

УДК 532.542, 532.135

## ТЕЧЕНИЕ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРИ ЗАПОЛНЕНИИ КРУГЛОЙ ТРУБЫ

Е. И. Борзенко, Г. Р. Шрагер, В. А. Якутенко

Томский государственный университет, 634050 Томск  
E-mail: buba@bk.ru

Исследованы течения псевдопластичной и вязкопластичной жидкостей со свободной поверхностью в круглой трубе в случае, когда направление движения совпадает с направлением силы тяжести. Численное моделирование проводилось с помощью методики, основанной на совместном использовании алгоритма SIMPLE и метода инвариантов. Выявлено три характерных режима заполнения: режим полного заполнения, промежуточный режим с образованием воздушных полостей на твердой стенке и струйный режим. Рассчитаны критические значения параметров, разделяющие области существования этих режимов. Показана эволюция квазитвердых ядер в случае течения среды с пределом текучести.

**Ключевые слова:** неньютоновская жидкость, свободная поверхность, цилиндрический канал, заполнение, режимы течения, математическое моделирование.

**Введение.** Течения реологически сложной жидкости со свободной поверхностью реализуются в технологических процессах в различных отраслях промышленности. В частности, процесс заполнения каналов различной конфигурации используется в технологии формования изделий из полимерных материалов. При этом возможно образование воздушных полостей в потоке жидкости, что в конечном счете приводит к образованию дефектов в изделии. Основными факторами, обуславливающими возникновение такого рода дефектов, являются характер деформации свободной поверхности и взаимодействие этой поверхности с твердой стенкой. Другие особенности течений появляются вследствие того, что жидкость является неньютоновской.

В работах [1–9] рассмотрены течения вязких сред со свободными границами, реализующиеся при заполнении областей различной конфигурации. Процесс заполнения методом свободного литья прямоугольных пресс-форм жидкостью, свойства которой описываются уравнением Балкли — Гершеля, в струйном режиме экспериментально и численно исследован в [1]. Аналогичная задача для степенной жидкости численно решена в [2]. В работах [3, 4] проведено исследование процесса заполнения вязкопластичной средой осесимметричных объемов методом литья под давлением. Задача о заполнении прямоугольных каналов ньютоновской жидкостью в случае, когда направления движения и силы тяжести совпадают, рассматривалась в [5–7], а в случае, когда они противоположны, — в [8–11].

В настоящей работе исследуется процесс заполнения вертикальной круглой трубы неньютоновской жидкостью в случае, когда направление силы тяжести совпадает с на-

---

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг.

© Борзенко Е. И., Шрагер Г. Р., Якутенко В. А., 2012

правлением движения и возможно формирование струйных течений. Для описания реологических свойств среды используется трехпараметрическая модель Балкли — Гершеля. Поставленная задача решается с помощью численной методики, в которой для расчета полей скорости и давления внутри области используется алгоритм SIMPLE [12], а для аппроксимации естественных граничных условий на свободной поверхности — метод инвариантов [13].

**Постановка задачи.** Рассматривается процесс заполнения вертикальной круглой трубы несжимаемой жидкостью в поле силы тяжести в случае, когда направление движения жидкости совпадает с направлением силы тяжести. Течение описывается уравнениями движения и неразрывности, которые в безразмерных переменных имеют вид

$$\text{Re} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial ru^2}{\partial r} + \frac{\partial u\omega}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + B \left( \Delta u - \frac{u}{r^2} \right) + 2 \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial B}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \right), \quad (1)$$

$$\text{Re} \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial ru\omega}{\partial r} + \frac{\partial \omega^2}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + B \Delta \omega + \frac{\partial B}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + 2 \frac{\partial B}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial z} - W;$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Система уравнений (1), (2) замыкается реологическим уравнением Балкли — Гершеля, в котором эффективная вязкость  $B$  определяется соотношением [14]

