

ЛИТЕРАТУРА

1. Волошенко - Климовицкий Ю. Я. Динамический предел текучести. М., «Наука», 1965.
2. Волошенко - Климовицкий Ю. Я., Беляев Ю. А., Мельшанов А. Ф. Аппаратура для испытаний материалов при высоких скоростях нагружения. Заводск. лаборатория, 1967, т. 33, № 8, стр. 1016—1019.
3. Шапиро Г. С. Продольные колебания стержней. ПММ, 1946, т. 10, вып. 5, стр. 597—616.
4. Campbell J. D. Dynamic yielding of mild steel. Acta Metallurgica, 1953, vol. 1, № 6, pp. 706—710.
5. Суворова Ю. В. Запаздывание текучести в сталях (обзор экспериментальных работ). ПМТФ, 1968, № 3.
6. Krafft J. M. Effect of temperature on delayed yielding of mild steel for short loading duration. Trans. Amer. Soc. Metals, 1956, vol. 48, pp. 249—261.
7. Warnock F. V. and Taylor D. B. C. Yield Phenomena of a Medium Carbon Steel under Dynamic Loading. Proc. Instn. Mech. Engrs, 1949, vol. 161, p. 165.
8. Elam C. F. The Influence of rate of deformation on the tensile test with special reference to the yield point in iron and steel. Proc. Roy. Soc., London, 1938, vol. 165, pp. 568—592.
9. Krafft J. M., Sullivan A. M. Effect of grain size and carbon content on the yield delay time of mild steel. Trans. Amer. Soc. Metals, 1959, vol. 51, pp. 643—665.
10. Wood D. S., Clark D. S. The influence of temperature upon the time delay for yielding in annealed mild Steels. Trans. Amer. Soc. Metals, 1951, vol. 43, pp. 571—586.

**ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ
ОБРАЗЦОВ С ШЕЙКОЙ**

В. М. Сегал (Минск)

Рассматривается пластическое растяжение образца, ограниченного криволинейной поверхностью вращения. Такая конфигурация может возникать, например, вследствие образования шейки при растяжении. Материал образца подчиняется условию пластичности Треска и ассоциированному закону течения. Приближенные решения для распределения напряжений в шейке рассматриваются в [6]. Растяжение цилиндрических образцов с вырезами исследовалось в [2,4] численным и графическим методами. Ниже дается аналитическое решение задачи для достаточно плавной формы шейки; учитывается малая неоднородность пластических свойств.

1. Примем, что рассматриваемое пластическое состояние соответствует режиму Хаара — Кармана [1]; справедливость этого предложения, как обычно, оправдывается возможностью получения полного решения. При растяжении радиальная составляющая скорости течения $u < 0$, и согласно принятому режиму окружное главное напряжение

$$\sigma_{\theta} = 1/2 (\sigma_r + \sigma_z) - k$$

а компоненты σ_r , σ_z , τ_{rz} должны удовлетворять условиям равновесия и пластичности

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_z}{2r} + \frac{k}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0$$

$$(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2 = 4k^2 \quad (1.1)$$

Здесь k — предел текучести материала на сдвиг. Пластическое течение возникает в области AOB (фиг. 1), примыкающей к минимальному сечению образца. Отсутствие напряжений на свободной поверхности позволяет записать граничные условия для системы (1.1)

$$\sigma_r = k - k \cos 2\lambda, \quad \sigma_z = k + k \cos 2\lambda, \quad \tau_{rz} = k \sin 2\lambda \quad (1.2)$$

где λ — угол между касательной к AB и осью oz .

Форма шейки вне AB не оказывает влияния на решение, однако она должна быть такой, чтобы в жестких областях нигде не превышалось условие пластичности. В области определения решения (на участке AB) будем считать, что шейка образована гладкой кривой, уравнение которой может быть записано в виде

$$\frac{r}{a} = 1 + \delta\Phi\left(\frac{z}{a}\right), \quad \Phi(0) = \Phi'(0) = 0 \quad (1.3)$$

а распределение механических свойств в пластической области примем

$$k = k(r) + \varepsilon K(r, z) \quad (1.4)$$

Здесь a — радиус минимального сечения, δ, ε — малые безразмерные параметры одного порядка.

