

УДК 621.37 : 621.391.161 : 535.361

ОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ ПО КРИТЕРИЮ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ ЛАЗЕРНОЙ ДОПЛЕРОВСКОЙ АНЕМОМЕТРИИ

В. С. Соболев, Г. А. Кашеева, Ф. А. Журавель

*Институт автоматизи и электрометрии СО РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1
E-mail: sobolev@iae.nsk.su*

Представлены пути получения максимально правдоподобных оценок доплеровской частоты (скорости исследуемых потоков) для лазерной доплеровской анемометрии в режиме многочастичного рассеяния в присутствии аддитивного белого шума при использовании конечного числа отсчётов получаемых сигналов.

Ключевые слова: лазерная доплеровская анемометрия, максимально правдоподобные оценки параметров сигналов.

Введение. Методы лазерной доплеровской анемометрии прочно вошли в арсенал экспериментальной гидро- и аэродинамики, а также с успехом применяются в промышленности для измерения скорости горячего проката, проволоки и других протяжённых изделий [1–5]. В то же время всё возрастающие требования к точности измерений заставляют специалистов искать новые пути совершенствования алгоритмов обработки сигналов доплеровских систем. Здесь следует отметить, что в большинстве случаев эти сигналы носят случайный характер, так как образуются в результате рассеяния зондирующего излучения на многих случайно распределённых в пространстве естественных или искусственно введённых в исследуемый поток частицах или на шероховатой поверхности твёрдых изделий (спекл-эффект). В связи с этим результаты измерений доплеровской частоты (скорости) сопровождаются ощутимыми погрешностями. К настоящему времени предложен ряд изощрённых методов и устройств обработки доплеровских сигналов [6–9], но даже их применение не всегда устраивает большинство пользователей. В то же время статистика таких сигналов хорошо изучена, их модели представляют собой случайные узкополосные процессы, подчиняющиеся нормальному распределению. Это обстоятельство даёт возможность использовать разработанные методы статистических решений, основанные на критерии максимального правдоподобия и позволяющие существенно повысить точность измерений [10–15]. Отметим также, что указанные методы широко применяются для обработки сигналов метеорологических радаров и лидаров [16–20], но если это касается доплеровской анемометрии, то публикации по рассматриваемому вопросу практически отсутствуют или ограничены случаями одночастичного режима рассеяния [21–24].

Цель данной работы — адаптация методов максимального правдоподобия для обработки сигналов лазерной доплеровской анемометрии, когда используется режим многочастичного рассеяния и малое число отсчётов сигнала. Последнее условие связано с тем, что измеряемая скорость может сильно изменяться на коротких интервалах времени и анемометр не должен сглаживать эти изменения.

Модель многочастичного доплеровского сигнала. При работе анемометра в многочастичном режиме доплеровский сигнал в большинстве случаев образуется как сумма сигналов от каждой рассеивающей частицы. С учётом того что в качестве источников излучения используются лазеры с гауссовой формой зондирующих пучков, полезную высокочастотную часть сигнала на выходе фотоприёмника можно представить как [1, 2]

$$Z(t) = \sum_{i=0}^L A_i \exp \left\{ - \left[\frac{1}{2\pi M} \omega(t - t_i) \right]^2 \right\} \cdot \exp[j\omega(t - t_i)], \quad (1)$$

где выражение под знаком суммы представляет собой сигнал от одиночной рассеивающей частицы; A_i — случайная амплитуда, зависящая от размеров и физических свойств i -й частицы; ω — подлежащая оценке частота доплеровского сдвига, пропорциональная измеряемой скорости; M — число реальных или виртуальных интерференционных полос в измерительном объёме на уровне $\exp(-1)$ интенсивности света в нём; t_i — момент появления i -й частицы в центре этого объёма; t — текущее время; j — мнимая единица; $L + 1$ — общее число частиц, прошедших через измерительный объём. В качестве примера на рис. 1 представлен график вещественной части высокочастотной компоненты доплеровского сигнала как функции времени.

Отметим важную особенность данного сигнала: в тех точках оси времени, где амплитуда сигнала приближается к нулю, его мгновенная частота стремится к бесконечным значениям. Соответственно её дисперсия также бесконечно велика. К сожалению, даже при исследовании безградиентного ламинарного потока с постоянной скоростью ошибки в оценке этой скорости могут быть очень большими.

Необходимо отметить, что при цифровой обработке получаемого сигнала (в настоящее время это вполне естественно) значения мгновенной частоты всегда остаются конечными. Данное явление можно трактовать следующим образом: там, где амплитуда доплеровского сигнала падает до нуля, одна половина рассеивающих частиц даёт сигнал в одной фазе, а другая — в противоположной. Таким образом, фаза суммарного сигнала в указанных точках совершает скачок $\pm\pi$. С учётом этого максимальное абсолютное значение круговой частоты, определённое как отношение приращений фазы к соответствующему приращению времени, составит величину $\omega_{\max} = \pi/T$, где T — период дискретизации сигнала, а максимальное значение циклической частоты будет равно $1/2T$. Если, например, $T = 1$ мкс, то независимо от истинного значения доплеровской частоты (скорости) в точке минимального значения амплитуды сигнала значение оцениваемой частоты составит 0,5 МГц, а дисперсия частоты будет уже конечной величиной, хотя и достаточно большой.