$$B = (\text{Se} + A^k)/A. \quad (3)$$

В (1)–(3)  $t$  — время;  $u, \omega$  — проекции вектора скорости на оси цилиндрической системы координат  $(r, z)$ ;  $p$  — давление;  $k$  — степень нелинейности;  $A = (2e_{ij}e_{ji})^{0,5}$  — интенсивность тензора скоростей деформаций;  $e_{ij}$  — компоненты тензора скоростей деформаций;  $\text{Re} = \rho U^{2-k} R^k / \mu^k$  — число Рейнольдса;  $W = \rho R^{k+1} g / (\mu U)^k$  — безразмерный критерий, характеризующий соотношение гравитационных и вязких сил;  $\text{Se} = \tau_0 R^k / (\mu U)^k$  — параметр вязкопластичности;  $\rho$  — плотность жидкости;  $\mu$  — константа в реологическом законе;  $\tau_0$  — предел текучести;  $g$  — ускорение свободного падения. В качестве масштаба обезразмеривания длины выбран радиус канала  $R$ , скорости — среднерасходная скорость во входном сечении  $U$ , давления — величина  $(\mu U / R)^k$ , времени — величина  $R/U$ .

В начальный момент времени свободная поверхность  $\Gamma_3$  расположена горизонтально и имеет плоскую форму (рис. 1), жидкость покоится. При этом входная граница находится на достаточно большом расстоянии от свободной поверхности  $\Gamma_3$ , что позволяет исключить ее влияние на характер течения в окрестности границы  $\Gamma_1$ . На границе  $\Gamma_1$  задан профиль осевой скорости  $V_0(r)$ , характерный для установившегося течения неньютоновской жидкости в круглой трубе, радиальная скорость равна нулю. На твердой стенке  $\Gamma_2$  выполняется условие прилипания, на оси симметрии  $\Gamma_4$  — условия симметрии. На свободной поверхности используются условия равенства нулю касательных напряжений и равенство нормального напряжения внешнему давлению, которое без ограничения общности можно считать равным нулю. Кроме того, на свободной поверхности выполняется кинематическое условие. Силы поверхностного натяжения не учитываются.

Таким образом, граничные условия записываются в виде

$$\Gamma_1: \quad u = 0, \quad \omega = V_0(r); \quad (4)$$

$$\Gamma_2: \quad u = 0, \quad \omega = 0; \quad (5)$$

$$\Gamma_3: \quad \frac{\partial u_n}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial n} + \frac{u}{r} = 0, \quad p = 2B \frac{\partial u_n}{\partial n}; \quad (6)$$

$$\Gamma_4: \quad u = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0. \quad (7)$$

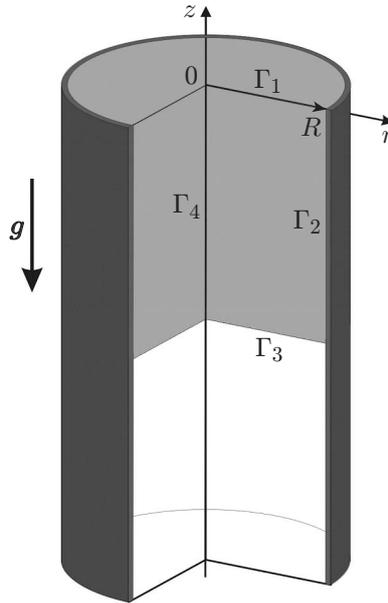


Рис. 1. Область решения в начальный момент времени

Условия (6) записаны в локальной декартовой системе координат  $(n, s)$ , связанной со свободной поверхностью. При движении свободной границы  $\Gamma_3$  выполняется кинематическое условие, которое в лагранжевых переменных имеет вид

