |v|$. Первое решение с логарифмическим слагаемым построил А. Буземан [2] (см. также [3, 12]). При $v \to 0$ это слагаемое преобладает над Cv^2 с константой C, определяющей однопараметрическое семейство решений. Учет логарифмического слагаемого в решении (2.5) изменяет выражения (2.6), (2.7) для φ и u и приводит к тому, что третьи производные по u от v, N и φ на начальной характеристике становятся бесконечными (при $u \to V_\infty$). Вследствие этого правильное определение влияния величины C на решение также возможно только при значительном удалении от узла, т. е. при не очень малых $\Delta = |v|$. Для проверки точности разложений (2.5)–(2.7) при выбранном начальном значении $v = -\Delta$ по формулам (2.6), (2.7) определялись значения $\varphi(-\Delta)$ и $u(-\Delta)$, а затем от них уравнения (1.3) интегрировались по u до значения $u = V_\infty$ (или до $v = 0$). В типичных примерах ($\mathrm{M}_\infty = 3$, $-50 \leqslant C \leqslant 50$, $\Delta = 0{,}01$) отклонение от нуля значений N и v при $u = V_\infty$ (или $\delta\varphi$ и δu при $v = 0$) не превышало 10^{-6}. После столь точного для заданного значения V_∞ "вхождения в узел" уравнения (1.3) от тех же значений $\varphi(-\Delta)$ и $u(-\Delta)$ при различных C интегрировались в направлении уменьшения u.

Развитый подход позволяет с высокой точностью находить зависимость решения от числа Маха M_∞ и константы C. Для $\mathrm{M}_\infty = 3$, $\gamma = 1{,}405$ и различных значений C результаты расчетов представлены на рис. 5–8. На рис. 5,*а* показано изменение N в интервале от $N = 0$ при $\varphi = \varphi_\infty \approx 2{,}802$ до $N = 0$ при $\varphi = \varphi_{N0}$. Сплошные кривые на рис. 5,*б* для тех же C соответствуют углам наклона вектора скорости θ_+ за УВ, направленными по соответствующим лучам с углом наклона $\varphi = \text{const}$. Для кривых *1–5* эти углы отрицательны, для кривой *6* ($C = -32{,}0131$) впервые в одной точке значение θ_+ становится равным нулю, на кривых *7–10* ($C < -32{,}0131$) таких точек две, а между ними углы θ_+ положительные. Пунктирные кривые на рис. 5 соединяют точки, соответствующие звуковой скорости потока за УВ ($\mathrm{M}_+ = 1$). Между ними расположены УВ сильного семейства с $\mathrm{M}_+ < 1$. От $\varphi = \varphi_\infty$ до кривой *11* и от кривой *12* до $\varphi = \varphi_{N0}$ находятся лучи с углом наклона $\varphi = \text{const}$ (УВ слабого семейства с $\mathrm{M}_+ > 1$).

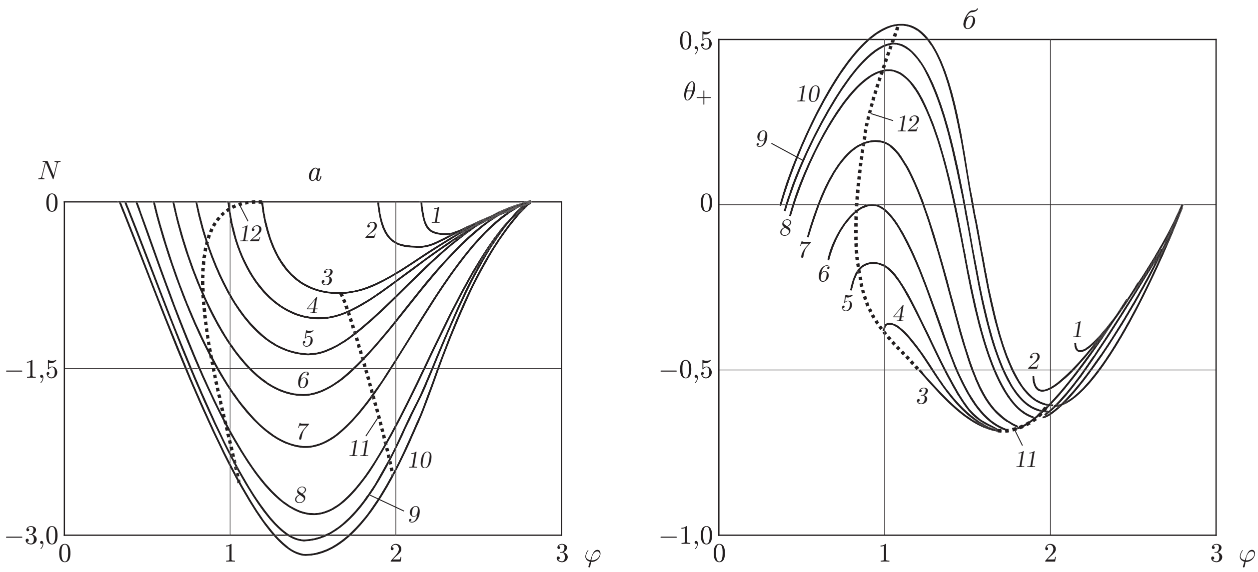

Рис. 5. Зависимости $N(\varphi)$ (*а*) и $\theta_+(\varphi)$ (*б*) при $\mathrm{M}_\infty = 3$, $\gamma = 1{,}405$ и различных значениях C:
1 — $C = -31{,}9731$, *2* — $C = -31{,}9781$, *3* — $C = -31{,}9831$, *4* — $C = -31{,}9860$, *5* — $C = -31{,}9931$, *6* — $C = -32{,}0131$, *7* — $C = -32{,}1130$, *8* — $C = -33{,}6131$, *9* — $C = -40{,}0$, *10* — $C = -100{,}0$; *11, 12* — звуковая скорость потока за УВ

