

УДК 533

ГАЛИЛЕЕВО-ИНВАРИАНТНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ АВТОМОДЕЛЬНАЯ ПОДМОДЕЛЬ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ БЕЗ ЗАКРУТКИ

С. В. Хабиров

Институт механики Уфимского научного центра РАН, 450054 Уфа
E-mail: habirov@anrb.ru

Рассмотрена давно не исследовавшаяся подмодель инвариантных решений ранга 1 уравнений газовой динамики. Показано, что в цилиндрических координатах подмодель без закрутки сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Для уравнения состояния с дополнительной инвариантностью получена автономная система. Построена картина фазовых траекторий и с использованием асимптотических методов изучены движения частиц. Полученные решения описывают нестационарные обтекания осесимметричных тел с возможными сильными разрывами.

Ключевые слова: газовая динамика, инвариантная подмодель, сильные разрывы.

Введение. В работе [1] предложена программа получения и исследования решений уравнений идеальной газовой динамики на основе допускаемой группы преобразований. Для уравнения состояния общего вида такой группой является группа Галилея, расширенная растяжением. Основой для классификации симметричных решений является оптимальная система подалгебр алгебры Ли допускаемой группы. По каждой подалгебре оптимальной системы можно построить подмодель из инвариантных, частично инвариантных или дифференциально-инвариантных решений [2]. Инвариантные подмодели в основном перечислены [3] и многие из них исследованы, например установившиеся течения, одномерные движения, конические течения и т. п. Инвариантные подмодели ранга 1 сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям и в основном исследованы [4]. Однако имеется две трехмерные подалгебры, для которых инвариантные подмодели исследованы недостаточно, возможно, потому, что в квазилинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений коэффициенты содержат переменные с дробными показателями [4, § 18]. В настоящей работе исследован частный случай одной из подмоделей для движений газа без закрутки. Получены различные нестационарные обтекания осесимметричных тел в продольном направлении с возможным появлением ударных волн или волн горения. Показано, что некоторые течения газа содержат предельные поверхности, где ускорение бесконечно. Метод исследования разработан на основе автомодельных решений одномерных движений идеального политропного газа [5].

1. Галилеево-инвариантная осесимметричная автомодельная подмодель.

Рассмотрим подалгебру 3.3 оптимальной системы 11-мерной алгебры Ли, допускаемой уравнениями газовой динамики с произвольным уравнением состояния [1]. Базис операторов подалгебры состоит из оператора галилеева переноса $t \partial_x + \partial_U$, оператора вращения ∂_θ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00047-а) и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (№ НШ-2826.2008.1).

и оператора растяжения $t \partial_t + x \partial_x + r \partial_r$ в цилиндрической системе координат t, x, θ, r . Инварианты этих операторов задают представление решения

$$U = x/t + U_1(s), \quad V = V(s), \quad W = W(s), \quad \rho = \rho(s), \quad S = S(s), \quad s = r/t, \quad (1.1)$$

где ρ — плотность; S — энтропия; U, V, W — координаты скорости; давление определяется уравнением состояния $p = f(\rho, S)$.

В цилиндрической системе координат уравнения газовой динамики имеют вид

$$\begin{aligned} U_t + UU_x + VU_r + r^{-1}WU_\theta + \rho^{-1}p_x &= 0, \\ V_t + UV_x + VV_r + r^{-1}WV_\theta + \rho^{-1}p_r &= r^{-1}W^2, \\ W_t + UW_x + VW_r + r^{-1}WW_\theta + \rho^{-1}r^{-1}p_\theta &= -r^{-1}VW, \\ \rho t + U\rho_x + V\rho_r + r^{-1}W\rho_\theta + \rho(U_x + V_r + r^{-1}V + r^{-1}W_\theta) &= 0, \\ S_t + US_x + VS_r + r^{-1}WS_\theta &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Подставляя представление (1.1) в (1.2), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (V - s)U'_1 + U_1 &= 0, & \rho(V - s)V' + p' &= 0, & (V - s)sW' + VW &= 0, \\ (V - s)s\rho' + \rho(sV' + V + s) &= 0, & (V - s)S' &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Поскольку при $\rho \neq 0$ $V \neq s$, из последнего уравнения в (1.3) следует интеграл энтропии $S = S_0$, являющийся постоянной. Тогда $p' = f_\rho \rho' = a^2 \rho'$ (a — скорость звука).