Поскольку положение рассеивающих частиц в пространстве независимо, процесс их появления в центре измерительного объёма t_i (см. выражение (1)) является пуассоновс-

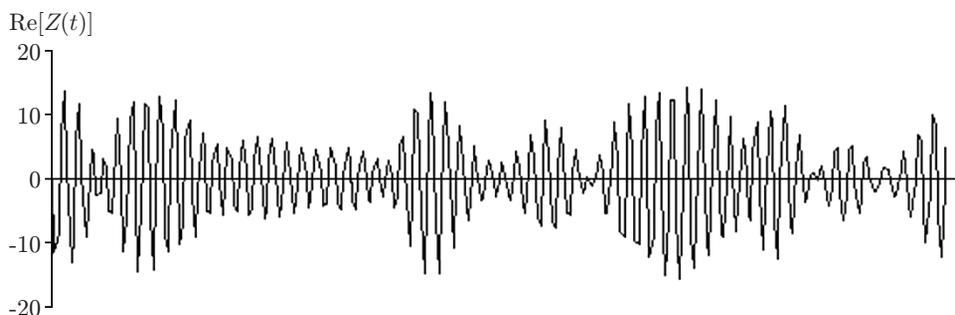


Рис. 1

ким и с учётом теоремы Кэмпбэла корреляционная функция доплеровского сигнала будет повторять форму функции корреляции сигнала одиночной частицы. Для дискретных отсчётов сигнала нормированное на дисперсию выражение корреляционной функции примет вид

$$\mathbf{K}(kT) = \exp[-(\xi\omega kT)^2] \cdot \exp(-j\omega kT) + N\delta, \quad (2)$$

где N — отношение шум/сигнал по мощности; $\xi = \frac{1}{2\pi\sqrt{2M}}$; k — номер отсчёта; δ — символ Кронекера.

Функция правдоподобия сигналов лазерного анемометра. Итак, будем считать, что доплеровский сигнал представляет собой узкополосный нормальный случайный процесс и сопровождается аддитивным нормальным белым шумом. При дискретном наблюдении он является вектором \mathbf{Z} комплексных отсчётов $z(kT)$, взятых через интервал дискретизации T , и содержит сигнальную часть $s(kT) \exp(j\omega kT)$ и белый шум $n(kT)$:

$$z(kT) = s(kT) \exp(j\omega kT) + n(kT), \quad (3)$$

где $s(kT)$ означает комплексную амплитуду сигнала, $k = 0, 1, \dots, L$.

Статистические характеристики шума определяются как

$$E[n_k n_j] = 0; \quad E[n_k n_j^*] = N_0 \delta_{k-j}. \quad (4)$$

Здесь E — оператор математического ожидания, символ «*» — комплексное сопряжение, N_0 — мощность шума.

Если на интервале измерений скорость остаётся неизменной, то сигнал (1) будет стационарным процессом и совместная плотность вероятности его отсчётов в матричном виде определится как [11]

$$p(z_0, \dots, z_{L-1}, kT) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{M}|}} \exp(-0,5 \mathbf{z}^* \text{Tr} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}), \quad (5)$$

где \mathbf{M} — корреляционная матрица сигнала (1), т. е. матрица с элементами, задаваемыми корреляционной функцией (2); $|\mathbf{M}|$ — её определитель; \mathbf{M}^{-1} — обратная матрица; Tr — операция транспонирования.

Поскольку сигнальная часть корреляционной функции (2) является произведением двух членов, причём один из них — действительная функция, а другой — комплексная, то корреляционная матрица \mathbf{M} может быть представлена в виде произведения матриц

$$\mathbf{M} = \sigma^2 \mathbf{D}(\mathbf{R} + N\mathbf{I})\mathbf{D}^*, \quad (6)$$

где σ^2 — дисперсия сигнала; \mathbf{R} — нормированная на дисперсию корреляционная матрица действительной части корреляционной функции (2); \mathbf{I} — единичная матрица; \mathbf{D} — диагональная матрица с элементами $\exp(-j\omega kT)$. Теперь с учётом выражений (5) и (6) можно записать логарифмическую функцию правдоподобия доплеровского сигнала для оцениваемой доплеровской частоты в виде

$$\ln p(z | \omega) = -\frac{\mathbf{z}^* \text{Tr} \mathbf{D}(\mathbf{R} + N\mathbf{I})^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{z}}{\sigma^2} - \ln |\mathbf{R} + N\mathbf{I}| + \text{const}. \quad (7)$$

Здесь второй член представляет собой логарифм детерминанта корреляционной матрицы $\mathbf{R} + N\mathbf{I}$, который, так же как и первый член, является функцией искомой доплеровской частоты. Отметим, что при внешнем сходстве выражения (7) с логарифмом функции правдоподобия сигналов метеорологического радара и лидара [16, 17] они существенно различаются, поскольку матрица \mathbf{R} в случае анемометра зависит от доплеровской частоты, а в случае лидара — не зависит.

Алгоритм получения максимально правдоподобных оценок (МПО) доплеровской частоты. Начнём с простейшего случая использования двух отсчётов сигнала. Подставляя в (7) комплексные отсчёты z_i и z_{i+1} и элементы матриц, получим выражение для логарифма функции правдоподобия:

$$\ln p(z, \omega) = -(z_i^*, z_{i+1}^*) \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(j\omega T) \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 1 + N & \exp(-\xi^2 \omega^2 T^2) \\ \exp(-\xi^2 \omega^2 T^2) & 1 + N \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(-j\omega T) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_i \\ z_{i+1} \end{pmatrix} - \ln |\mathbf{R} + N\mathbf{I}|, \quad (8)$$

где детерминант матрицы $\mathbf{R} + N\mathbf{I}$ представляется следующим образом:

$$|\mathbf{R} + N\mathbf{I}| = \left| \begin{bmatrix} 1 + N & \exp(-\xi^2 \omega^2 T^2) \\ \exp(-\xi^2 \omega^2 T^2) & 1 + N \end{bmatrix} \right| = (1 + N)^2 - \exp(-2\xi^2 \omega^2 T^2). \quad (9)$$

Перемножая матрицы (8), получим

$$\ln p(z, \omega) = \frac{|z_i| |z_{i+1}| 2 \cos(\omega T - \Delta\varphi) - [|z_i|^2 + |z_{i+1}|^2] \exp(\xi^2 \omega^2 T^2) (N + 1)}{\sigma^2 [(N + 1)^2 \exp(\xi^2 \omega^2 T^2) - \exp(-\xi^2 \omega^2 T^2)]} - \\ - \ln [(N + 1)^2 - \exp(-2\xi^2 \omega^2 T^2)] + \text{const}. \quad (10)$$

Здесь $z_i, z_{i+1}, |z_i|, |z_{i+1}|$ — комплексные отсчёты сигнала, взятые с интервалом T , и их абсолютные значения; $\Delta\varphi = \arg(z_0^* z_1)$ — разность фаз отсчётов z_{i+1} и z_i .