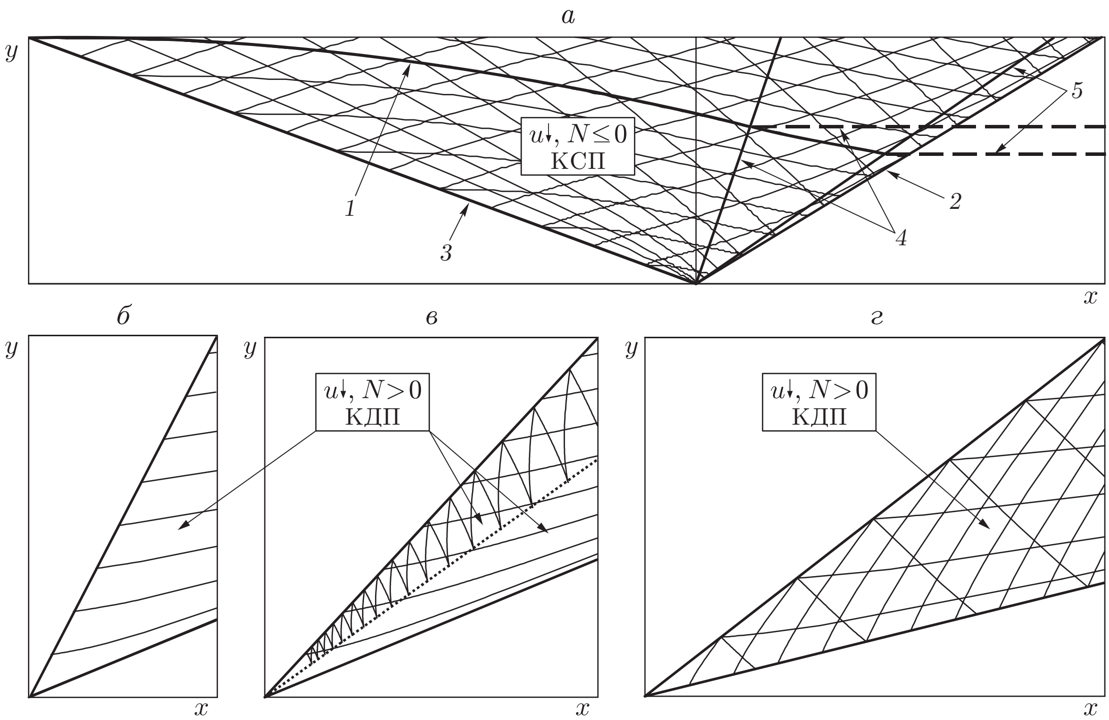

Рис. 6. Области конических сверхзвукового и дозвукового течений в ТДБ (*а*) и в диффузорах с конусом (*б–г*) при $\mathrm{M}_\infty = 3$, $C = -32{,}1130$:
б — $\varphi_{SW} = 63°$, *в* — $\varphi_{SW} = 48°$, *г* — $\varphi_{SW} = 38°$; *1* — линия тока, *2* — луч с углом наклона $\varphi = \varphi_{N0}$, *3* — начальная C^--характеристика, *4* — УВ сильного семейства, *5* — УВ слабого семейства; пунктирная линия — звуковая линия $\mathrm{M} = 1$

Описанное выше качественное изменение решения имеет место в крайне узком диапазоне значений константы C. Вне этого интервала такие изменения отсутствуют. При $C > -31{,}9731$ кривые стягиваются к точке $\varphi = \varphi_\infty$ и принципиально не отличаются от кривых *1, 2*. При $C < -33{,}6131$ увеличение $|C|$ приводит к быстрому сближению результатов (кривые *8–10*).

Традиционный диффузор А. Буземана (ТДБ) с равномерным потоком за УВ, идущей из совпадающего с началом координат центра коничности, получается при $\theta_+ = 0$. Как следует из рис. 5,*б*, при $\mathrm{M}_\infty = 3$ такие диффузоры можно построить при $C \leqslant -32{,}0131$ (случаю $C = -32{,}0131$ соответствует единственный ТДБ с дозвуковым потоком на выходе). Для каждого значения $C < -32{,}0131$ получается пара ТДБ, причем уже при незначительном уменьшении C один ТДБ — с УВ сильного ($\varphi = \varphi_{SW1}$) семейства, а другой — с УВ слабого ($\varphi = \varphi_{SW2}$) семейства. До первой УВ, т. е. при $\varphi_{SW1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_\infty$ оба решения совпадают. На рис. 6,*а* приведен пример такого КТ, соответствующий кривым *7* на рис. 5 ($\mathrm{M}_\infty = 3$, $C = -32{,}1130$). При отсутствии в силу коничности течения шкалы́ на осях x и y на рис. 6,*а* показаны линия тока, луч $\varphi = \varphi_{N0}$, $C^\pm$-характеристики включая начальную (линия *3*) и УВ сильного и слабого семейств, за которыми $\theta_+ = 0$.

Уравнения линий тока

$$x_u = \frac{-yN\cos\theta}{a^2 v \sin\varphi \sin(\varphi - \theta)}, \qquad y_u = \frac{-yN\sin\theta}{a^2 v \sin\varphi \sin(\varphi - \theta)} \tag{2.8}$$

получены с учетом того, что на них $dy/dx = \operatorname{tg}\theta$. Линии тока можно также строить по эквивалентным уравнениям (2.8) конечным соотношениям

$$y^2\rho(u + vv_u) = y^2\rho(u - v\operatorname{ctg}\varphi) = G, \qquad x = -yv_u = y\operatorname{ctg}\varphi,$$

где параметр G имеет постоянное значение на каждой линии тока. В приближении идеального газа любую линию тока до УВ (линий *4* или *5*) можно заменить контуром, продолженным за УВ горизонтальной прямой. На рис. 6,*а* одна такая линия тока показана сплошной кривой *1*, а два ее продолжения — штриховыми прямыми *4, 5*. Полученные в этом примере ТДБ при $\varphi_{SW1} \approx 70°$, $\mathrm{M}_{-1} \approx 2{,}09$ и $\varphi_{SW2} \approx 34°$, $\mathrm{M}_{-2} \approx 1{,}80$ при поджатиях по $y \approx 0{,}64$ (линии *4*), $y \approx 0{,}53$ (линии *5*) тормозят поток до значений $\mathrm{M}_{+1} \approx 0{,}60$ и $\mathrm{M}_{+2} \approx 1{,}48$. На рис. 6 и, как правило, далее масштабы по осям x и y одинаковы. Направления изменения u, ведущего к уменьшению полярного угла φ, показаны стрелками ($\uparrow$ — увеличение, $\downarrow$ — уменьшение).