$$\frac{dr}{dt} = u, \quad \frac{dz}{dt} = \omega. \tag{8}$$

**Методика численного решения задачи.** Для решения уравнений (1)–(3) с граничными условиями (4)–(8) используется конечно-разностный метод. Уравнения (1) внутри области аппроксимируются экспоненциальными схемами на разнесенной расчетной сетке с помощью корректирующей процедуры SIMPLE, обеспечивающей выполнение уравнения неразрывности [12]. Значения эффективной вязкости в расчетных узлах сетки берутся с предыдущего шага по времени. Для того чтобы были выполнены граничные условия на свободной поверхности, используется метод инвариантов [13], в соответствии с которым из первого условия в (6) и уравнения (2) следуют уравнения

$$\frac{\partial Q}{\partial n} + \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{u}{r} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial n} - \frac{\partial R}{\partial s} + \frac{u}{r} = 0,$$

где  $Q = u_n + u_s$ ;  $R = u_n - u_s$ . Численная реализация данной системы уравнений осуществляется с помощью схемы бегущего счета. Давление на свободной поверхности определяется из разностного аналога второго условия в (6), эволюция свободной поверхности — из разностного аналога условия (8) по схеме Эйлера.

Течение вязкопластичной жидкости характеризуется образованием квазитвердых ядер, в которых значения напряжения меньше предела текучести. В соответствии с (3) для вязкопластичной жидкости ( $Se \neq 0$ ) в зонах ее квазитвердого движения и для псевдопластичной жидкости ( $Se = 0, k < 1$ ) в застойных зонах имеет место особенность  $B \rightarrow \infty$  при  $A \rightarrow 0$ . Вследствие этого возникает необходимость модификации модели Балкли — Гершеля с целью обеспечения сквозного расчета течения включая квазитвердые ядра и застойные зоны. Выражение для эффективной вязкости (3) записывается в модифицированном виде [13]

$$B = \frac{Se + (A + \lambda)^k}{A + \lambda}. \tag{9}$$

При  $\lambda \rightarrow 0$  предлагаемая модификация, допускающая предельный переход к модели Балкли — Гершеля, обеспечивает возможность сквозного расчета течений при наличии в них квазитвердых ядер и застойных зон. Выбирая значение  $\lambda$ , заведомо превышающее погрешности аппроксимации, но достаточно малое для того, чтобы сохранялось физическое содержание модели (3), получаем решение, близкое к решению, найденному с использованием исходной модели. В частном случае  $k = 1$  уравнение (9) эквивалентно реологическому уравнению Уильямсона, применение которого при численном исследовании конвекции вязкопластичной жидкости позволило провести сквозные расчеты при наличии в потоке квазитвердых ядер. Результаты расчетов показывают, что при достаточно малых  $\lambda$  модель является приемлемым приближением среды Шведова — Бингама [15].

При исследовании возникновения и эволюции квазитвердых ядер в потоке в качестве условия их наличия используется неравенство  $BA < Se$ , являющееся безразмерным аналогом условия  $\sqrt{T_2} < \tau_0$ , где  $T_2 = (\tau_{ij}\tau_{ji})/2$  — второй инвариант девиатора тензора напряжений.

**Результаты расчетов.** При заполнении круглой трубы рассматриваемой вязкопластичной жидкостью характер течения определяется значениями параметров  $Re$ ,  $W$ ,  $Se$  и показателя нелинейности  $k$ . Расчеты, выполненные по изложенной выше методике, показали, что при заполнении каналов жидкостью, имеющей в начальный момент времени горизонтальную свободную поверхность, возможны различные режимы процесса. На рис. 2 показаны эти режимы для псевдопластичной жидкости (формы свободной поверхности представлены с одинаковым интервалом по времени  $\Delta t$ , при этом конечные моменты времени для каждого рисунка разные).