Имеется еще два интеграла

$$W^3 s^2 = C_1 \rho (V - s), \quad U_1 = \mathcal{D} s W,$$

где C_1, \mathcal{D} — постоянные, в чем легко убедиться, проведя дифференцирование.

После исключения функции W подмодель сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} V' + (V - s)\rho^{-1}\rho' &= -1 - s^{-1}V, \\ (V - s)V' + a^2 \rho^{-1}\rho' &= C_1^{2/3} s^{-7/3} \rho^{2/3} (V - s)^{2/3}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Если определитель системы равен нулю: $f_\rho = a^2 = (V - s)^2$, получаем особое решение квазилинейной системы (1.4), исследованное в работе [4, § 18]. В этом случае из условия совместности следует равенство $C_1^2 \rho^2 = s^4 (V + s)^3 (s - V)$, а из соотношений (1.4) — интеграл $s^5 (s + V)^3 (2s - 3V)^2 = -E ((1 + s^{-1}V)E > 0, E = \text{const})$. Такое решение возможно лишь для уравнения состояния, заданного параметрически:

$$C_1^2 \rho^2 = E^{4/5} k (2 - k)^{3/5} (3k - 1)^{-8/5}, \quad f_\rho = E^{1/5} k^2 (2 - k)^{-3/5} (3k - 1)^{-2/5}$$

(k — параметр). Если $f_\rho \neq (V - s)^2$, систему (1.4) можно разрешить относительно производных.

Рассмотрим подмодель без закрутки ($C_1 = 0$). В этом случае $W = U_1 = 0$. Получаем неавтономную квазилинейную систему, но без дробных показателей в коэффициентах. Первое уравнение системы (1.4) инвариантно относительно растяжений $s \rightarrow \alpha s, V \rightarrow \alpha V, \rho \rightarrow \beta \rho$ для любых α и β . В результате проведенного преобразования второе уравнение системы (1.4) принимает вид

$$(V - s)V' + \alpha^{-2} a^2 (\beta \rho) \rho^{-1} \rho' = 0.$$

Для того чтобы это уравнение было инвариантным, функция $a(\rho)$ должна удовлетворять функциональному уравнению $a(\beta\rho) = \alpha a(\rho)$. При $\alpha = \beta^{(\gamma-1)/2}$ общее решение функционального уравнения принимает вид $a = \mathcal{D}\rho^{(\gamma-1)/2}$. Отсюда следует, что уравнение состояния должно иметь вид $p = \mathcal{D}^2(S)\gamma^{-1}(\rho^\gamma - 1) + S$. Дополнительная симметрия системы (1.4) позволяет получить автономную систему, если записать ее через инварианты $\rho = s^{2/(\gamma-1)}\rho_1$, $V = sV_1$. Вводя новую функцию $\tau = \mathcal{D}^2\rho_1^{\gamma-1}$, получаем систему, сводящуюся к автономной системе

$$\begin{aligned} ((V_1 - 1)^2 - \tau)sV_1' &= -V_1(V_1 - 1)^2 + (1 + 2V_1)\tau, \\ ((V_1 - 1)^2 - \tau)(s\tau^{-1}\tau' + 2) &= (\gamma - 1)(1 - V_1^2), \end{aligned} \quad (1.5)$$

которая равносильна уравнению

$$\frac{d\tau}{dV_1} = \tau \frac{(1 - V_1)((\gamma + 1)V_1 + \gamma - 3) + 2\tau}{(1 + 2V_1)\tau - V_1(V_1 - 1)^2} \quad (1.6)$$

с рациональной правой частью.