При $\varphi_{SW2} < \varphi_{SW} < \varphi_{SW1}$ для каждой УВ, за которой согласно рис. 5,*б* $\theta_+ > 0$, можно построить КТ, соответствующее обтеканию кругового конуса с вершиной в том же центре коничности. Такое КТ получается путем интегрирования уравнений (1.3) от $\varphi = \varphi_{SW}$, $u = u_+$ и прочих параметров за УВ в направлении уменьшения u до выполнения равенства $\varphi = \theta$. Результаты построения таких КТ при $\mathrm{M}_\infty = 3$, $C = -32{,}1130$ представлены на рис. 6,*б*–*г*. Показаны УВ (сплошные прямые слева), образующие конусов (сплошные прямые справа), линии тока, а при $\mathrm{M} \geqslant 1$ — $C^{\pm}$-характеристики. До каждой УВ линии тока и $C^{\pm}$-характеристики тождественны представленным на рис. 6,*а*. Слева от УВ поток конически сверхзвуковой (КСП), справа — конически дозвуковой (КДП). На рис. 6,*б* конус с углом $\theta_c = 23°$ обтекается с УВ сильного семейства ($\mathrm{M}_+ \approx 0{,}71$, $\mathrm{M}_c \approx 0{,}63$). На рис. 6,*в* конус с практически таким же углом θ_c обтекается УВ слабого семейства. Однако поток, сверхзвуковой за УВ ($\mathrm{M}_+ \approx 1{,}05$), тормозится (пунктирная прямая — звуковая линия $\mathrm{M} = 1$) и становится дозвуковым ($\mathrm{M}_c \approx 0{,}97$). На рис. 6,*г* конус с углом $\theta_c \approx 14°$ обтекается всюду сверхзвуковым потоком ($\mathrm{M}_+ \approx 1{,}33$, $\mathrm{M}_c \approx 1{,}26$).

Для реализации (в приближении идеального газа) КТ в ТДБ (см. рис. 6,*а*) и в диффузорах с конусом (см. рис. 6,*б*–*г*) помимо задания их контуров по линиям тока необходимо обеспечить определенные условия истечения на выходе из диффузора. Это несложно сделать, если на выходе поток является сверхзвуковым равномерным или неравномерным, как в ТДБ с УВ слабого семейства (см. рис. 6,*г*) (при увеличении x неравномерность сверхзвукового потока на выходе быстро уменьшается). Сложнее обеспечить указанные условия в случае, показанном на рис. 5,*в*, и еще более сложно для КТ с УВ сильного семейства. Теоретически для реализации таких КТ давление на выходе должно совпадать с рассчитанным.

Течения, представленные на рис. 6, не исчерпывают всего многообразия КТ, связанных с диффузором А. Буземана. На рис. 7, 8 представлены другие КТ, построенные в кольцевых каналах, образованных линиями тока этого течения, и КТ за УВ, такими что за ними согласно рис. 5,*б* угол θ_+ является отрицательным. На рис. 7 приведены результаты расчета КТ разрежения за УВ, направленными по лучам с углами наклона $\varphi_{SW} \approx 108$; 103; 33°, при $\mathrm{M}_\infty = 3$, $C = -32{,}1130$. При равных масштабах по осям x и y показаны УВ (линии *3*), луч с углом наклона $\varphi = \varphi_{N0}$ (линии *4*), на котором $N = 0$, по две (см. рис. 7,*а,б*) или одной (см. рис. 7,*в*) линии тока (кривые *1, 2*) и по одной C^+- и C^--характеристике КТ. Кривая *1* — линия тока, вышедшая из точки $y = 1$, $x = -\operatorname{ctg}\mu_\infty = -(\mathrm{M}_\infty^2 - 1)^{1/2} \approx -2{,}83$ на граничной C^--характеристике (линия *3* на рис. 6,*а*). Во всех случаях при $\varphi_{N0} < \varphi \leqslant \varphi_{SW}$ КТ, оставаясь конически дозвуковыми, разгоняются (в случае, показанном на рис. 7,*б*, — до $\mathrm{M} > 1$ с переходом через звуковую линию).

На рис. 7,*а* рассматриваемое КТ возможно в кольцевом канале, ограниченном (в плоскости (x, y)) сверху линией тока *1*, слева — граничной C^--характеристикой, справа — C^--характеристикой if, которая начинается в точке i пересечения линии тока *1* и луча с углом наклона $\varphi = \varphi_{N0}$ и заканчивается в точке f на УВ. В точку f приходит и

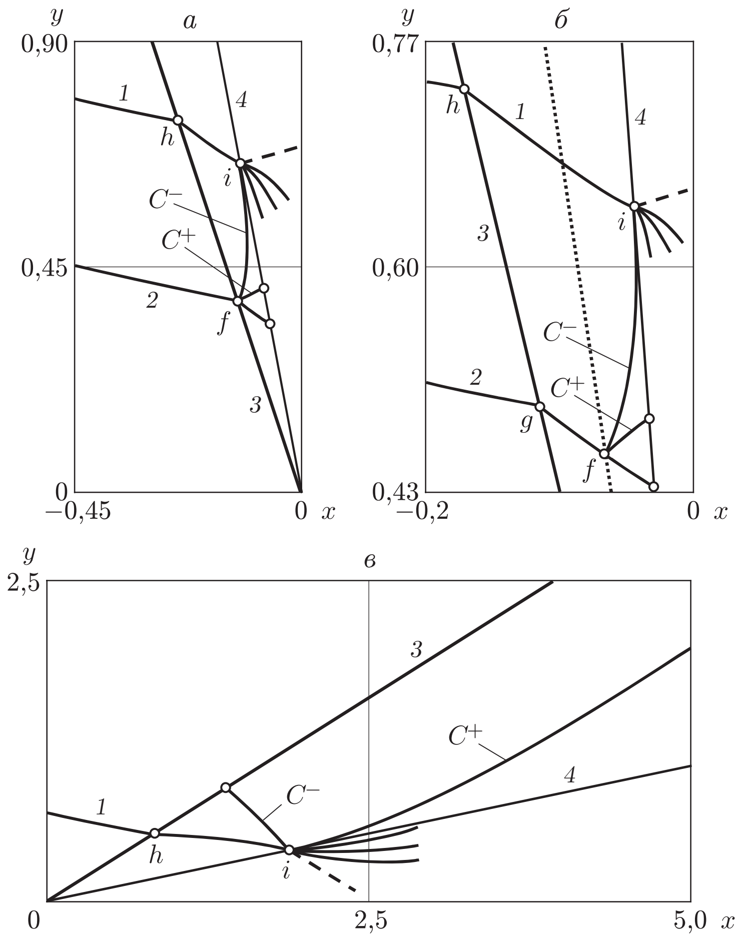

Рис. 7. Конические течения разрежения за УВ, направленными по лучам с углами наклона $\varphi_{SW} = 108^\circ$ (*а*), $\varphi_{SW} = 103^\circ$ (*б*), $\varphi_{SW} = 33^\circ$ (*в*):
1, 2 — линии тока; *3* — УВ (*а* — $\mathrm{M}_+ = 1{,}05$, *б* — $\mathrm{M}_+ = 0{,}93$, *в* — $\mathrm{M}_+ = 1{,}54$); *4* — линия $\varphi = \varphi_{N0}$; пунктирная прямая — звуковая линия; штриховые линии — стенки после излома

линия тока *2*, ограничивающая это КТ снизу. Для его реализации в точке i на контуре верхней стенки канала должен быть излом, обтекаемый с образованием пучка волн разрежения. Стенки после излома показаны штриховыми линиями, а пучок волн разрежения — кривыми с центром в точке i. Здесь и далее отличные от if характеристики пучков не рассчитывались.