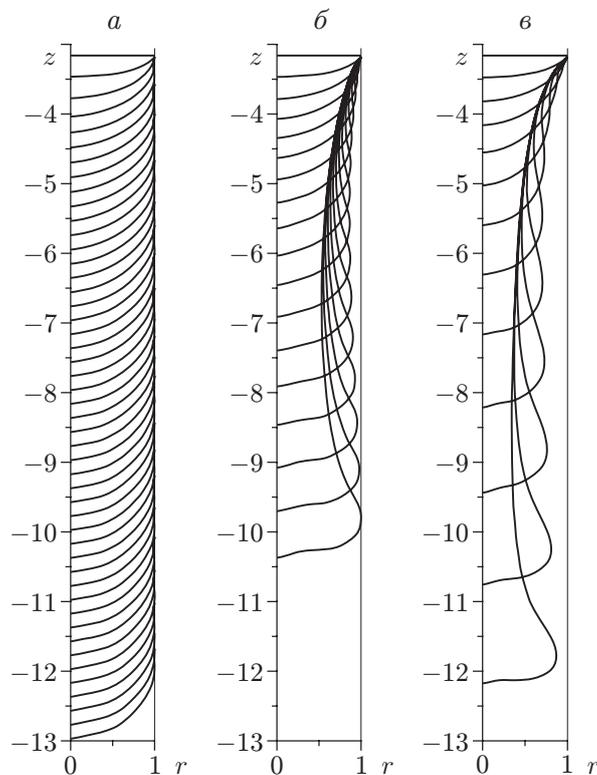


Рис. 2. Режимы заполнения канала ( $Re = 1$ ,  $k = 0,9$ ,  $Se = 0$ ,  $\Delta t = 0,2$ ):  
 а — режим полного заполнения ( $W = 0,5$ ); б — переходный режим ( $W = 4$ ); в — струйный режим ( $W = 10$ )

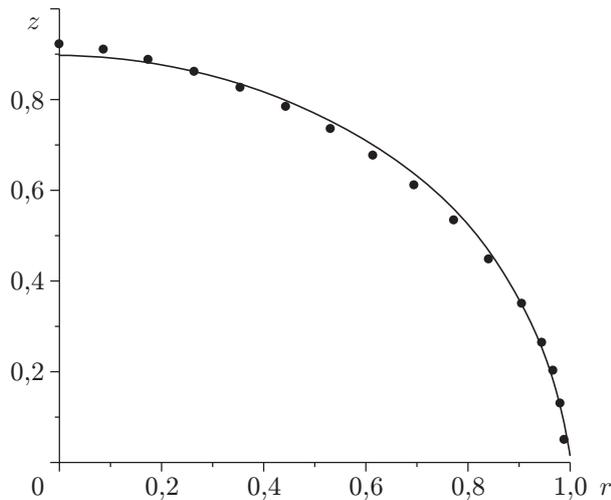


Рис. 3

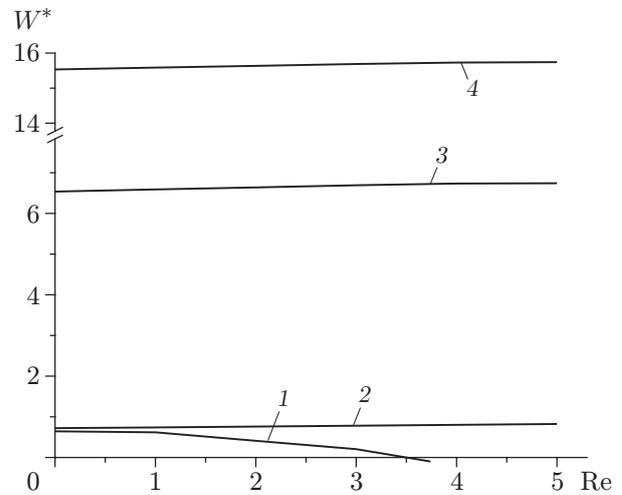


Рис. 4

Рис. 3. Форма установившейся свободной поверхности:  
 точки — результаты настоящей работы ( $Re = 0,01$ ,  $W = 0$ ,  $Se = 0$ ); сплошная линия — данные [16]

Рис. 4. Зависимость критического значения  $W^*$  от  $Re$ :  
 1 — граница между областями существования режима полного заполнения и переходного режима;  
 2–4 — границы между областями существования переходного и струйного режимов течения (2 —  $k = 1$ ; 3 —  $k = 0,9$ ; 4 —  $k = 0,8$ )