Классический подход нахождения МПО частоты, определяемых как её значения в точке максимума логарифмической функции правдоподобия, состоит в решении уравнения правдоподобия. Это уравнение получают путём приравнивания к нулю производной по частоте выражения (10). В рассматриваемом случае оно принимает вид

$$\frac{-4\xi^2 \omega T^2 \exp(-2\xi^2 \omega^2 T^2) (|z_i|^2 + |z_{i+1}|^2) (N + 1)}{\sigma^2 [\exp(-2\xi^2 \omega^2 T^2) - (N + 1)^2]} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2T|z_i||z_{i+1}| \exp(-\xi^2\omega^2T^2) \cdot \sin(\Delta\varphi - \omega T) -}{\sigma^2[(N+1)^2 - \exp(-2\xi^2\omega^2T^2)]} \rightarrow \\
& \rightarrow \frac{-4\xi^2\omega T^2|z_i||z_{i+1}| \exp(-\xi^2\omega^2T^2) \cdot \cos(\Delta\varphi - \omega T)}{\sigma^2[(N+1)^2 - \exp(-2\xi^2\omega^2T^2)]} - \\
& - \frac{8\xi^2\omega T^2|z_i||z_{i+1}| \exp(-3\xi^2\omega^2T^2) \cdot \cos(\Delta\varphi - \omega T)}{\sigma^2[\exp(-2\xi^2\omega^2T^2) - (N+1)^2]} + \\
& + \frac{4\xi^2\omega T^2 \exp(-2\xi^2\omega^2T^2)}{[\exp(-2\xi^2\omega^2T^2) - (N+1)^2]} = 0. \tag{11}
\end{aligned}$$

При использовании мощного лазера шумом можно пренебречь, и тогда уравнение (10) запишем как

$$\begin{aligned}
\ln p(z, \omega) = & \frac{[2|z_i||z_{i+1}| \cos(\Delta\varphi - \omega T)] - [|z_i|^2 + |z_{i+1}|^2]e^{\xi^2\omega^2T^2}}{\sigma^2 2 \sinh(\xi^2\omega^2T^2)} - \\
& - \ln[1 - \exp(-2\xi^2\omega^2T^2)] + \text{const}. \tag{12}
\end{aligned}$$

Уравнение (11) в этом случае приводится к виду

$$\begin{aligned}
& \frac{|z_i||z_{i+1}|[T \sin(\Delta\varphi - \omega T) \cdot \sinh(\xi^2\omega^2T^2) - 2\xi^2\omega T^2 \cosh(\xi^2\omega^2T^2) \cdot \cos(\omega T - \Delta\varphi)]}{\sigma^2[\sinh(\xi^2\omega^2T^2)]^2} + \\
& + \frac{\xi^2T^2\omega(|z_i|^2 + |z_{i+1}|^2)}{\sigma^2[\sinh(\xi^2\omega^2T^2)]^2} + \frac{4\xi^2T^2\omega \exp(-2\xi^2\omega^2T^2)}{\exp(-2\xi^2\omega^2T^2) - 1} = 0. \tag{13}
\end{aligned}$$

Если интервал между отсчётами значительно меньше времени корреляции ($T \ll T_0$) сигнала, т. е. при $\xi^2\omega^2T^2 \ll 1$, формулу (13) можно ещё более упростить. Разлагая в ряд выражения для гиперболических функций при малых значениях аргумента и используя только первые члены разложения $[\sinh(x) = x, \cosh(x) = 1, [\sinh(x)]^2 = x^2]$, получим окончательную форму уравнения правдоподобия для двух отсчётов сигнала:

$$\begin{aligned}
& - \frac{|z_0||z_1|[2 \cos(\omega T - \Delta\varphi) + \omega T \sin(\omega T - \Delta\varphi)]}{\sigma^2(\xi^2\omega^3T^2)} + \\
& + \frac{(|z_0|^2 + |z_1|^2)}{\sigma^2(\xi^2\omega^3T^2)} - \frac{2}{\omega} (1 - 2\xi^2\omega^2T^2) = 0. \tag{14}
\end{aligned}$$

Далее найдём выражение для функции правдоподобия путём трёх отсчётов доплеровского сигнала. В целях упрощения задачи будем искать решение для случая, когда шум отсутствует ($N = 0$). Матрица \mathbf{R} , входящая в выражение (7), теперь будет определяться как

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \exp(-\xi^2\omega^2T^2) & \exp[-\xi^2\omega^2(2T)^2] \\ \exp(-\xi^2\omega^2T^2) & 1 & \exp(-\xi^2\omega^2T^2) \\ \exp[-\xi^2\omega^2(2T)^2] & \exp(-\xi^2\omega^2T^2) & 1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Выражение (7) для логарифма функции правдоподобия примет вид

$$\begin{aligned} \ln p(z, \omega) = & -(z_i^* z_{i+1}^* z_{i+2}^*) \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(j\omega T) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(j2\omega T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{00} & \gamma_{01} & \gamma_{02} \\ \gamma_{10} & \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{20} & \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \times \\ & \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-j\omega T) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-j2\omega T) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_i \\ z_{i+1} \\ z_{i+2} \end{pmatrix} - \ln |\mathbf{R}|, \end{aligned} \quad (16)$$

где члены γ_{ij} являются элементами обратной корреляционной матрицы $[\mathbf{R}]^{-1}$.