Прямая $\tau = 0$ является интегральной. Интегральные кривые уравнения (1.6) имеют физический смысл в полуплоскости $\tau \geq 0$.

2. Интегральные кривые. Парабола π экстремумов интегральных кривых $\tau = \tau(V_1)$ имеет вид

$$\tau = (V_1 - 1)((\gamma + 1)V_1 + \gamma - 3)/2.$$

Кривая l экстремумов интегральных кривых $V_1 = V_1(\tau)$ имеет вид

$$\tau = V_1(V_1 - 1)^2(2V_1 + 1)^{-1}.$$

Эта кривая является двухсвязной, имеет асимптоту $V_1 = -1/2$ и касается оси V_1 в неэлементарной особой точке $K = (1, 0)$. Точки пересечения кривых l , π и прямой $\tau = 0$ являются особыми. Уравнение (1.6) имеет четыре особые точки.

В узле $O = (0, 0)$ поведение интегральных кривых представим следующим образом:

$$V_1 \simeq \tau/(\gamma - 2) + C\tau^{1/(3-\gamma)} \quad (2.1)$$

(C — постоянная). В предположении, что $1 < \gamma < 2$, интегральные кривые касаются прямой $\tau = 0$, исключение составляет выделенная ветвь при $C = 0$.

В окрестности неэлементарной особой точки K , так же как в узле, интегральные кривые касаются оси V_1 , но не имеют выделенной ветви и являются замкнутыми. В окрестности точки K асимптотика интегральных кривых имеет вид

$$\begin{aligned} \tau \sim v^2 \left(\frac{2 - \gamma}{3} - \frac{(2 - \gamma)(\gamma + 1)}{9(5 - 3\gamma)} v + C|v|^{2(2-\gamma)/(\gamma-1)} \right) \quad \text{при } \gamma \neq \frac{5}{3}, \\ \tau \sim \frac{1}{9} v^2 \left(1 - \frac{4}{3} v \ln |v| + Cv \right) \quad \text{при } \gamma = \frac{5}{3}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $v = V_1 - 1$ — малая величина.

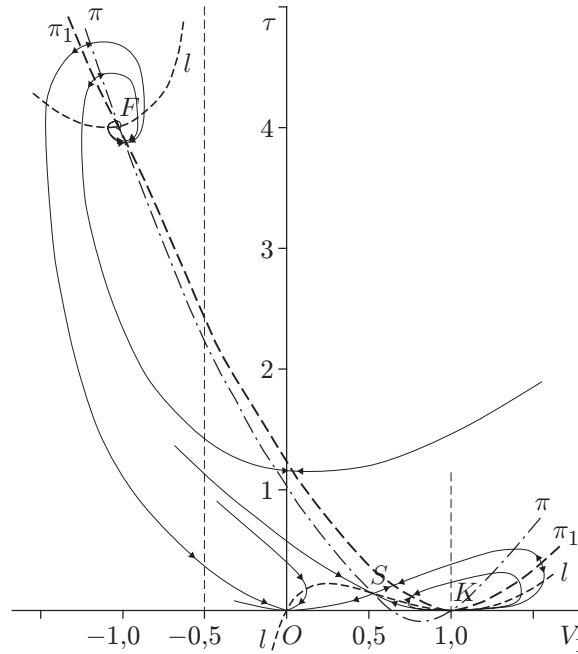
Точка $S = (2^{-1}(3\gamma^{-1} - 1), (3/8)(3 - \gamma)(1 - \gamma^{-1})^2)$ представляет собой седло с касательными к сепаратрисам

$$\begin{aligned} 8\tau - 3(3 - \gamma)(1 - \gamma^{-1})^2 = \\ = [5\gamma - 9 \pm \sqrt{(5\gamma - 9)^2 + 8(9 - \gamma^2)(\gamma - 1)}] (V_1 - (1/2)(3\gamma^{-1} - 1)). \end{aligned} \quad (2.3)$$

В фокусе $F = (-1, 4)$ поведение интегральных кривых задается параметрически:

$$V_1 + 1 \sim -(1/4)C \exp(-\varphi\gamma_1) \cos \varphi, \quad \tau - 4 \sim (\cos \varphi + \gamma_1^{-1} \sin \varphi)C \exp(-\varphi\gamma_1).$$

Здесь $\gamma_1 = \sqrt{2(1 + \gamma)^{-1}}$; φ — параметр.