Смена режимов течения, показанных на рис. 2, происходит при соответствующих значениях  $W$ , т. е. определяется соотношением гравитационных и вязких сил в потоке жидкости при прочих равных условиях. При  $W = 0,5$  (см. рис. 2, а) жидкость непрерывно натекает на твердую стенку и полностью заполняет канал. В итоге свободная поверхность принимает выпуклую установившуюся форму и перемещается вниз по каналу со средне-расходной скоростью. Область течения можно разделить на две подобласти одномерного и двумерного течений. В части области течения длиной порядка трех безразмерных единиц, примыкающей к свободной границе, реализуется двумерное течение, а в остальной части области — одномерное установившееся течение. Такой режим течения будем называть режимом полного заполнения.

На рис. 3 показана форма установившейся свободной поверхности ньютоновской жидкости, рассчитанная в настоящей работе, а также приведены результаты работы [16], где решение получено методом конечных элементов с использованием уравнения движения, в котором отсутствуют слагаемые, учитывающие действие инерционных сил, при малых числах Рейнольдса. Видно, что эти результаты удовлетворительно согласуются.

С увеличением  $W$  начиная с некоторого момента времени режим полного заполнения сменяется переходным режимом движения свободной поверхности (см. рис. 2, б). Свободная поверхность принимает каплевидную форму и через некоторый промежуток времени касается твердой стенки. В результате на стенке канала образуется не заполненная жидкостью полость, размеры которой увеличиваются с увеличением  $W$ .

Дальнейшее увеличение  $W$  приводит к формированию свободной струи (см. рис. 2, в). В этом случае максимальный поперечный размер струи со временем уменьшается и ее касания твердой стенки не происходит. Одновременно уменьшается минимальный поперечный размер струи.

На рис. 4 представлены зависимости критических значений  $W^*$ , разделяющих области существования различных режимов заполнения, от числа Рейнольдса  $Re$  для псевдопластичной жидкости при различных значениях показателя  $k$ .