КТ в четырехугольнике $ifhg$ на рис. 7,*б* — аналог нереализуемого ЛКТ, представленного на рис. 2,*а*, и обобщение КТ [10], схема которого приведена на рис. 9,*а*. Отличие КТ, показанного на рис. 7,*б*, заключается в том, что как двумерное (осесимметричное) оно является смешанным: при $\mathrm{M} < 1$ — между УВ и прямолинейной (но не прямой, т. е. не нормальной оси x и вектору скорости) звуковой линией, при $\mathrm{M} > 1$ — от звуковой линии до C^--характеристики if. В отличие от смешанного осесимметричного течения, которое возможно при обтекании кругового конуса (см. рис. 6,*в*), в данном случае дозвуковой поток предшествует сверхзвуковому. На рис. 9,*б* приведена схема другого КТ из работы [10]. Как и на рис. 7,*а*, эти КТ возможны в криволинейных треугольниках, расположенных на конечном расстоянии от оси симметрии. Одна из сторон треугольника КТ — прямолинейный отрезок УВ. В решениях [10] поток перед УВ (см. рис. 7,*а*) или за ней (см. рис. 7,*б*) является равномерным осевым ($\theta \equiv 0$).

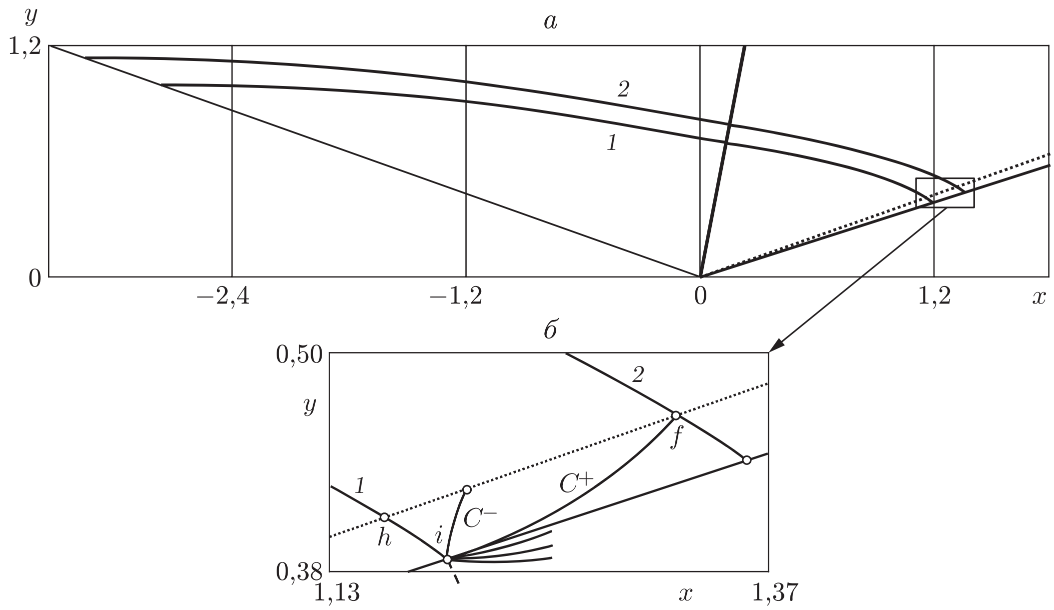

Рис. 8. Коническое течение при $M_\infty = 3$, $C = -32{,}2381$:
а — кольцевая область КТ, *б* — концевой участок кольцевой области КТ; *1, 2* — линии тока; пунктирная прямая — звуковая линия

Если в КТ разрежения за УВ $\varphi_{N0} < \pi/2$, то if — отрезок C^+-характеристики, а не C^--характеристики, как в случаях, представленных на рис. 7,*а,б*. При этом линия тока *2* (и точка f) располагается не под линией тока *1*, а над ней. Такие КТ представлены на рис. 7,*в* ($M_+ \approx 1{,}54$, $\theta_+ \approx -0{,}044$) с линией тока *2*, лежащей вне рисунка ($x_f \approx 15{,}4$, $y_f \approx 9{,}83$ — координаты точки прихода на УВ C^+-характеристики if), а также на рис. 8. Линии, приведенные на рис. 7,*в*, рассчитаны и построены для точки кривой *7* на рис. 5,*б*, расположенной вблизи ее левого конца. На рис. 5,*б* видна особенность таких КТ: чем ближе значение φ_{SW} к φ_{N0}, тем дальше от линии тока *1* расположена линия тока *2* и тем больше треугольник ifh. Однако вследствие торможения сверхзвукового потока, обтекающего "штриховое" тело вращения, возникает УВ, которая, входя в указанный треугольник, ограничивает построенное КТ справа.

На рис. 8 ($M_\infty = 3$, $C = -32{,}2381$) во всей области за УВ ($\varphi_{SW} \approx 79°$), за исключением малого сектора ($19{,}45° \geqslant \varphi \geqslant \varphi_{N0} = 17{,}99°$), КТ является дозвуковым, как на рис. 2,*б*, 7,*в*, и ограничено справа не C^--, а C^+-характеристикой. Как и КТ на рис. 7,*в*, линией тока *2* оно ограничено сверху. Угол наклона потока на УВ изменяется от $\theta_- = -10{,}4°$ до $\theta_+ = -9{,}5°$, а затем поток поворачивается по часовой стрелке до угла, близкого к $-38°$, на луче с углом наклона $\varphi = \varphi_{N0}$. За УВ сильного семейства, идущими к оси симметрии ($\varphi_{SW} > \pi/2$), также можно построить "кольцевые" КТ — аналоги КТ, представленных на рис. 7,*б*, 8.