Пластическая неоднородность типа (1.4) может возникать, например, вследствие упрочнения при растяжении.

Уравнения (1.1) — (1.4) допускают переход к безразмерным величинам, и в дальнейшем все геометрические размеры будут отнесены к характерному размеру a , а напряжения — к $k(r)$.

Запишем линеаризованное решение системы (1.1) по параметрам δ и ε

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\circ} + (\delta + \varepsilon) \sigma_{ij}' \quad (1.5)$$

Случай $\delta = \varepsilon = 0$ соответствует растяжению кругового цилиндра, когда предел текучести является функцией только координаты r , и для нулевого решения имеем

$$\sigma_z^{\circ} = 2, \quad \sigma_r^{\circ} = \tau_{rz}^{\circ} = 0 \quad (1.6)$$

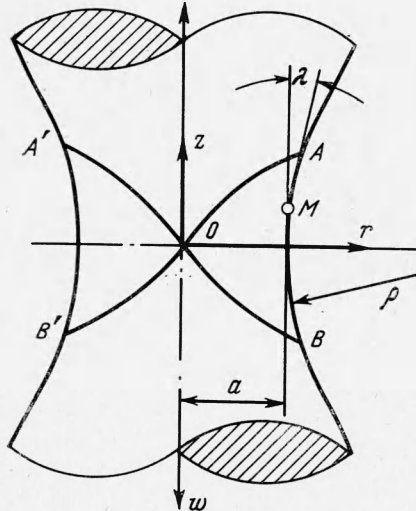
Подстановка (1.5), (1.6) в (1.1) и линеаризация дают

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r'}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}'}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{rz}'}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_r'}{\partial z} + m \frac{\partial K}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}'}{r} = 0 \\ \sigma_z' = \sigma_r' + mK \end{aligned} \quad (1.7)$$

а линеаризация (1.2), (1.3)

$$\sigma_r' = 0, \quad \sigma_z' = mK, \quad \tau_{rz}' = (2 - m) \frac{d\varphi(z)}{dz} \quad \text{при } r = 1, \quad \left(m = 2 \frac{\varepsilon}{\delta + \varepsilon} \right) \quad (1.8)$$

Решение уравнений (1.7) при граничных условиях (1.8), определяющих задачу Коши, будем искать в виде ряда



Фиг. 1

$$\begin{aligned} \sigma_r' &= N_0(z) + \sum_{i=1}^{\infty} N_i(z)(1-r)^i \\ \sigma_z' &= S_0(z) + \sum_{i=1}^{\infty} S_i(z)(1-r)^i \\ \tau_{rz}' &= T_0(z) + \sum_{i=1}^{\infty} T_i(z)(1-r)^i \end{aligned} \quad (1.9)$$

для чего функцию неоднородности $K(r, z)$ также разложим по степеням $(1-r)$

$$K(r, z) = K_0(z) + \sum_{i=1}^{\infty} K_i(z)(1-r)^i \quad (1.10)$$

Сходимость рядов (1.9), (1.10) обеспечивается выбором $\varphi(z)$, $K(r, z)$, как аналитических функций своих аргументов [3].

Удовлетворяя граничным условиям (1.8), имеем

$$N_0 = 0, \quad S_0 = mK_0, \quad T_0 = (2 - m) \frac{d\varphi(z)}{dz}$$

подставляя (1.9), (1.10) в уравнения (1.7) и приравнявая нулю члены, содержащие одинаковые степени $(1-r)$, находим рекуррентные формулы для последовательного вычисления остальных коэффициентов ряда (1.9)

$$N_i = \frac{1}{i} T_{i-1}', \quad S_i = N_i + mK_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$T_1 = N_0' + T_0 + mK_0'$$

$$T_i = \frac{1}{i} (iT_{i-1}' - N_{i-2}' + N_{i-1}' - mK_{i-2}' + mK_{i-1}'), \quad i = 2, 3, 4, \dots \quad (1.12)$$