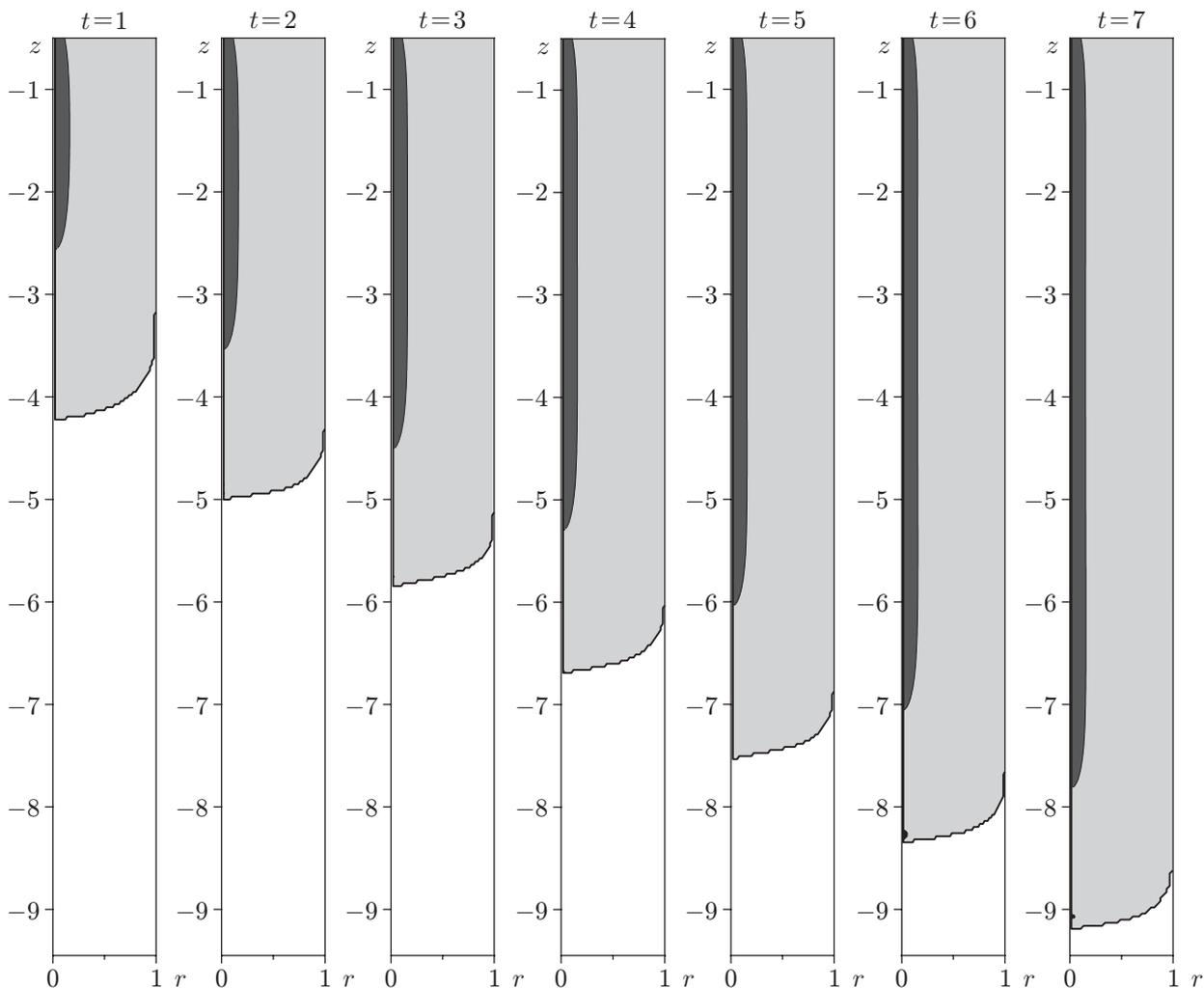


Рис. 5. Эволюция квазитвердых ядер при  $Re = 0,1$ ,  $W = 0,5$ ,  $Se = 1$ :  
 черные области — области, занятые квазитвердыми ядрами; серые области — области,  
 занятые жидкостью

Рассмотрим процесс заполнения вертикальной трубы жидкостью, свойства которой описываются реологическим законом Шведова — Бингама ( $k = 1$ ). Наличие предела текучести может привести к образованию в области течения квазитвердых ядер.

Эволюция квазитвердых ядер в режиме полного заполнения и струйном режиме представлена на рис. 5, 6. В режиме полного заполнения канала (см. рис. 5) динамика квазитвердых ядер практически такая же, как и в случае, когда сила тяжести и поток направлены противоположно. Ядро образуется вблизи оси симметрии в окрестности входной границы, где реализуется установившийся режим течения. Радиальный размер ядра соответствует его размеру в случае установившегося режима течения в бесконечной круглой трубе. С течением времени по мере продвижения свободной поверхности длина квазитвердой области увеличивается.

Эволюция квазитвердых ядер при заполнении трубы в струйном режиме представлена на рис. 6. На начальном этапе ( $t < 0,5$ ) ядро образуется вблизи оси симметрии, причем по форме и размерам оно практически совпадает с ядром в режиме полного заполнения. С течением времени ( $0,5 < t < 1,0$ ) поверхность выгибается, а длина квазитвердой зоны

