Теплофизика и аэромеханика, 2009, том 16, № 1

УДК 532.546:949.8

Численное решение задачи о стационарной неизотермической двухфазной фильтраци методом установления*

О.Б. Бочаров[1], И.Г. Телегин[2]

[1]*Институт водных и экологических проблем СО РАН, Новосибирск*

[2]*Научно-исследовательский и проектный институт “КогалымНИПИнефть”, Тюмень*

E-mail: igtelegin@yandex.ru

Численно изучается структура решений стационарной неизотермической задачи двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей. Исследуется характер сходимости нестационарных решений к стационарным. Показывается, что при различных значениях параметров решение может иметь участок, где $s(x) \equiv 0$ или $s(x) \equiv 1$. Изучается влияние температуры на структуру решений уравнения для водонасыщенности.

Ключевые слова: нестационарная неизотермическая фильтрация, стационарные решения, асимптотическое поведение решений, неизотермическая фильтрация.

ВВЕДЕНИЕ

В процессе изучения вытеснения нефти водой из нефтяных пластов с учетом капиллярных сил наиболее используемой является модель Маскета–Леверетта (МЛ модель) [1]. На основе МЛ модели в работе [2] предложена модель неизотермической фильтрации (МЛТ модель), на примере которой удалось доказать разрешимость основной краевой задачи.

При нахождении решений на достаточно большой временной сетке возникает проблема асимптотического поведения решений для МЛ и МЛТ моделей. Совместные работы в [3], а также работы [4–5] посвящены теоретическому исследованию сходимости нестационарной задачи для МЛ модели к стационарным решениям.

В настоящей работе численно изучается структура стационарных решений МЛТ модели в изотермическом и неизотермическом случаях с помощью численных методов.

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке СО РАН (интеграционный проект № 117).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В однородной пористой среде при отсутствии массовых сил одномерная модель неизотермической двухфазной фильтрации Маскета–Леверетта (МЛТ) имеет вид [2]:

$$\begin{cases} ms_t = (k_0 a_0 (p_{cs} s_x + p_{c\theta}\theta_x) - Q(t)b)_x, \\ \theta_t = (\lambda\theta_x - Q(t)\theta)_x, \end{cases} \tag{1а}$$

где t — время, $x \in [0, L]$ — пространственная переменная, L — расстояние от нагнетательной скважины до эксплутационной, $s = (s_1 - S_1^0)/(1 - S_2^0 - S_1^0)$ — динамическая насыщенность смачивающей фазы (воды), s_1 — истинная насыщенность смачивающей фазы, $\left(S_1^0, S_2^0\right) = \text{const}$ — остаточные водо- и нефтенасыщенности, $\theta \in (\theta_{\min}, \theta_{\max})$ — температура, $m = m_0(1 - S_1^0 - S_2^0)$, $m_0 = \text{const}$ — пористость нефтяного пласта, $k_0 = \text{const}$ — абсолютная проницаемость коллектора, $a_0(s, \theta) = -k_2 b/\mu_2$, $p_s(s, \theta) = (m_0/k_0)^{1/2}\gamma j$ — капиллярное давление, $\gamma(\theta)$ — коэффициент поверхностного натяжения, $j(s)$ — функция Леверетта, $b(s, \theta) = k_1/(k_1 + \mu k_2)$ — коэффициент подвижности вытесняющей фазы, $k_i(s)$ — относительные фазовые проницаемости (k_1 — воды и k_2 — нефти или газа), $\mu = \mu_1/\mu_2$, $\mu_i(\theta)$ — соответствующие вязкости фаз, $\lambda(s, \theta) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\alpha_i\lambda_i}{\rho_i c_{pi}}$ — коэффициент температуропроводности смеси, ρ_i — плотности воды ($i = 1$), нефти ($i = 2$), коллектора ($i = 3$), $\alpha_1 = m_0 s_1$, $\alpha_2 = m_0(1 - s_1)$, $\alpha_3 = 1 - m_0$, c_{pi} — теплоемкость фазы при постоянном давлении, λ_i — коэффициенты теплопроводности, $Q(t)$ — общий расход смеси воды и нефти.