Если неоднородность зависит только от r , то, полагая в (1.12) $m = 0$, получим

$$\begin{aligned} N_1 = T_0', \quad T_1 = T_0, \quad N_2 = 1/2 T_0, \quad T_2 = T_0 + 1/2 T_0'' \\ N_3 = 1/3 T_0 + 1/6 T_0''', \quad T_3 = T_0 + 1/3 T_0'' \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} N_4 = 1/4 T_0' + 1/12 T_0''', \quad T_4 = T_0 + 7/24 T_0'' + 1/24 T_0''''; \dots \\ S_i = N_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1.14)$$

В формулах (1.12), (1.13) штрихами обозначены производные по z .

Вблизи оси симметрии в уравнениях (1.1) члены, содержащие r^{-1} , обращаются в нуль [4], и поле напряжений может быть продолжено, следуя [3].

2. Рассмотрим поле скоростей. Проекция скорости u, w на направления or, oz должны удовлетворять условию несжимаемости

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} = 0 \quad (2.1)$$

и условию изотропии

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (2.2)$$

Граничные условия для скоростей заданы на линиях скольжения OA и OB , вдоль которых необходимо выполнять непрерывность нормальной компоненты. В соответствии с (1.5) положим

$$u = u^0 + (\delta + \epsilon) u', \quad w = w^0 + (\delta + \epsilon) w'$$

Если жесткие части образца перемещаются со скоростями $w = V, w = -V$, то для нулевого решения поле скоростей будет [1]

$$\frac{u^0}{V} = -\frac{2}{\pi} \left[i - \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \frac{w^0}{V} = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \left(\frac{z}{r} \right) \quad (2.3)$$

Для величин u', w' сохраняются линейные уравнения (2.1), (2.2), а линеаризации граничных условий вдоль OA и OB дает

$$u' + w' = 0 \quad \text{при } r = z, \quad r = -z$$

Нетрудно видеть, что этим условиям удовлетворяет решение

$$u' = w' = 0$$

Таким образом, с точностью до величин второго порядка рассматриваемая форма шейки (1.3) не влияет на поле скоростей (2.3) нулевого решения. Аналогичное обстоятельство, как известно, имеет место и в случае плоской деформации [5]; оно сохраняется для неоднородности типа (1.4).

3. При анализе напряженного состояния в шейке растягиваемого образца функции (1.3) и (1.4) обычно должны быть определены экспериментально. Решение (1.9) оказывается особенно простым, если $\varphi(z)$ является целым многочленом n -ой степени; при этом производные от T_0 , начиная с n -ой, обращаются в нуль и ряды (1.9) могут быть просуммированы.

Рассмотрим для простоты растяжение однородного стержня с параболической шейкой (фиг. 1)

$$r = 1 + \delta z^2 \quad (3.1)$$

Коэффициенты (1.13) будут

$$\begin{aligned} N_0 = 0, \quad N_i = \frac{1}{i} T_0' = \frac{4}{i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \\ T_0 = T_i = 4z \end{aligned}$$

и суммирование дает

$$\sigma_r' = \sigma_z' = -4 \ln r, \quad \tau_{rz}' = 4z/r \quad (3.2)$$

Вблизи оси симметрии ($r \ll \gamma, \gamma \rightarrow 0$) решение становится

$$\sigma_r' = \sigma_z' = A - 4 \frac{r}{\gamma}, \quad \tau_{rz}' = 4 \frac{z}{\gamma} \quad (3.3)$$