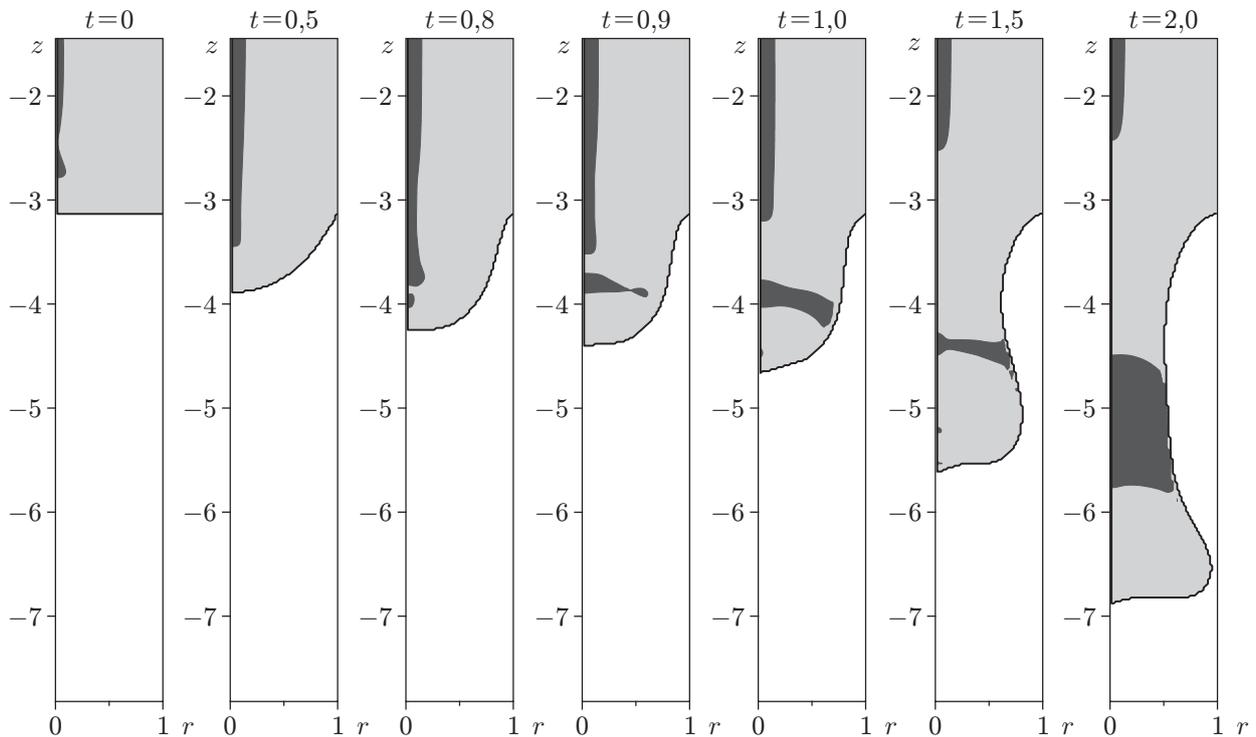


Рис. 6. Эволюция квазитвердых ядер при  $Re = 0,1, W = 16, Se = 1$  (обозначения те же, что на рис. 5)

в окрестности оси симметрии уменьшается. По мере того как передний фронт свободной границы принимает каплевидную форму ( $0,8 < t < 2,0$ ), в области сужения струи образуется и увеличивается в размерах новое ядро, при этом контур ядра, находящегося в окрестности оси симметрии вблизи входа, принимает стационарную форму. Ширина этого ядра равна ширине квазитвердой зоны в установившемся режиме течения пластичной жидкости в бесконечном канале.

Следует отметить, что представленная методика использовалась для расчета рассмотренных течений в плоской постановке [17, 18]. В работах [17, 18] проводились тестирование методики расчета и сравнение результатов с данными, полученными методом граничных элементов. Установлено, что эти результаты хорошо согласуются. При использовании квадратной расчетной сетки с 32 узлами в радиальном направлении во всех расчетах, результаты которых представлены в данной работе, погрешность выполнения закона сохранения массы не превышала 3 %.