Свойства функциональных параметров модели описаны в работе [2]. Заметим, что $k_1(0) = k_2(1) = 0$, $j(1) = 0$. Это приводит к вырожденному уравнению для водонасыщенности и появлению больших градиентов водонасыщенности в окрестности $(x = 0)$ и $(x = L)$, то есть вблизи добывающих и нагнетательных скважин. Это усложняет численное решение задачи.

Уравнение для водонасыщенности можно также переписать в следующем эквивалентном представлении:

$$ms_t = (k_0 a_0 p_{cx} - Q(t)b)_x. \tag{1б}$$

Представление выражения (1б) проще при численной реализации, и поэтому в дальнейшем используется именно эта запись для $s(x, t)$. Нижний индекс c при капиллярном давлении в дальнейшем не используется.

Положив $\max_t |Q(t)| = Q_0 = \text{const}$, введем безразмерные переменные: $x^* = x/L$, $t^* = Q_0 t/(mL)$, $\theta^* = (\theta - \theta_{\min})/(\theta_{\max} - \theta_{\min})$, $\lambda^* = \lambda/\lambda_0$, $\lambda_0 = \lambda(0, \theta_{\min})$ (далее звездочки у безразмерных величин опускаются). В силу доказанного в [2] принципа максимума, значения $\theta_{\min}$ и $\theta_{\max}$ достигаются на границах области при $x = 1$ и $x = 0$. Систему уравнений (1) в новых обозначениях можно записать в виде

$$\begin{cases} s_t = (\varepsilon a p_x - qb)_x, \\ \theta_t = (\varepsilon_\theta \lambda\theta_x - mq\theta)_x, \end{cases} \tag{2}$$

где $\varepsilon = \gamma_0 (m_0 / k_0)^{1/2} / (Q_0 L \mu_0)$ — капиллярное число, $a(s, \theta) = -k_1 k_2 / (\mu_2^* (k_1 + \mu k_2))$, $p(s, \theta) = j\gamma^*$, $\varepsilon_\theta = m\lambda_0 / (Q_0 L)$, $q = Q / Q_0$, $\gamma^* = \gamma / \gamma_0$, $\mu = \mu_1^* / \mu_2^*$, $\mu_2^* = \mu_2 / \mu_0$, $\mu_1^* = \mu_1 / \mu_0$, $\gamma_0 = \max\limits_{\theta \in [0,1]} (\gamma(\theta))$, $\mu_0 = \max\limits_{\theta \in [0,1]} (\mu_2(\theta))$ (звездочки при μ_1^*, μ_2^* и γ^* в дальнейшем изложении опускаются). При значении параметра $\varepsilon = 0$ и $\theta \neq \mathrm{const}$ будет иметь место неизотермическая модель Баклея–Леверетта (БЛТ), при значениях $\varepsilon \neq 0$ и $\theta = \mathrm{const}$ приходим к изотермической МЛ модели, а при $\varepsilon = 0$ и $\theta = \mathrm{const}$ получим изотермическую модель Баклея–Леверетта (БЛ).

В стационарном случае система уравнений (2) записывается в виде:

$$\begin{cases} (\varepsilon a p_x - qb)_x = 0, \\ (\varepsilon_\theta \lambda \theta_x - mq\theta)_x = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Систему уравнений (3) удобнее решать методом установления, сделав перед этим регуляризацию по времени. Для системы (3) сформулируем регуляризованную начально-краевую задачу в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \sigma_1 s_t = (\varepsilon a p_x - qb)_x, \\ \sigma_2 \theta_t = (\varepsilon_\theta \lambda \theta_x - mq\theta)_x, \end{cases} \tag{4}$$

$$s|_{x=0} = 1,\ \ s|_{x=1} = 0,\ \ s|_{t=0} = s_0(x),\ \ x \in (0,1);\ \theta|_{x=0} = \theta_1,\ \ \theta|_{x=1} = \theta_2;\ \ \theta|_{t=0} = \theta_0(x),\ \ x \in (0,1),$$

где $s_0(x)$ и $\theta_0(x)$ — начальное приближение к решению (4), σ_1 и σ_2 — расчетные параметры.

2. ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Введем равномерную сетку E с распределенными узлами $\{x_i = ih,\ t_n = n\tau,\ i = \overline{0, N},\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$, h — шаг по координатной сетке, $\tau = Kh^2$ — шаг по времени. В расчетах шаг h брался равным 0,01 (N = 100), а τ = 0,001. В дальнейшем в разностных схемах используются обозначения, предложенные в работе [6].

При нахождении численного решения выбирались противопотоковые однородные разностные схемы для уравнения насыщенности и для уравнения температуры. Для задачи (4) разностные схемы имеют вид:

$$\begin{gathered} \sigma_1 \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} = \frac{\varepsilon}{h} \left(a_{i+1/2}^n\, p_{x,i}^{n+1} - a_{i-1/2}^n\, p_{\bar{x},i}^{n+1} \right) - z_i^+\, b_{\bar{x},i}^{n+1} - z_i^-\, b_{x,i}^{n+1},\ s_i^0 = s_0(x_i), \\ i = \overline{1, N-1},\ \ n = 1, 2, \ldots,\ s_0^{n+1} = 1, s_N^{n+1} = 0, \\ \sigma_2 \frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\tau} = \frac{\varepsilon_\theta}{h} \left(\lambda_{i+1/2}^n\, \theta_{x,i}^{n+1} - \lambda_{i-1/2}^n\, \theta_{\bar{x},i}^{n+1} \right) - m\left(z_i^+ \theta_{\bar{x},i}^{n+1} - z_i^- \theta_{x,i}^{n+1} \right) = 0,\ \ \theta_i^0 = \theta_0(x_i), \\ i = \overline{1, N-1},\ \theta_0^{n+1} = \theta_1,\ \theta_N^{n+1} = \theta_2, \end{gathered} \tag{5}$$

где n — номер итерации, $z_i^+ = (|q_i| + q_i)/2$, $z_i^- = -(|q_i| - q_i)/2$, $a_{i+1/2}^n = a((s_i^n + s_{i+1}^n)/2,\ \ (\theta_i^{n+1} + \theta_{i+1}^{n+1})/2)$, $b_i^{n+1} = b_i^n + b_{si}^n (s_i^{n+1} - s_i^n)$, $p_i^{n+1} = p_i^n + p_{si}^n (s_i^{n+1} - s_i^n)$, $q_i = q(x_i)\,|$. При этом сначала решалось уравнение для температуры, а затем — уравнение для насыщенности. В случае численного решения системы (2) использовались разностные схемы, аналогичные уравнению (5) но разработанные для нестационарного случая.

После каждого расчета s_i^{n+1}, водонасыщенность взвешивалась по следующей формуле:

$$\tilde{s}_i^{n+1} = \sigma_3 s_i^{n+1} + (1-\sigma_3) s_i^n, \tag{6}$$

где σ_3 — весовой коэффициент. Решением полагались величины ($\tilde{s}_i^{n+1}$, θ_i^{n+1}).

В численных расчетах использовался следующий набор модельных параметров:
$k_1 = s^2$, $k_2 = (1-s)^2$, $j = (1-s)/(0{,}9+s)$, $S_1^0 = S_2^0 = 0$, $m = 0{,}1$, $\mu_2 = \mu_{2\max} + (\mu_{2\min} - \mu_{2\max})\theta$, $\mu_1 = 0{,}1$, $\gamma = \gamma_{\max} + (\gamma_{\min} - \gamma_{\max})\theta$, $\gamma_{\max} = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0{,}0001$, $\sigma_3 = 0{,}1$. Выбор $\mu_1 = \mathrm{const}$ был определен тем, что вязкость воды, как правило, слабо зависит от температуры.