Перемножая матрицы в (16), получим окончательное выражение логарифмической функции правдоподобия для трёх используемых отсчётов сигнала:

$$\begin{aligned} \ln p_3(z, \omega) = & \frac{1}{\sigma^2} \left[\gamma_{00}|z_i|^2 + \gamma_{11}|z_{i+1}|^2 + \gamma_{22}|z_{i+2}|^2 + 2\gamma_{01}|z_{i+1}||z_i| \cos(\varphi_{01} - \omega T) + \right. \\ & \left. + 2\gamma_{01}|z_{i+1}||z_{i+2}| \cos(\varphi_{12} - \omega T) + 2\gamma_{02}|z_i||z_{i+2}| \cos(\varphi_{02} - 2\omega T) \right] - \ln |\mathbf{R}|. \end{aligned} \quad (17)$$

Значение $\ln \mathbf{R}$ в соответствии с (15) имеет вид

$$\ln(|\mathbf{R}|) = 1 + 2 \exp(-6\xi^2\omega^2T^2) - 2 \exp(-2\xi^2\omega^2T^2) - \exp(-8\xi^2\omega^2T^2), \quad (18)$$

а $\varphi_{01}, \varphi_{12}, \varphi_{02}$ — разности фаз между соответствующими отсчётами комплексного сигнала.

К сожалению, из-за высокой сложности преобразований перейти от выражения (17) к уравнению правдоподобия не удалось. Это тем более трудно было бы сделать при ещё большем числе отсчётов.

В такой ситуации с учётом широких возможностей современной вычислительной техники предлагается более простой путь решения задачи. Он состоит в том, что значения выбранных комплексных отсчётов сигнала z и элементы корреляционной матрицы $\mathbf{R} + N\mathbf{I}$ вставляются непосредственно в матричное выражение для логарифма функции правдоподобия (7). Далее, функция Мах программного комплекса МАТЛАВ достаточно быстро находит положение максимума функции правдоподобия и соответствующее значение частоты будет являться искомой максимально правдоподобной оценкой.

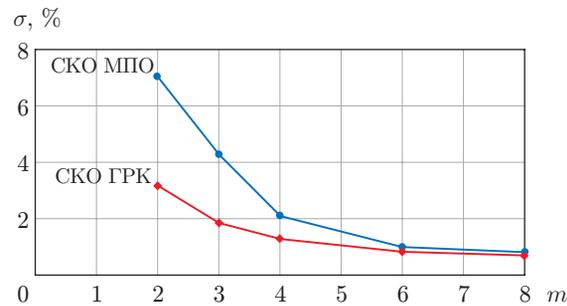


Рис. 2

Граница Рао — Крамера для оценки доплеровской частоты. Известно [11], что качество МПО параметров сигналов определяется границами Рао — Крамера (ГРК), которые вычисляются как величина, обратная математическому ожиданию второй производной функции правдоподобия по оцениваемому параметру. Эта величина определяет достижимый минимум дисперсии оцениваемой величины.

В работе [20] найдено следующее выражение ГРК для импульсного лидара:

$$\text{ГРК} \geq 1 / \left(T^2 \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{K-1} (i-j)^2 \gamma_{ij} A_{ij} \right), \quad (19)$$

где γ_{ij} — элемент матрицы $(\mathbf{R} + N\mathbf{I})^{-1}$, A_{ij} — элемент матрицы $(\mathbf{R} + N\mathbf{I})$, K — число используемых отсчетов сигнала.

Анализ показал, что при совпадении времён корреляции сигналов лидара и анемометра для оценки ГРК анемометра можно применять выражение (19).

Интересно сравнить, как соотносятся ГРК и истинные дисперсии частоты доплеровского сигнала в зависимости от числа используемых его отсчетов. Соответствующие графики для сигнала с временем корреляции $5T_D$ представлены на рис. 2. График среднеквадратичных отклонений (СКО) МПО получен путём обработки смоделированного доплеровского сигнала, а СКО ГРК — по формуле (19). Видно, что начиная с шести отсчетов сигнала можно пользоваться данной формулой.

Результаты модельного эксперимента. Для того чтобы продемонстрировать возможности предложенного алгоритма получения максимально правдоподобных оценок доплеровской частоты (скорости) в смысле достижимой точности и оценить найденные погрешности, был проведён компьютерный эксперимент над моделями доплеровского сигнала. Модели были сформированы для четырёх наиболее часто используемых конструкций анемометров, характеризуемых числами 4, 7, 14 и 28 интерференционных полос в измерительном объёме. Каждому числу соответствовало время корреляции сигналов 3, 5, 10 и 20 доплеровских периодов T_D на уровне $\exp(-1)$ огибающей корреляционной функции. Доплеровская частота при этом была выбрана равной 1 Гц. Дополнительными параметрами являлись два значения отношения сигнал/шум по мощности: бесконечность и 20 дБ — и значения периода дискретизации сигнала 1; 0,5 и 0,2 по отношению к доплеровскому периоду.

Анализ результатов моделирования показал:

1. Осреднённые значения оценок оказались в пределах десятых долей процента равными значению доплеровской частоты, заложенному в модели доплеровского сигнала. Это означает, что получаемые оценки частоты не смещены.

2. В отсутствие шума среднеквадратичные отклонения оценок частоты практически не зависят от величины периода дискретизации сигнала.