**Заключение.** Сформулирована математическая постановка задачи о заполнении круглой трубы неньютоновской жидкостью в поле силы тяжести, предложена численная методика ее решения. Выявлены три режима заполнения трубы: режим полного заполнения, переходный режим с образованием воздушных полостей на твердых стенках и струйный режим. Получены критические значения параметров, разделяющие области существования этих режимов. Для вязкопластичной жидкости показана динамика квазитвердых ядер в процессе заполнения трубы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Rudert A., Schwarze R. Experimental and numerical investigation of a viscoplastic Carbopol gel injected into a prototype 3D mold cavity // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2009. V. 161, N 1–3. P. 60–68.

2. **Kim J. M., Ahn K. H., Lee S. J., Lee S. J.** Numerical simulation of moving free surface problems in polymer processing using volume of fluid method // *Polymer Engng Sci.* 2001. V. 41, N 5. P. 858–866.
3. **Чехонин К. А., Сухинин П. А.** Движение нелинейно-вязкопластичной жидкости со свободной поверхностью при заполнении осесимметричного объема // *Мат. моделирование.* 2001. Т. 13, № 3. С. 89–102.
4. **Булгаков В. К., Липанов А. М., Чехонин К. А., Иванов О. Н.** Моделирование течений неньютоновских жидкостей, имеющих предел текучести // *Механика композит. материалов.* 1988. № 6. С. 1112–1116.
5. **Kim M. S., Park J. S., Lee W. I.** A new VOF-based numerical scheme for the simulation of fluid flow with free surface. 2. Application to the cavity filling and sloshing problems // *Intern. J. Numer. Methods Fluids.* 2003. V. 42. P. 791–812.
6. **Tavakoli R., Babaei R., Varahram N., Davami P.** Numerical simulation of liquid/gas phase flow during mold filling // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 2006. V. 196. P. 697–713.
7. **Shin S., Lee W. I.** Finite element analysis of incompressible viscous flow with moving free surface by selective volume of fluid method // *Intern. J. Heat Fluid Flow.* 2000. V. 21. P. 197–206.
8. **Kim K. D., Yang D. Y., Jeong J. H.** Adaptive refinement techniques based on tetrahedral and hexahedral grids for finite element analysis of mold filling // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 2006. V. 195. P. 6799–6821.
9. **Babaei R., Abdollahi J., Homayonifar P., et al.** Improved advection algorithm of computational modeling of free surface flow using structured grids // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 2006. V. 195. P. 775–795.
10. **Mirbagheri S. M. H., Esmaeileian H., Serajzadeh S., et al.** Simulation of melt flow in coated mould cavity in the casting process // *J. Materials Proc. Technol.* 2003. V. 142. P. 493–507.
11. **Mirbagheri S. M. H., Dadashzadeh M., Serajzadeh S., et al.** Modeling the effect of mould wall roughness on the melt flow simulation in casting process // *Appl. Math. Modelling.* 2004. V. 28. P. 933–956.
12. **Патанкар С.** Численные методы решения задач теплообмена и механики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984.
13. **Шрагер Г. Р.** Моделирование гидромеханических процессов в технологии переработки полимерных материалов / Г. Р. Шрагер, А. Н. Козлобродов, В. А. Якутенюк. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1999.
14. **Смольский Б. М.** Реодинамика и теплообмен нелинейно-вязкопластичных материалов / Б. М. Смольский, З. П. Шульман, В. М. Гориславец. Минск: Наука и техника, 1970.
15. **Любимова Т. П.** Численное исследование конвекции неньютоновской жидкости в ограниченном объеме: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Пермь, 1980.
16. **Mitsoulis E.** Fountain flow of pseudoplastic and viscoplastic fluids // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2010. V. 165. P. 45–55.
17. **Борзенко Е. И., Шрагер Г. Р., Якутенюк В. А.** Заполнение каналов неньютоновской жидкостью в поле силы тяжести // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2009. № 6. С. 40–46.
18. **Borzenko Ye. I., Shragher G. R., Yakutenok V. A.** Simulation of the process of the filling of planar channels with viscoplastic fluid // *Theoret. Found. Chem. Engng.* 2011. V. 45, N 2. P. 173–179.