Остальные данные брались из работы [7]:

$\lambda_1 =$ 0,644 Вт(м·К), $\lambda_2 =$ 0,08 Вт(м·К), $\lambda_3 =$ 2,40 Вт(м·К), ρ_1 = 1000 кг/(м^3), ρ_2 = 730 кг/(м^3), ρ_2 = 4216 кг/(м^3), $c_{p1} = 4071$ Дж/(кг·К), $c_{p2} = 2100$ Дж/(кг·К), $c_{p3} = 920$ Дж/(кг·К).

3. Численное исследование сходимости решений МЛТ модели в нестационарном одномерном случае к стационарному решению

3.1. Особенности стационарных решений при закачке вытеснителя нефти с температурой коллектора

На рис. 1 тонкой линией обозначено стационарное решение при $q = 1$, $\varepsilon = 0{,}15$ с начальным приближением $s_0(x) = 1$, $x \in [0,\ 0{,}7]$ и $s_0(x) = 0$, $x \in [0{,}7,\ 1]$. Остальными линиями показаны решения первой краевой задачи в разные моменты времени. Из рисунка видно, что решения нестационарной задачи сходятся к решению стационарной. Проведены расчеты с разными ε и μ, установлено, что при $\varepsilon < \varepsilon'$ имеет место сходимость к решениям с участком в окрестности эксплуатационной скважины, на котором $s = 1$, $x \in [0, x(\varepsilon')]$, здесь $x(\varepsilon')$ — предельная точка распространения фронта $s = 1$. При использовании вышеприведенных параметров критическое ε' приблизительно равнялось $0{,}36$. С увеличением μ увеличивается и соответствующее предельное ε'.

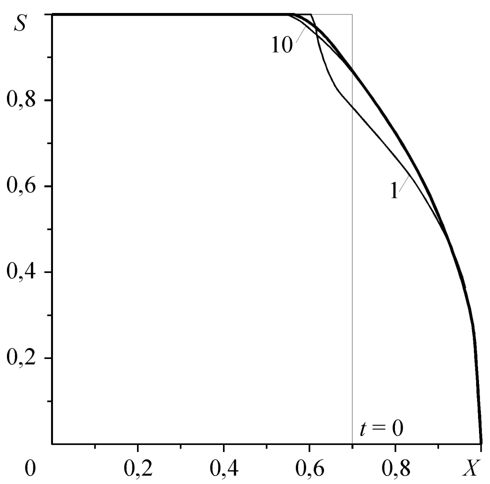

Рис. 1. Закачка воды с температурой пласта при ε = 0,15.

3.2. Структура неизотермических стационарных решений при $q = 1$, $\theta \neq \mathrm{const}$, $\varepsilon_\theta = 0,01$.

При численном моделировании закачки в пласт горячей воды θ_1 полагалось равным 1, $\theta_2 = 0$, а при закачке холодной — соответственно 0 и 1.

Далее на рисунках линиями *1* обозначены неизотермические решения $s(x,t)$ в стационарном случае, линиями *2* — изотермические решения (при $\theta \equiv \theta_2$), линиями *3* — температурные профили.

Пример 1. На рис. 2, *a* приведены графики решений, соответствующие закачиванию в пласт горячей воды, при $\gamma_{\min} = 0,5$, $\mu_{2\min} = \mu_{2\max} = 1$, ε = 0,5, $s_0(x) = 1 - x$. Таким образом, зависимость вязкости от температуры не учитывалась. Характерной особенностью решений в неизотермическом случае является поднятие решения в области, где $\theta \approx 1$, и опускание решения в районе больших градиентов температуры. Это приводит, с ростом величины ε, к появлению излома у графика для $s(x)$ вблизи x = 1 и формированию области с водонасыщенностью $s(x) \equiv 1$ в окрестности нагнетательной скважины, как и в пункте 3.1. Так, например, на рис. 2, *b* приведены решения для $\gamma_{\min} = 0,05$, ε = 0,95, $s_0(x)$ (см. рис. 1). Видно, что сформировалась зона, где $s(x) = 1$, и имеет место сильный излом графика вблизи x = 1.