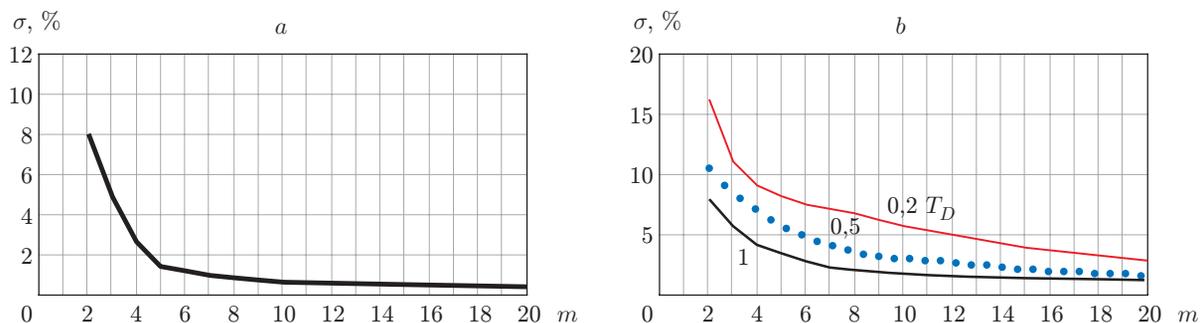


Рис. 3

3. С ростом числа используемых отсчётов значения СКО вначале резко падают, а затем скорость падения существенно замедляется. Эти зависимости можно аппроксимировать двумя линейными приближениями: при росте числа отсчётов с двух до пяти СКО линейно падают с крутизной 2 % на отсчёт, а после пяти — с крутизной 0,4 % на отсчёт.

Соответствующий график представлен на рис. 3, *a* (в отсутствие шума), где по оси абсцисс отложено число используемых отсчётов m , а по оси ординат — СКО оценок доплеровской частоты σ (в процентах) относительно её истинного значения для периодов дискретизации 0,2; 0,5 и $1 T_D$ при времени корреляции сигнала $5 T_D$. Все три кривые практически слились в одну. Аналогичные графики в присутствии шума для отношения сигнал/шум 20 дБ показаны на рис. 3, *b*. Видно, что чем меньше период дискретизации, тем больше значение СКО.

На рис. 4 представлены графики зависимости СКО от числа используемых отсчётов m в отсутствие шума для сигналов с различным временем корреляции ($3, 5, 10$ и $20 T_D$) при частоте квантования $1 T_D$. Видно, что с увеличением числа отсчётов СКО вначале резко падают, а затем плавно снижаются.

Пример зависимости СКО от наличия шума приведён на рис. 5 для отношения сигнал/шум 20 дБ при временах корреляции $3, 5, 10$ и $20 T_D$ и частоте квантования $1 T_D$. Как следует из рисунка, характер вышеуказанной зависимости сохранился.

Чтобы наглядно продемонстрировать, как увеличение числа используемых отсчётов сигнала уменьшает погрешности получаемых оценок, на рис. 6 представлены графики МПО частоты доплеровского сигнала \hat{f} как функции времени (числа отсчётов сигнала) для типичного анемометра, время корреляции сигналов которого составляет пять доплеровских периодов в отсутствие шума. Число используемых отсчётов m и период дискре-