Интегральные кривые уравнения (1.6) в окрестности особых точек: стрелки — направления возрастания величины s

На рисунке представлена картина интегральных кривых. Парабола $\pi_1: \tau = (V_1 - 1)^2$ выделяет на интегральной кривой точку, которой соответствует предельная поверхность в области движения газа, где ускорение бесконечно. Эта поверхность является звуковой в радиальном направлении.

3. Движения газа, соответствующие интегральным кривым в окрестностях особых точек. Фокусу F соответствует решение (1.1) вида

$$U = xt^{-1}, \quad V = -s, \quad W = 0, \quad \rho^{\gamma-1} = 4D^{-2}|s|^2, \\ p = D^2\gamma^{-1}\rho^\gamma + S, \quad S = S_0, \quad a = 2|s|, \quad s = rt^{-1}.$$

Вдоль мировой линии $\theta = \theta_0, r = r_0|t|^{-1}, x = x_0t$ газодинамические функции изменяются следующим образом:

$$\rho^{\gamma-1} = 4D^{-2}r_0^2t^{-4}, \quad a = 2r_0|t|^{-2}, \quad V = -r_0t^{-2}, \quad U = x_0.$$

Траектории представляют собой гиперболы, асимптотами которых являются оси r, x . При $t > 0$ частицы из бесконечно удаленной окружности ($r \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$) фокусируются к оси $x: r \rightarrow 0, x \rightarrow \infty (U \rightarrow x_0, V \rightarrow 0, \rho \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty)$. Такое поведение соответствует формированию струи. При $t < 0$ частицы из бесконечности на оси x при $t \rightarrow -\infty$ стремятся к бесконечно удаленной окружности: $r \rightarrow \infty, x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -0 (U \rightarrow x_0, V \rightarrow \infty, \rho \rightarrow \infty)$, что соответствует натеканию струи на стенку.

Седловой точке S соответствует решение

$$U = \frac{x}{t}, \quad V = \left(\frac{3}{2\gamma} - \frac{1}{2}\right)\frac{r}{t}, \quad W = 0, \quad a^2 = \frac{3}{8}(3 - \gamma)(1 - \gamma^{-1})^2\frac{r^2}{t^2}. \quad (3.1)$$

При $\gamma = (2 + \sqrt{13})/3$ имеем “звуковое” движение: $|V| = a$.

В точке $x = 0$, $r = 0$ при $t \rightarrow -0$ мировые линии частиц

$$\theta = \theta_0, \quad x = x_0 t, \quad r = r_0 |t|^{(3-\gamma)/(2\gamma)}$$

коллапсируют, затем происходит мгновенный взрыв.

В узле O при $\gamma = 3/2$ асимптотика (2.1) имеет вид

$$V_1 \sim -2\tau + C\tau^{2/3},$$

где $C \neq 0$ — параметр интегральных кривых; τ — малый параметр. Система (1.5) определяет асимптотику величины $s \sim \mathcal{D}(-(2/3)C + \tau^{-2/3})$ (\mathcal{D} — постоянный параметр различных решений).

Уравнение мировых линий частиц $dr/dt = V$ определяет величины t и $r = ts$ в зависимости от τ при $C \neq 0$:

$$t \sim N\tau^{2/3}(1 + (5/3)C\tau^{2/3}), \quad r \sim NC(1 + C\tau^{2/3}) \sim C(N + (3/10)Ct)$$

(N — характеризующая частицу постоянная).