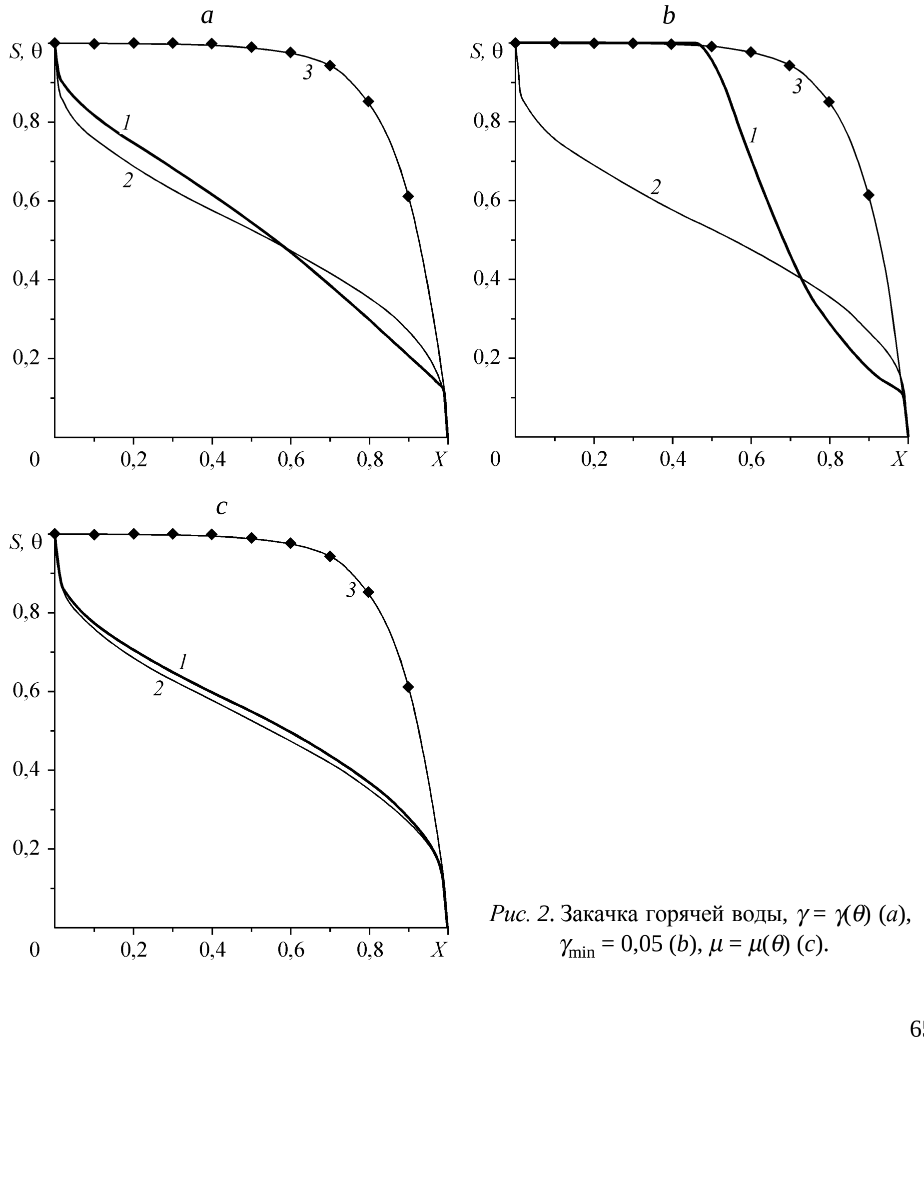

Рис. 2. Закачка горячей воды, $\gamma = \gamma(\theta)$ (*a*), $\gamma_{\min} = 0,05$ (*b*), $\mu = \mu(\theta)$ (*c*).