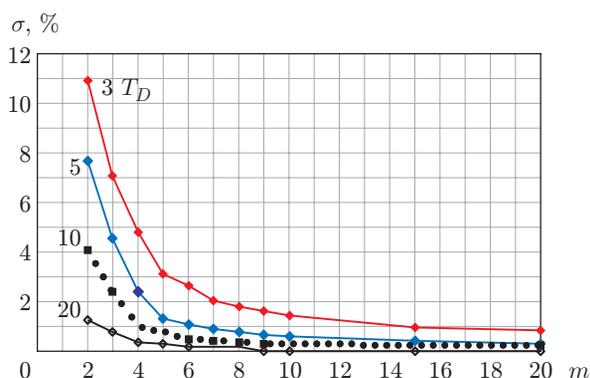


Рис. 4

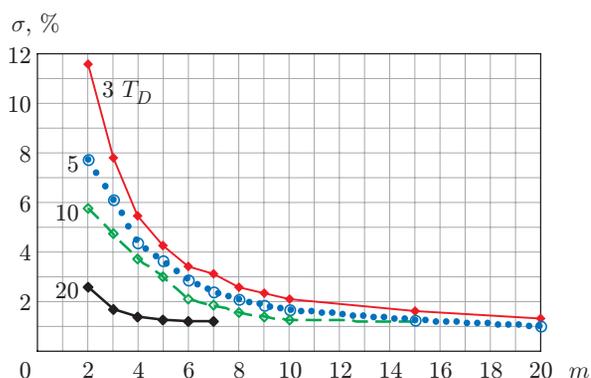


Рис. 5

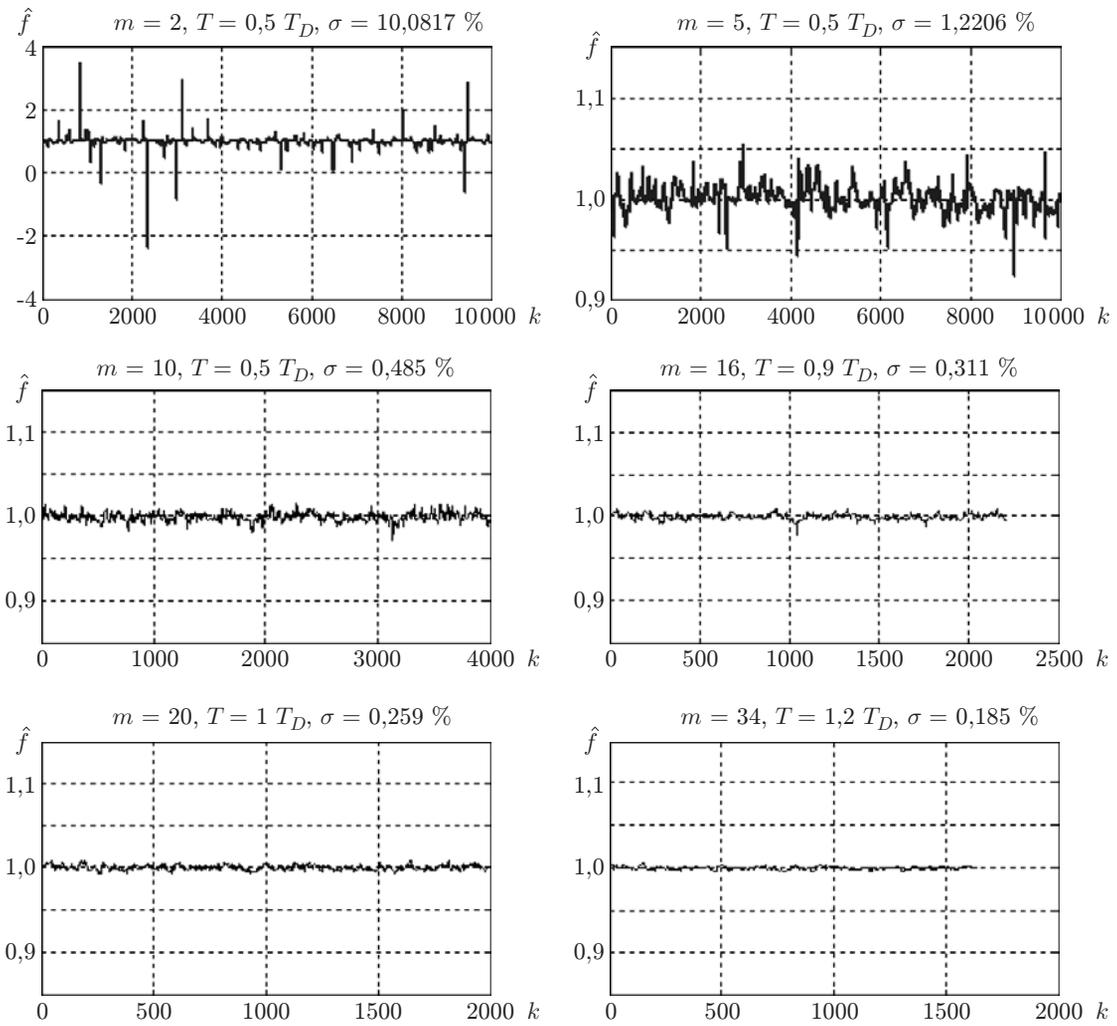


Рис. 6

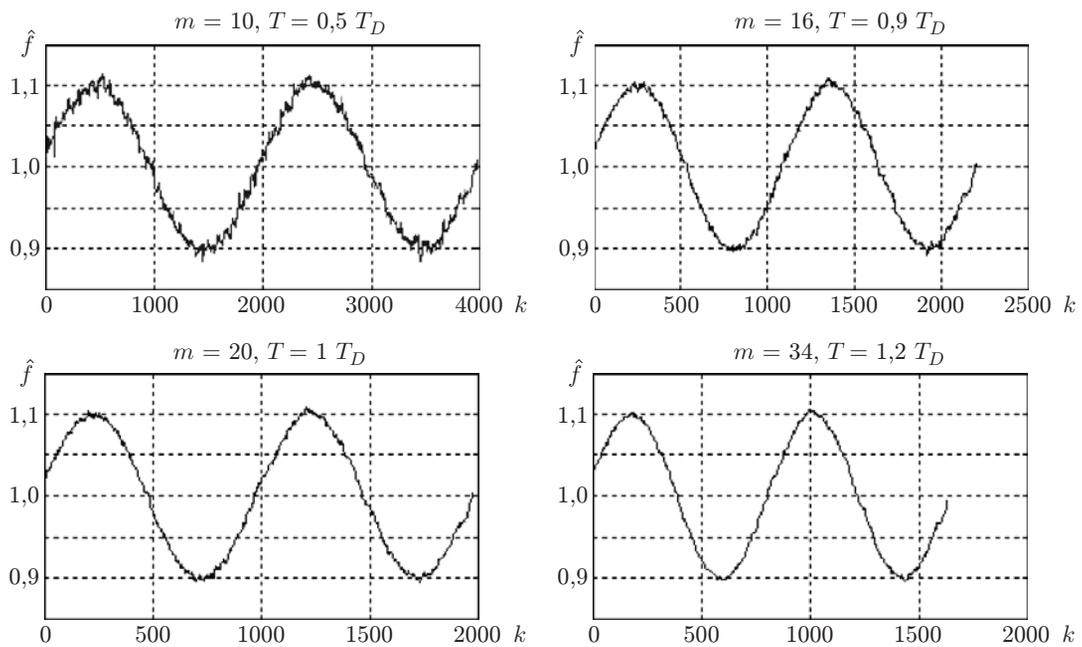


Рис. 7

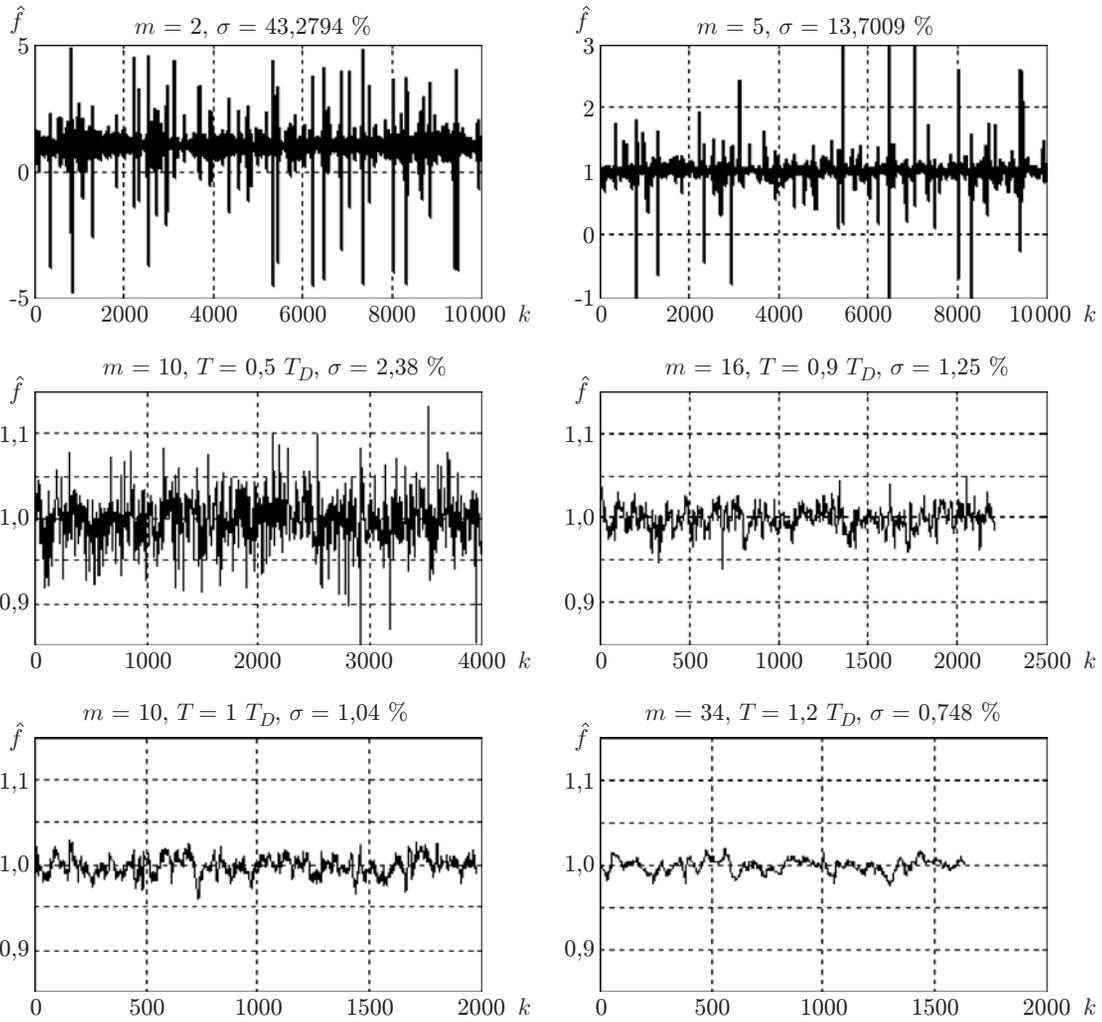


Рис. 8

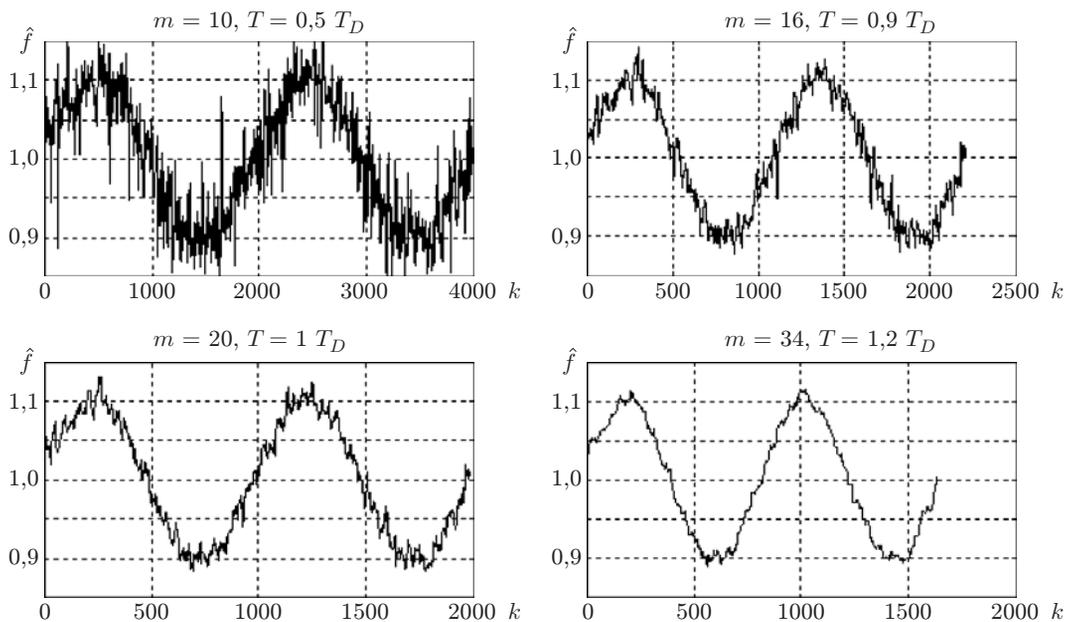


Рис. 9

тизации сигнала T при этом составляют: 2 и $0,5 T_D$; 5 и $0,5 T_D$; 10 и $0,5 T_D$; 16 и $0,9 T_D$; 20 и $1 T_D$; 34 и $1,2 T_D$. Увеличение числа используемых отсчётов сигнала с 10 до 34 и периода дискретизации от $0,5 T_D$ до $1,2 T_D$ привело к снижению СКО с 10 до 0,185 %, т. е. в 50 раз.