Конически дозвуковые КТ разрежения [9] с $\theta \leqslant 0$, $M \geqslant M_\infty$ (равенства $\theta = 0$, $M = M_\infty$ имеют место на начальной характеристике) примыкают к невозмущенному потоку по C^+-характеристике. Эти КТ строятся с использованием разложений (2.6), (2.7) с верхними знаками при $\delta\varphi = \varphi - \mu_\infty$. Расчеты показали, что в отличие от КТ [2] решения, представляющие интерес для профилирования кормовых частей, получаются при положительных значениях постоянной C. При этом ее монотонному росту соответствует непрерывное хорошо наблюдаемое изменение КТ (рис. 10,*а*). Это подтверждает поведение линий тока, рассчитанных для $M_\infty = 3$, $C = 200n^2$ при $n = 0 \div 11$ на рис. 10,*а*: при разных масштабах

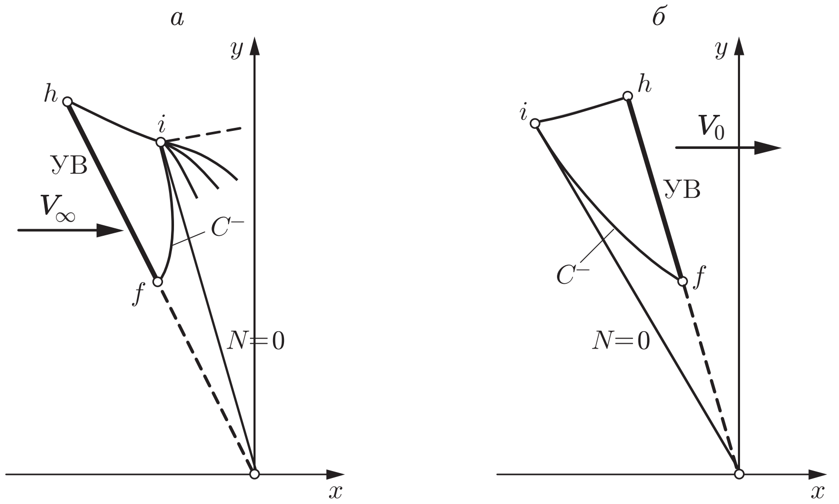

Рис. 9. Схемы конических течений [10]:
а — перед УВ, *б* — за УВ

по осям координат все линии тока выходят из точки $x = \operatorname{ctg}\mu_\infty \approx 2{,}83$, $y = 1$ начальной C^+-характеристики; $X = x - \operatorname{ctg}\mu_\infty$; $\gamma = 1{,}4$.

На рис. 10,*б* для $\mathrm{M}_\infty = 3$, $C = 300$ при одинаковых масштабах по осям представлены линии тока, $C^\pm$-характеристики и луч с углом наклона $\varphi = \varphi_{N0} = 2{,}46°$, касаясь которого уходят вправо и вверх все C^+-характеристики данного КТ. На нем $\mathrm{M} = 3{,}530$, $\theta = -14°$, а величина y линий тока равна половине ее значения на начальной C^+-характеристике. Все C^+-характеристики, выходящие с луча, направленного под углом $\varphi = \varphi_{N0}$, при удалении от начала координат пересекают любой луч с углом наклона $\varphi < \varphi_\infty$.

Рассмотрим еще один пример: КТ за детонационной волной Чепмена — Жуге (ДВЧЖ) при обтекании кругового конуса [8]. При обтекании инертным газом конуса с конечным углом при вершине за УВ вплоть до поверхности конуса $N > 0$ и течение является конически дозвуковым. Иная ситуация возможна при обтекании конуса горючей смесью с ДВЧЖ, за которой $v_J > 0$, $N = 0$. За ДВЧЖ правая часть уравнения (1.4) по-прежнему является отрицательной, однако при отходе от ДВ разность N становится положительной при уменьшении u и отрицательной при увеличении u. Согласно третьему уравнению (1.3) в обоих случаях φ будет уменьшаться, следовательно, для ДВЧЖ интегрирование уравнений (1.3) возможно в направлении и уменьшения, и увеличения u. В случае уменьшения u согласно второму уравнению (1.3) компонента скорости v растет, $\operatorname{tg}\theta = v/u > 0$ также растет и вогнутые линии тока при $u \to u_c$ приближаются к лучу с углом наклона $\varphi = \theta_c$, совпадающему с образующей конуса, на которой в силу условия непротекания $V_n = 0$, $N = a^2 > 0$. В таком решении между ДВЧЖ и поверхностью конуса $N > 0$, т. е. течение является конически дозвуковым. Несмотря на то что в течении за ДВЧЖ направление луча с углом наклона $\varphi = \varphi_J$ совпадает с направлением C^+-характеристики, на нем не выполняется условие совместности (уравнение (2.1) со знаками “+”). Поэтому, как и рассмотренные выше звуковые лучи, луч с углом наклона $\varphi = \varphi_J$ является огибающей C^+-характеристик, подходящих к нему снизу по касательной.

При интегрировании уравнений (1.3) в направлении увеличения u согласно второму уравнению (1.3) v уменьшается, $\operatorname{tg}\theta = v/u > 0$ также уменьшается и выпуклые линии тока при некотором $u = V_0 > u_J$ и $\varphi = \varphi_0 < \varphi_J$ могут стать горизонтальными: $v = \theta = 0$. В то же время, поскольку разность N, став отрицательной, сначала растет по модулю и компонента скорости v, а значит, и первое слагаемое уменьшаются, знак правой ча-