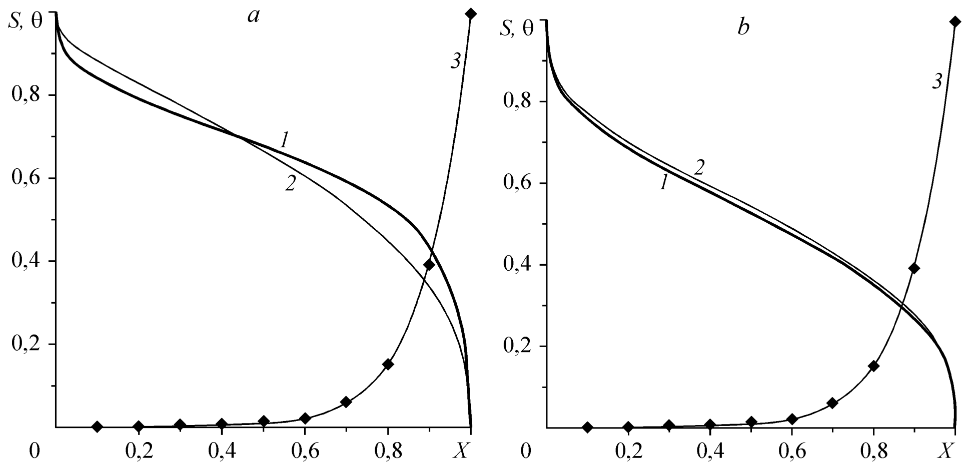

Рис. 3. Закачка холодной воды, $\gamma = \gamma(\theta)$ (*a*), $\mu_2 = \mu_2(\theta)$ (*b*).

Пример 2. Закачка в пласт горячей воды при $\gamma \equiv 1$, $\mu_{2\min} = 0,2$. Соответствующие графики приведены на рис. 2, *c*. Особенностью стационарного неизотермического решения здесь является его превышение над изотермическом на всем интервале (0, 1). Отметим, что при уменьшении ε разница между решениями $s(x)$ в изотермическом и неизотермическом вариантах уменьшается и при $\varepsilon \leq 0{,}68$ разница становится меньше, чем 10^{-2}.

Пример 3. Соответствует примеру 1, но в случае закачки в пласт холодного вытеснителя. На рис. 3 приведены соответствующие графики решений. В этом варианте характерной особенностью неизотермических решений по сравнению с изотермическими является снижение решения в районе нагнетательной скважины и поднятие вблизи добывающей скважины. Этот эффект приводит к формированию области с $s(x) = 1$ при меньших ε', чем указано в пункте 3.1.

Пример 4. Соответствует примеру 2, но при закачке холодной воды. На рис. 3, *b* приведены графики полученных решений. Особенностью неизотермического решения является снижение водонасыщенности на всем интервале (0, 1). Уменьшение ε приводит к уменьшению разницы между изотермическим и неизотермическим решениями и при $\varepsilon \leq 0{,}75$ разница становится меньше, чем 10^{-2}.

В таблице приведены разности между стационарными и нестационарными решениями для водонасыщенности в разные моменты времени для разных примеров.