Чтобы показать, как предлагаемая методика работает в случае изменяющейся скорости потока, на рис. 7 для этих же параметров доплеровского сигнала даны графики изменений оценок частоты для случая, когда скорость периодически изменяется по синусоидальному закону с амплитудой 10 % от значений средней скорости и частотой 0,001 от частоты Доплера. Увеличение числа используемых отсчётов с 10 до 34 привело к существенному подавлению погрешностей при восстановлении изменений частоты (скорости).

Аналогичные графики для случая, когда в сигнале присутствует аддитивный нормальный белый шум (10 %), составляющий -20 дБ по отношению к мощности сигнала, представлены на рис. 8 и 9.

Сравнение графиков рис. 6 и 8 показывает, что при использовании десяти отсчётов добавление шума увеличивает СКО оценок частоты с 0,488 до 2,38 %, т. е. в 5 раз. Общее снижение погрешности измерений с ростом числа отсчётов с 2 до 34 в присутствии шума изменяется с 43 до 0,7 %, т. е. примерно в 50 раз.

Заключение. В данной работе предложена и исследована методика получения МПО доплеровской частоты (скорости) для сигналов лазерной доплеровской анемометрии, позволяющая вычислять оценки с минимальными погрешностями. Путём компьютерного моделирования построены графики среднеквадратичных значений этих погрешностей как функции числа используемых отсчётов отношения сигнал/шум и периода дискретизации сигнала для ряда наиболее применяемых конструкций анемометров. Результаты могут быть использованы разработчиками лазерной доплеровской аппаратуры, для того чтобы правильно выбрать её параметры, исходя из требуемой точности и пространственного разрешения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Василенко Ю. Г., Дубнищев Ю. Н., Соболев В. С. и др.** Лазерные доплеровские измерители скорости. Новосибирск: Наука, 1975. 161 с.
2. **Дюррани Т., Грэйтид К.** Лазерные системы в гидродинамических измерениях. М.: Энергия, 1980. 336 с.
3. **Коронкевич В. П., Соболев В. С., Дубнищев Ю. Н.** Лазерная интерферометрия. Новосибирск: Наука, 1983. 214 с.
4. **Дубнищев Ю. Н., Ринкевичюс Б. С.** Методы лазерной доплеровской анемометрии. М.: Наука, 1982. 304 с.
5. **Дубнищев Ю. Н.** Теория и преобразование сигналов в оптических системах: Учеб. пособие для вузов. С.-Пб.: Лань, 2011. 364 с.
6. **Соболев В. С., Столповский А. А., Щербаченко А. М. и др.** Следящая лазерная доплеровская система на основе оптимальных оценок мгновенной частоты // Автометрия. 2006. **42**, № 1. С. 103–115.
7. **Czarske J. W.** Statistical frequency measuring error of the quadrature demodulation technique for noisy single-tone pulse signals // Meas. Sci. Technol. 2001. **12**, N 5. P. 597–614.
8. **Банах В. А., Смалихо И. Н.** Когерентные доплеровские ветровые лидары в турбулентной атмосфере. Томск: Изд-во ИОА СО РАН, 2013. 303 с.
9. **Baral-Baron G., Lahalle E., Fleury G. et al.** Signal parameters estimation using time-frequency representation for laser Doppler anemometry // Proc. of the 20th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2012). Budapest: IEEE, 2012. P. 2318–2322.

10. **Тихонов В. И.** Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио, 1966. 682 с.
11. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1968. Кн. 2. 494 с.
12. **Ван Трис Г.** Теория обнаружения, оценок и модуляции. М.: Сов. радио, 1977. Т. 3. 662 с.
13. **Сейдж Э., Мэлс Дж.** Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976. 495 с.
14. **Соболев В. С.** Оптимальные оценки параметров оптических сигналов. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2011. 135 с.
15. **Соболев В. С., Тимохин С. А.** Максимально правдоподобные оценки параметров сигналов лазерных доплеровских систем (обзор) // Автометрия. 2014. **50**, № 6. С. 42–54.
16. **Doviak R. J., Zrnich D. S.** Doppler Radar and Weather Observations. Dover Publications, 2006. 562 p.
17. **Frehlich R. G., Yadlovsky M. J.** Performance of mean-frequency estimators for Doppler radar and lidar // Journ. Atmospheric and Oceanic Technology. 1994. **11**, N 5. P. 1217–1230.
18. **Frehlich R. G.** Kramer — Rao bound for Gaussian random processes and applications to radar processing of atmospheric signals // IEEE Trans. Geosci. and Remote Sensing. 1993. **31**, N 6. P. 1123–1131.
19. **Chornoboy E. S.** Optimal mean velocity estimation for Doppler weather radars // IEEE Trans. Geosci. and Remote Sensing. 1993. **31**, N 3. P. 575–586.
20. **Novak L. M.** On the estimation of spectral parameters using burst waveforms // MIT, Lincoln Laboratory. Technical Report 672. Defense Technical Information Center, 1983. 60 p.
21. **Besson O., Galtier F.** Estimation particles velocity from laser measurements: Maximum likelihood and Cramer — Rao bounds // IEEE Trans. Signal Process. 1996. **44**, N 12. P. 3056–3068.
22. **Shu W.-Q.** Cramer — Rao bound of laser Doppler anemometer // IEEE Trans. Signal Process. 2001. **50**, N 6. P. 1770–1772.
23. **Соболев В. С., Прокопенко М. Н.** Максимально правдоподобные оценки частоты и других параметров сигналов лазерных доплеровских систем, работающих в одночастичном режиме рассеяния // Квантовая электроника. 2000. **30**, № 12. С. 1109–1114.
24. **Sobolev V. S., Feschenko A. A.** Accurate Cramer — Rao bounds for a laser Doppler anemometer // IEEE Trans. Instrum. Meas. 2006. **55**, N 2. P. 659–665.

Поступила в редакцию 1 сентября 2014 г.