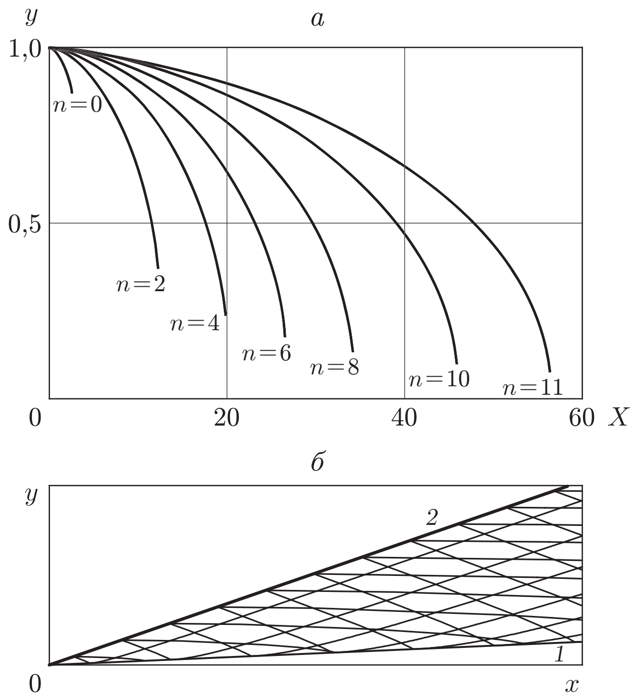

Рис. 10. Линии тока КТ при $M_\infty = 3$, $C = 200n^2$ и различных значениях n (*а*) и линии тока, $C^{\pm}$-характеристики, луч, направленный под углом $\varphi = \varphi_{N0} = 2{,}46°$ (*1*), начальная C^+-характеристика (*2*) КТ при $M_\infty = 3$, $C = 300$ (*б*)

сти уравнения (1.4) неизбежно изменится. Поэтому, начиная с некоторого u, правая часть выражения (1.4) становится положительной, и отрицательная разность N увеличивается (уменьшаясь по модулю). Вследствие уменьшения v в знаменателе первого слагаемого правой части (1.4) разность N будет увеличиваться с ускорением.

Рассмотрим возможность одновременного обращения в нуль при $u = V_0$ значений v и N. В этом случае $\varphi = \mu_0$ (μ_0 — угол Маха для $u = V_0$). Поскольку при постоянных параметрах на таком луче компонента скорости v равна нулю, на нем выполняется условие совместности (уравнение (2.1) со знаками "+") для C^+-характеристик. Следовательно, луч с углом наклона $\varphi = \mu_0$ представляет собой C^+-характеристику, а не огибающую таких характеристик, как так же имеющий характеристическое направление, но не удовлетворяющий условию совместности (так как $v > 0$) луч с углом наклона $\varphi = \varphi_J$. Из анализа первого уравнения (2.3) и решения (2.5) следует, что особая точка $N = v = 0$ — узел. При численном построении рассматриваемого КТ узел, собирающий интегральные кривые первого уравнения (2.2), обеспечивает одновременное выполнение равенств $N = 0$, $v = 0$. Однако в данном случае величины V_0, μ_0, заменяющие в уравнении (2.4) и решениях (2.5)–(2.7) величины V_∞, μ_∞, заранее неизвестны и находятся в процессе решения.

При обтекании конуса сверхзвуковым потоком горючей смеси возникновение ДВЧЖ возможно не только при определенном угле конуса (угле Чепмена — Жуге φ_{cJ}), но и при меньших углах. Во втором случае к ДВЧЖ примыкает конически сверхзвуковое течение разрежения, ограниченное конической УВ, а за ней до поверхности конуса имеет место конически дозвуковое течение сжатия. Такое КТ — первый пример автомодельного течения с двумя расходящимися из одной точки сильными разрывами (ДВЧЖ и УВ) "одного семейства". Если q — теплота реакции, отнесенная к квадрату скорости набегающего потока, то возникновение стационарной ДВЧЖ возможно при $q = kq^m$, где $q^m = (1 - M_\infty^{-2})^2/[2(\gamma^2 - 1)]$; $k < 1$.

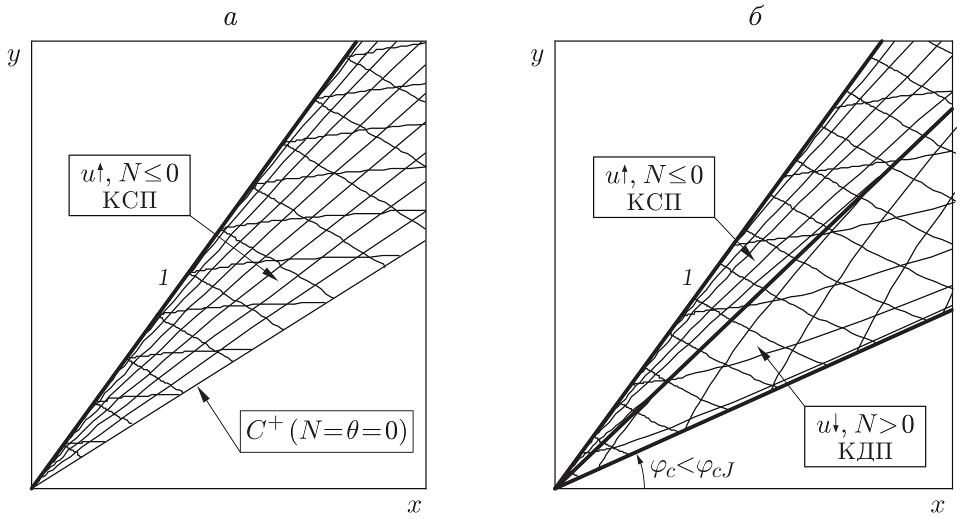

Рис. 11. Коническое течение за ДВЧЖ (*1*) при $\mathrm{M}_\infty = 3$, $k = 0{,}5$:
а — конически сверхзвуковое КТ разрежения, *б* — обтекание конуса с полууглом при вершине $\theta = 22^\circ$

На рис. 11 для $\mathrm{M}_\infty = 3$, $k = 0{,}5$ и соответствующей этим параметрам ДВЧЖ представлены результаты, которые получаются, если уравнения (1.3), (2.2), (2.8) интегрировать от $u = u_J$ за ДВЧЖ в направлении увеличения u (масштабы по осям x, y одинаковые). Рис. 11,*а* соответствует полному разгону конически сверхзвукового течения до C^+-характеристики ($\varphi = \mu_0$), на которой $N = \theta = 0$, $\mu = \mu_0 \approx 29^\circ$. Справа от этой характеристики находится равномерный осевой поток с теми же значениями θ и μ. Линии тока построенного КТ представляют собой выпуклые кривые, а C^+-характеристики, касаясь ДВЧЖ в начальных точках, удаляются от нее вверх и вправо: от ДВ распространяются волны разрежения, сносимые сверхзвуковым потоком от ДВЧЖ. На рис. 11,*б* представлены результаты расчета обтекания конуса с полууглом при вершине $\theta \approx 22^\circ$, меньшим $\varphi_{cJ} \approx 39^\circ$. В этом случае показанное на рис. 11,*а* конически сверхзвуковое течение разрежения сохраняется до УВ с углом $\varphi \approx 40^\circ$. По этому углу и известным параметрам КТ разрежения перед УВ определяются параметры за УВ включая x-компоненту скорости u_+. Путем интегрирования уравнений (1.3), (2.2), (2.8) от $u = u_+$ в направлении уменьшения u до выполнения равенства $\varphi = \theta \approx 22^\circ$ строится конически дозвуковое течение сжатия между УВ и образующей конуса. Линии тока этого КТ представляют собой вогнутые кривые (на УВ кривизна линий тока меняет знак).