3.3. Оценка скорости сходимости

В настоящей работе численно анализировалось поведение следующих функций:

$$\alpha_1(t) = -\ln(\max_x |s(x,t) - s(x)|)/(t+1), \quad \alpha_2(t) = -\ln(\max_x |s(x,t) - s(x)|)/\ln(1+t).$$

Таблица

Разности между решениями *s*(*x*, *t*) в разные моменты времени

Время	Пример 1	Пример 2	Пример 3	Пример 4
$t = 1$	0,0579923	0,0000197	0,0171444	0,0418498
$t = 2$	0,0191552	0,0000001	0,0211749	0,0025136
$t = 5$	0,0018473	меньше 10^{-10}	0,00001070	0,0028916

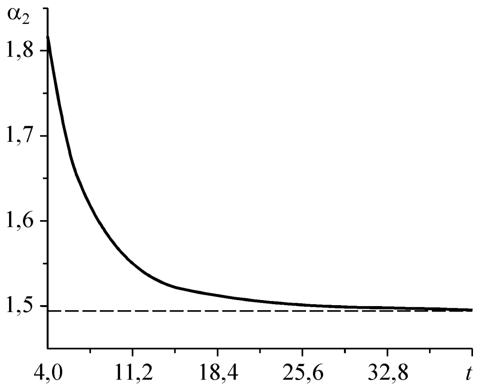

Рис. 4. График функции $\alpha_2(t)$, закачка горячей воды.

Если $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha_1(t) = \beta,$ то имеем экспоненциальную оценку выхода на стационарный режим вида $\max\limits_x |s(x,t) - s(x)| \le Ce^{-\beta t}$.

Если $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha_2(t) = \delta,$ то имеет место степенная сходимость к стационарному решению $\max\limits_x |s(x,\ t) - s(x)| \le C(1+t)^{-\delta}$.

Для задачи (4) в случае $q(t) = 1 + 0{,}1(1+t)^{-2}$, $s_0(x) = 1 - x$ при ε = 0,375, $\varepsilon_\theta = 0{,}01$, $\mu_{2\min} = 0{,}2$, $\gamma_{\min} = 0{,}85$ получено, что имеет место степенная сходимость к стационарному решению с показателем $\delta \approx 1{,}49$. Вообще говоря, с меньшим показателем, чем у функции $q(t)$, (см. рис. 4).

ВЫВОДЫ

Результаты расчетов показывают, что сходимость нестационарных решений задач фильтрации к стационарным функциям зависит от начального приближения и имеет степенной характер. При различных значениях величин ε, q стационарное решение может иметь или не иметь участок, где водонасыщенность $s(x) \equiv 1$. Подача горячей воды положительно сказывается на процессе вытеснения нефти из пласта. Холодная вода способствует запиранию нефти в пласте. Зависимость поверхностного натяжения по сравнению с вязкостью от температуры оказывает на асимптотическое решение бóльшее влияние.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.** Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. — Новосибирск, Наука, 1983. — 316 с.
2. **Бочаров О.Б., Монахов В.Н.** Краевые задачи неизотермической двухфазной фильтрации в пористых средах // Динамика сплошной среды. — Новосибирск: ИГиЛ СО РАН СССР, 1988. — Вып. 86. — С. 47–59.
3. **Артемова Г.Н., Хуснутдинова Н.В.** Об ассимптотике решений двумерного уравнения типа нестационарной фильтрации двухфазной жидкости // Динамика сплошной среды. — Новосибирск: ИГиЛ СО РАН СССР, 1969. — Вып. 2. — С. 91–99.
4. **Хуснутдинова Н.В.** О стабилизации решений нелинейного уравнения фильтрации двухфазной жидкости // ПМТФ. — 1999. — Т. 40, № 3. — С. 30–36.
5. **Хуснутдинова Н.В.** Об ассимптотических свойствах решений уравнения одномерной нестационарной фильтрации двухфазной жидкости // Динамика сплошной среды. — Новосибирск: ИГиЛ СО РАН СССР, 1979. — Вып. 39. — С. 119–134.
6. **Самарский А.А.** Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971. — 552 с.
7. **Бочаров О.Б., Осокин А.Е.** Численное исследование автомодельных задач неизотермической двухфазной фильтрации // Сибирский журнал индустриальной математики. — Новосибирск, 2002. — Т. 5, № 1. — С. 8–20.

Статья поступила в редакцию 29 ноября 2007 г.