При $\tau \rightarrow 0$ $r \rightarrow NC$, $t \rightarrow 0$, $V \rightarrow (3/10)C^2$ и частицы начинают двигаться с одинаковой скоростью.

При $C = 0$ асимптотики имеют вид

$$V_1 \sim -2\tau, \quad s \sim \mathcal{D}\tau^{-2/3}(1 + (2/3)\tau), \quad t \sim N(\tau^{2/3} - 2\tau^{5/3}), \\ r \sim \mathcal{D}N(1 - (4/3)\tau), \quad V \sim -2\mathcal{D}\tau^{1/3}(1 + (2/3)\tau).$$

При $t \rightarrow -0$, $\mathcal{D} < 0$, $N < 0$ движение заканчивается ($V \rightarrow 0$) с бесконечным торможением. При $t \rightarrow 0$, $\mathcal{D} > 0$, $N > 0$ движение начинается с нулевой скоростью и бесконечным ускорением. Поскольку для частицы $x = x_0 t$, траекторию, выходящую из начала системы координат, можно считать стенкой. Такое движение можно интерпретировать как нестационарное обтекание стенки.

В окрестности точки $K = (1, 0)$ при $\gamma = 3/2$ асимптотика (2.2) имеет вид

$$\tau \sim (1/6)v^2 - (5/18)v^3 + Cv^4, \quad v = V_1 - 1.$$

Из соотношений (1.5) получаем

$$s \sim \mathcal{D}(1 - (5/3)v).$$

Из уравнений для мировых линий следует

$$t \sim N|v|^{-5/3}, \quad r \sim N\mathcal{D}|v|^{-5/3}(1 - (5/3)v).$$

При $v \rightarrow 0$ $t \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \mathcal{D}$ и разлет частиц в бесконечность происходит с одинаковой конечной скоростью.

Интегральная кривая, соединяющая особые точки O и K , описывает разлет в бесконечность с одинаковой скоростью частиц, обтекающих осесимметричное тело.

При $\gamma = 3/2$ асимптотики (2.3) сепаратрис седла S порождают решение $s = C|v|^{(2 \pm \sqrt{13})/6}$ и движение частиц:

$$t \sim N|v|^{-(2 \pm \sqrt{13})/3}, \quad r \sim NC|v|^{-(2 \pm \sqrt{13})/6} \sim C|\mathcal{D}t|^{1/2}.$$

Аналогично стационарному решению (3.1) для сепаратрисы со знаком “+” получаем коллапс и мгновенный источник. Для сепаратрисы со знаком “-” при $v \rightarrow 0$ имеем $t \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$, что соответствует растеканию газа с бесконечной скоростью на бесконечности.

В точках параболы π_1 асимптотика решений системы (1.5) принимает вид

$$\tau_0 = (V_{10} - 1)^2.$$

Исключая особые точки, получаем

$$\tau - (V_{10} - 1)^2 \sim -\frac{1}{2}(V_{10} - 1)v + \frac{9(2 - 3V_{10})}{8(V_{10} + 1)}v^2, \quad s \sim C\left(1 + \frac{5v^2}{4(1 - V_{10}^2)}\right),$$

где $v = V_1 - V_{10}$ — малый параметр; C, V_{10} — постоянные решений. Асимптотика мировых линий задается параметрически:

$$t \sim N\left(1 + \frac{5v^2}{4(1 - V_{10}^2)(V_{10} - 1)}\right), \quad r = ts \sim CN\left(1 + \frac{5V_{10}v^2}{4(1 - V_{10}^2)(V_{10} - 1)}\right)$$

(N — постоянная, определяющая мировую линию частицы).

При $v \rightarrow 0$ частицы находятся на прямой $r = Ct$ и имеют одинаковые скорости CV_{10} . При $v \rightarrow +0, v \rightarrow -0$ частицы движутся по разным кривым (слагаемые в асимптотиках с нечетными степенями разного знака), но по одну сторону от предельной прямой. Следовательно, в одной и той же области, ограниченной предельной звуковой (в радиальном направлении) линией, имеем два различных течения газа. На рисунке это показано стрелками, направления которых по разные стороны от параболы π_1 противоположны. Область выше параболы π_1 соответствует дозвуковым движениям, область ниже параболы π_1 — сверхзвуковым движениям.