Интенсивность УВ — отношение давлений p_+/p_- — зависит от величины M_n таким образом, что $p_+/p_- = 1$ при $\mathrm{M}_n = 1$. УВ конечной интенсивности ($p_+/p_- > 1$) за ДВЧЖ возможны при $0 < k < 1$ и $\mu_0 < \varphi < \varphi_J$. На рис. 12 для $\gamma = 1{,}4$, трех значений числа Маха M_∞ и $0 < k < 1$ приведены зависимости p_+/p_- от $\mu_0/\varphi_J \leqslant \varphi/\varphi_J \leqslant 1$. При фиксированных k и φ/φ_J интенсивность УВ является монотонно возрастающей функцией M_∞. Однако даже при $\mathrm{M}_\infty = \infty$, $k = 0{,}1$ отношение p_+/p_- имеет максимальное значение $p_+/p_- = 1{,}401$, которое при уменьшении γ незначительно уменьшается: $p_+/p_- = 1{,}373$ при $\gamma = 1{,}2$, $p_+/p_- = 1{,}357$ при $\gamma = 1{,}1$.

Рассмотрим случай непрерывного изменения знака N и типа КТ. Это возможно, если к построенному выше сверхзвуковому КТ по C^+-характеристике — лучу с углом наклона $\varphi = \mu_0$ — присоединить КТ А. А. Никольского [9]. В этом КТ параметр u продолжает увеличиваться, а компонента скорости v, в силу второго уравнения (1.3) став отрицательной, растет по модулю. В результате скорость газа увеличивается, давление и плотность

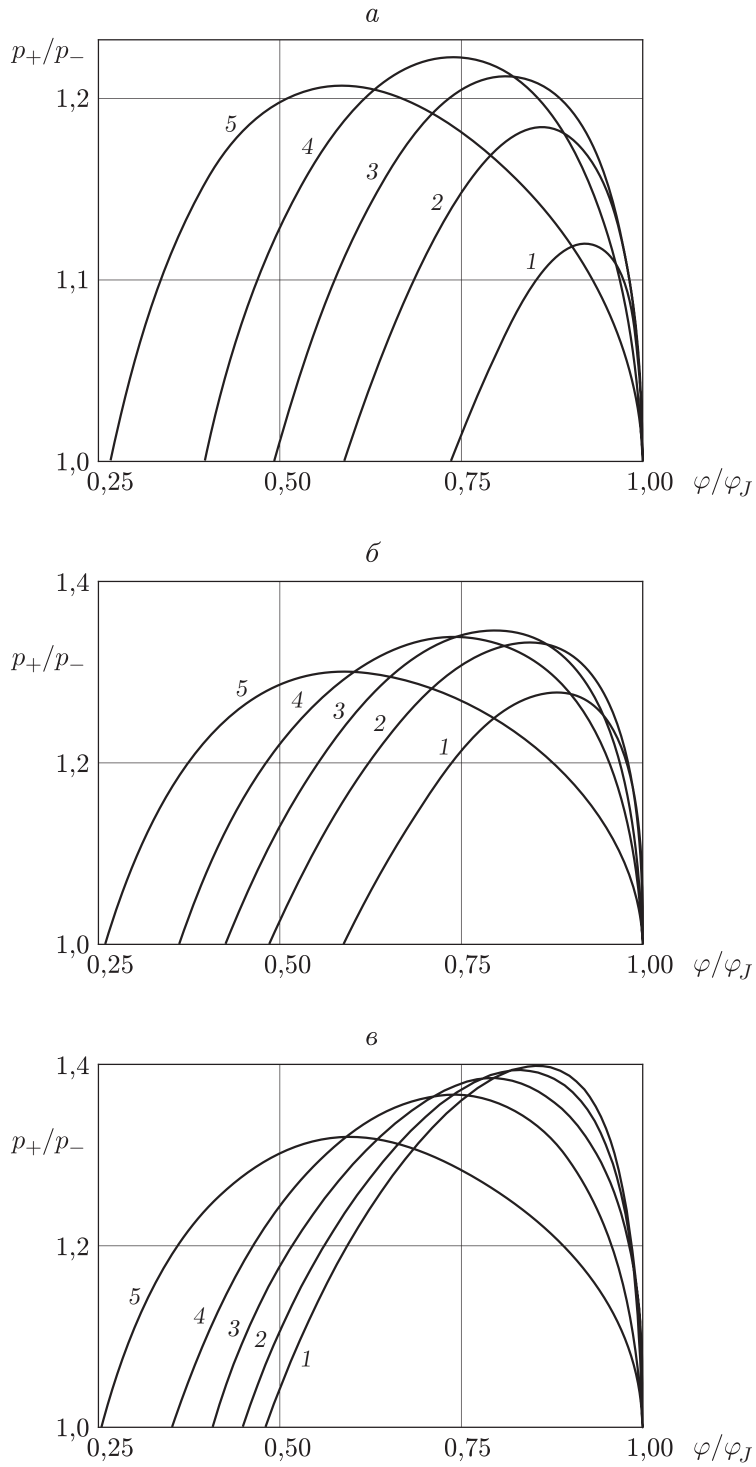

Рис. 12. Зависимости интенсивности УВ от φ/φ_J при $\gamma = 1{,}4$, $\mathrm{M}_\infty = 2$ (*а*), $\mathrm{M}_\infty = 5$ (*б*), $\mathrm{M}_\infty = \infty$ (*в*) и различных значениях k:
1 — $k = 0{,}1$, *2* — $k = 0{,}3$, *3* — $k = 0{,}5$, *4* — $k = 0{,}7$, *5* — $k = 0{,}9$

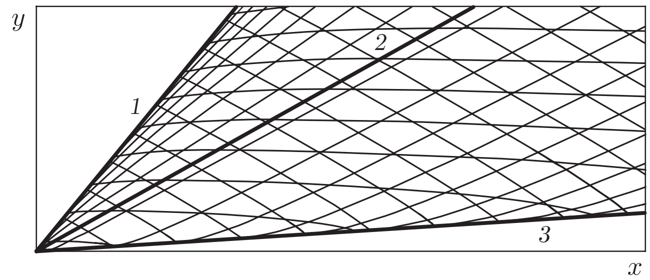

Рис. 13. Объединение конических течений [8] и [9] при $M_\infty = 3$, $k = 0{,}5$:
1 — ДВЧЖ; *2* — луч с углом наклона $\varphi = \mu_0 = 29^\circ$, *3* — луч с углом наклона $\varphi = \varphi_{N0} = 3{,}6^\circ$

уменьшаются, число Маха растет, однако присоединенное КТ разрежения оказывается конически дозвуковым.