Постоянная A определяется из условия сопряжения (3.2) и (3.3)

$$A = 4(1 - \ln \gamma)$$

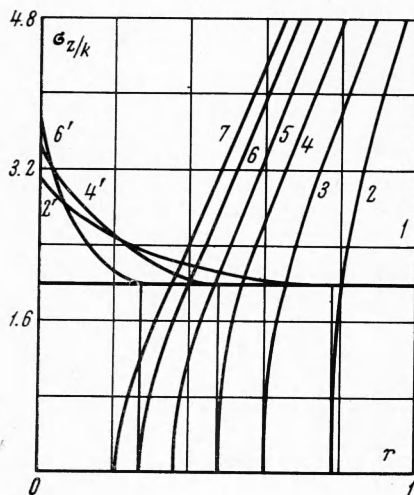
Граница области решения (3.3) неизвестна, однако конечность напряжений на оси требует, чтобы γ была того же порядка, что и δ . С точностью до величин порядка δ^2 среднее напряжение течения $\langle \sigma_z \rangle$ находится интегрированием (1.6), (3.2)

$$\langle \sigma_z \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^1 2\pi r (2 - 4\delta \ln r) dr = 2(1 + \delta) = 2 \left(1 + \frac{1}{2\rho} \right) \quad (3.4)$$

где ρ — радиус кривизны меридионального сечения параболоидной шейки при $z = 0$.

Заметим, что формула (3.4) отличается от соответствующего решения Давиденкова Н. Н. и Спиридоновой Н. И. [6] коэффициентом при члене $1/\rho$.

Представляет интерес исследование развития шейки и связанного с ней распределения напряжений на стадии растяжения, предшествующей разрушению. Будем исходить из следующей модели: после достижения предела текучести пластическое течение возникает в окрестности наиболее слабого сечения; вследствие упрочнения положение этого сечения непрерывно меняется и пластическая деформация последовательно охватывает различные участки образца, упрочняя его статистически равномерно и сохраняя исходную цилиндрическую форму. Способность металла к упрочнению, однако, в процессе деформации уменьшается, и с некоторого момента область течения локализуется, вызывая образование шейки. Экспериментальное подтверждение такой модели можно найти в [7]. Как было показано, для произвольной формы шейки, описываемой уравнением типа (1.3), в первом приближении сохраняется поле скоростей



Фиг. 2

(2.3). По уравнениям (2.3) были вычислены последовательные изменения шейки, которые показаны на фиг. 2, кривые 1, . . . , 7. На каждой стадии вычислений форма шейки аппроксимировалась уравнением (3.1) и проверялась малость параметра δ . Вычисления были проведены до уменьшения исходного диаметра в 4.8 раза, однако значение δ не превысило 0.15.

На фиг. 2 нанесены эпюры вертикальных напряжений (кривые 2', 4', 6') в минимальном сечении образца, вычисленные по уравнениям (3.2), (3.3) для рассматриваемых моментов.

Поступила 4 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Shield R. T. On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry. Proc. Roy. Soc. 1955, vol. A233, No. 1193, p. 267—287. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев. и обзор. иностр. период. лит-ры, Изд. иностр. лит., 1957, № 1).
2. Szczerinski W., Dietrich L., Drescher E., Miastkowski J. Plastic flow of axially — symmetric notched bars pulled in tension. Internat. J. Solids and Structure, 1966, vol. 2, No. 4.
3. Komljenovic S., Rychlewski J. A Cauchy problem for the case of plane plastic Strain solved with the use of power series. Bull. Acad. polon. sci., Ser. Sci. Techn., 1963, vol. 9, No. 8, p. 285.
4. Mroz Z. Graphical solution of axially symmetric problems of plastic flow. Z. angew. Math. und Phys., 1967, vol. 18, No. 2.
5. Onat E. T., Prager W. Necking of a tension specimen in plane plastic flow. J. appl. phys., 1954, vol. 25, No. 4. (Рус. перев.: Механика, Сб. перев. и обзор. иностр. период. лит-ры, Изд-во иностр. лит., 1955, № 4).
6. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М., Гостехиздат, 1956.
7. Кошелев П. Ф., Ужик Г. В. Исследование пластической деформации в местах концентрации напряжений методом травления. Изв. АН СССР, ОТИ, Механ. и машиностр., 1959, № 1.