4. Сильные разрывы. Движения по разные стороны от звуковой параболы π_1 можно объединить в одно движение, используя инвариантный ударный или детонационный переход в точках интегральных кривых, примыкающих к этой параболе.

Рассмотрим политропный газ, уравнение состояния которого имеет вид

$$p = \gamma^{-1} \mathcal{D}(S)^2 \rho^\gamma.$$

Инвариантная поверхность сильного разрыва задается равенством $r = Et$ (E — постоянная скорость). Условие на разрыве запишем в инвариантном виде [5, гл. 4, § 2]

$$\begin{aligned} [W] &= [U] = 0, \\ \rho_1(V_{11} - 1) &= \rho_2(V_{12} - 1), \\ p_1 + \rho_1(V_{11} - 1)^2 E^2 &= p_2 + \rho_2(V_{12} - 1)^2 E^2, \\ \frac{\gamma_1 p_1}{(\gamma_1 - 1)\rho_1} + \frac{1}{2}(V_{11} - 1)^2 E^2 + Q &= \frac{\gamma_2 p_2}{(\gamma_2 - 1)\rho_2} + \frac{1}{2}(V_{12} - 1)^2 E^2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где Q — приток энергии к единице массы в детонационной волне или в волне горения. В ударной волне $Q = 0, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$.

Используя переменные τ, V_1 , условия разрыва (4.1) представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{\tau_2}{\gamma_2(V_{12} - 1)} + V_{12} &= \frac{\tau_1}{\gamma_1(V_{11} - 1)} + V_{11}, \\ \frac{2\tau_2}{\gamma_2 - 1} + (V_{12} - 1)^2 &= Q_1 + \frac{2\tau_1}{\gamma_1 - 1} + (V_{11} - 1)^2, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $Q_1 = 2QE^{-2} > 0$. В волне горения происходит разрежение $\tau_2 < \tau_1$ в дозвуковой области $\tau_i > (V_{1i} - 1)^2$. Детонационная волна представляет собой волну сжатия $\tau_2 > \tau_1$ с переходом из сверхзвуковой области в дозвуковую область или на звуковую линию (условие Чепмена — Жуке).

Картины интегральных кривых для различных значений γ различаются только расположением седла ниже предельной звуковой параболы в сверхзвуковой области.

Соотношения (4.2) преобразуют точку (V_{11}, τ_1) перед фронтом в точку (V_{12}, τ_2) за фронтом. При этом для детонационной волны кривая из сверхзвуковой области отображается в звуковую параболу π_1 :

$$\frac{\tau_1}{(V_{11} - 1)^2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2^2(\gamma_1 - 1)} \left[\gamma_2^2 - \gamma_1 + \sqrt{\gamma_2^2 - 1} \sqrt{\gamma_2^2 - \gamma_1^2 + Q_1 \gamma_2^2 (\gamma_1 - 1)^2 (V_{11} - 1)^{-2}} \right].$$

Для ударной волны звуковая параболла остается инвариантной.

Если точка за фронтом находится в дозвуковой области, то дальнейшее движение по интегральной кривой в направлении стрелки приводит на предельную звуковую линию. Таким образом, сильный разрыв не может устранить предельную линию в движении газа, а, наоборот, приводит к ее появлению.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
2. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. **Хабиров С. В.** Инвариантные решения уравнений газовой динамики // Вестн. Уфим. гос. авиац.-техн. ун-та. 2001. № 1. С. 47–52.
4. **Хабиров С. В.** Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: Гилем, 2003.
5. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1965.

*Поступила в редакцию 4/VI 2008 г.,
в окончательном варианте — 11/IX 2008 г.*