В рассматриваемой идеальной постановке описанная комбинация двух КТ соответствует обтеканию уходящего влево полубесконечного цилиндра, продолженного после пересечения с ДВЧЖ линией тока полного (до $v = 0$) течения разрежения [8], а затем линией тока КТ [9]. Ту же кривую, состоящую из двух конечных отрезков плавно состыкованных линий тока, можно рассматривать в качестве внешнего контура тела с протоком, обтекаемого детонирующей смесью.

На рис. 13 приведен пример КТ (линии тока, $C^\pm$-характеристики) [9], присоединенного к КТ полного разрежения [8] за ДВЧЖ при $M_\infty = 3$, $k = 0{,}5$. Конически сверхзвуковой поток разгоняется от $M_J \approx 1{,}60$ до $M_0 \approx 2{,}06$, $\theta_0 = 0$, а затем, перейдя (при $C = 300$) через C^+-характеристику — луч *2* с углом наклона $\varphi = \mu_0 \approx 29^\circ$ — и став конически дозвуковым, продолжает разгоняться до луча с углом наклона $\varphi = \varphi_{N0} \approx 3{,}6^\circ$, на котором $M_{N0} \approx 2{,}56$, $\theta_{N0} \approx -19^\circ$. Как и с ДВЧЖ, с этого луча, касаясь его, уходят вправо и вверх C^+-характеристики.

В данном примере для любой линии тока, принятой в качестве контура тела вращения (с протоком или примыкающего на ДВЧЖ с изломом $\theta_J \approx 12^\circ$ к полубесконечному цилиндру), $y_0/y_J \approx 1{,}07$, $y_{N0}/y_0 \approx 0{,}50$. Таким образом, после незначительного расширения построенное тело по y сужается в два раза, а по площади — в четыре раза. При выпуклом изломе в концевой точке контура правой границей построенного КТ в конечной окрестности этой точки будет уходящая с нее C^+-характеристика (левая граница образующегося при обтекании излома пучка волн разрежения). Однако вследствие торможения текущего к оси симметрии сверхзвукового потока возникает УВ, которая обязательно догонит указанную C^+-характеристику КТ и станет его правой границей.

Заключение. Рассмотренные КТ непрерывно (по C^+- или C^--характеристике) или разрывно (по УВ или ДВ) примыкают к равномерному сверхзвуковому потоку — одному из простейших течений, аналогичных используемым в различных приложениях. Однако этого недостаточно для того, чтобы данное КТ (в приближении идеального газа) могло реализоваться даже при точном задании обтекаемых контуров и граничных условий снизу по потоку. Даже для КТ в традиционном диффузоре А. Буземана с УВ слабого семейства, когда в стационарном режиме условия в выходном сечении тривиальны, возникает проблема “запуска” (выхода на такой режим). Реализация течения с ДВЧЖ и его объединения с течением А. А. Никольского также проблематичны. В силу сказанного выше большинство рассмотренных КТ представляет интерес для теоретических исследований, но не для приложений. Еще большие трудности вызывает изучение КТ с закруткой. Для них проблематично даже задание потока в “начальном” сечении или “теоретическое конструирование” устройств, способных генерировать в этом сечении требуемый закрученный поток.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Курант Р.** Сверхзвуковое течение и ударные волны / Р. Курант, К. Фридрихс. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.
2. **Буземан А.** Осесимметричное коническое сверхзвуковое течение // Газовая динамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. С. 197–218.
3. **Булах Б. М.** Нелинейные конические течения газа. М.: Наука, 1970.
4. **Черный Г. Г.** Газовая динамика. М.: Наука, 1988.
5. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.
6. **Крайко А. Н.** Краткий курс теоретической газовой динамики. М.: Моск. физ.-техн. ин-т, 2007.
7. **Крайко А. Н.** Теоретическая газовая динамика: классика и современность. М.: Торус-пресс, 2010.
8. **Квашнина С. С., Черный Г. Г.** Установившееся обтекание конуса потоком детонирующего газа // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23, вып. 1. С. 182–186.
9. **Никольский А. А.** Конические осесимметрические сверхзвуковые газовые течения разрежения // Сборник теоретических работ по аэродинамике. М.: Оборонгиз, 1957. С. 43–55.
10. **Гродзовский Г. Л.** Сверхзвуковые осесимметричные конические течения с коническими скачками, граничащими с параллельным равномерным потоком // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23, вып. 2. С. 379–383.
11. **Никольский А. А.** О течениях газа вблизи остроконечных задних кромок тел вращения // Сборник теоретических работ по аэродинамике. М.: Оборонгиз, 1957. С. 74–76.
12. **Исакова Н. П., Крайко А. Н., Пьянков К. С., Тилляева Н. И.** Об усилении слабых ударных волн в осесимметричном сверхзвуковом потоке и их отражении от оси симметрии // Прикл. математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 4. С. 625–647.
13. **Крайко А. Н., Тилляева Н. И.** Обтекание конуса горючей смесью с детонационной волной Чепмена — Жуге // Прикл. математика и механика. 2013. Т. 77, вып. 1. С. 3–14.
14. **Kraiko A. N., P'yankov K. S., Tillyaeva N. I.** General theory of axisymmetric conic and locally conic flows and reflection of stationary shock waves from the axis of symmetry // Intern. conf. on methods of aerophys. res. ICMAR, Kazan (Russia), Aug. 19–25, 2012. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: http://www.itam.nsc.ru/users/libr/eLib/confer/ICMAR/2012/009_Kraiko.pdf.
15. **Хабиров С. В.** Конические закрученные течения и их обобщения // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 4. С. 38–47.
16. **Рылов А. И.** К вопросу о невозможности регулярного отражения стационарной ударной волны от оси симметрии // Прикл. математика и механика. 1990. Т. 54, вып. 2. С. 245–249.

Поступила в редакцию 24/XII 2012 г.