РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗРАБОТКИ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

2013 № 1

УДК 622.83+539.4

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ГИДРОРАЗРЫВЕ ДЛЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

А. М. Линьков

Институт проблем машиноведения РАН, E-mail: voknilal@hotmail.com,
Большой проспект, В. О., 61, 199178, Санкт-Петербург, Россия
(в сотрудничестве с Жешувским техническим университетом,
ul. PowstancowWarszawy, 14, 35-959, Rzeszow, Poland)

Дано аналитическое решение задачи о трещине гидроразрыва, продвигаемой неньютоновской жидкостью в условиях плоской деформации в сечениях, параллельных фронту трещины. Получены выводы о влиянии свойств жидкости на распространение трещины.

Гидравлический разрыв, неньютоновская жидкость, скорость частиц, аналитическое решение

1. ВВЕДЕНИЕ

Гидравлический разрыв широко используется для повышения продуктивности нефтяных и газовых скважин. Ввиду практического значения, этот метод был предметом многочисленных исследований, начиная с работ Христиановича и Желтова [1, 2]. В модели этих авторов, рассматривавшейся также Гиртсма и Де Клерком [3] и называемой ХГД-моделью, принимается, что плоское деформированное состояние имеется в сечениях, перпендикулярных к фронту трещины (см. также [4]). Это отвечает начальному этапу продвижения трещины, когда влияние прочности породы может быть существенным. В отличие от этой схемы, модель Перкинса – Керна [5], усовершенствованная Нордгреном [6] и называемая ПКН – моделью, предполагает, что плоское деформированное состояние имеется в сечениях, параллельных фронту. Она описывает дальнейшее распространение трещины, когда основное сопротивление ее движению создается вязкостью разрывающей жидкости. Ниже рассматривается эта стадия продвижения трещины. Большинство теоретических работ посвящено изучению асимптотического поведения решения и выделению параметров, определяющих различные режимы распространения гидроразрыва (см., например, обзоры в статьях [4, 6 – 11]). Лишь в немногих публикациях содержатся полные решения модельных задач для трещины конечной длины [6, 9, 12 – 15]. Решения были получены сложными вычислениями с использованием в качестве неизвестных давления и раскрытия трещины. Недавно [16, 17] установлено, что задача о гидроразрыве при фиксированном положении фронта и отсутствии отставания жидкости от контура трещины некорректна и требует регуляризации. Обнаружение и преодоление этого затруднения привело к мо-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-05-00140).

дифицированной формулировке проблемы [18–20], которая имеет существенные вычислительные и аналитические преимущества. В частности, для задач Нордгрена [6], Спенса и Шарпа [12] удалось получить аналитические решения в случае ньютоновской жидкости [18]. Появляется возможность и для распространения результатов на неньютоновские жидкости. В данной статье используется эта возможность. Для определенности и имея в виду широкие практические приложения (см., например [21, 22]), рассматривается ПКН–модель. Цель работы состоит в получении и анализе решений, которые отчетливо выявляют особенности распространения гидроразрыва при использовании разрывающих жидкостей с разными показателями поведения и консистенции.

2. ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ В ТЕРМИНАХ СКОРОСТИ ЧАСТИЦ ЖИДКОСТИ

Пусть для гидроразрыва используется вязкая жидкость с реологическим законом степенного вида, связывающим касательное напряжение σ_τ со скоростью деформации сдвига $\dot\gamma$:

$$\sigma_\tau = M\dot\gamma^n . \tag{1}$$

Здесь M — показатель консистенции; n — показатель степени, называемый показателем поведения жидкости. Обычно для гидроразрыва используют так называемые “утончающиеся” (shear-thinning) жидкости, для которых $0 < n < 1$. Случаю $n = 1$ отвечает ньютоновская жидкость с динамической вязкостью $M = \mu$; случаю $n = 0$ — идеально пластическая жидкость с предельным касательным напряжением $M = \sigma_{\tau 0}$.

При течении в узком канале шириной w, жидкость можно считать несжимаемой и обычные выкладки с использованием (1) дают зависимость между скоростью частиц жидкости v, осредненной по сечению, и градиентом давления

$$v = \left(-k_f w^{n+1}\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{1/n}, \tag{2}$$

где коэффициент $k_f = 1/(\theta M)$ обратно пропорционален показателю консистенции. В случае эллиптического канала с осями w и h, для θ получается зависимость типа Ламба (см., например [11]): $\theta = 2\left[\frac{\pi(1+\pi n - n)}{2n}\right]^n$; для узкого плоского канала имеем значение Пуазейля (см., например [13]): $\theta = 2\left[\frac{2(2n+1)}{n}\right]^n$. Отношение этих коэффициентов близко к 1; оно составляет $12/\pi^2 \approx 1.216$ для ньютоновской жидкости и равно 1 для идеально пластической жидкости. Ниже для определенности используем значение Пуазейля. Для него $\theta = 12$ в случае ньютоновской жидкости и $\theta = 2$, когда жидкость идеально пластическая.

По определению, поток через раскрытие канала равен

$$q = wv . \tag{3}$$

Трещина гидроразрыва с высотой h распространяется в направлении оси x (рис. 1) в упругих породах с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν. Согласно модели ПКН, длина трещины $x_*(t)$ считается достаточной, чтобы иметь условия плоской деформации в поперечных сечениях, параллельных фронту трещины. Тогда зависимость дифференциального давления p от раскрытия w, осредненного по высоте трещины, имеет вид (см., например [6]):

$$p = k_r w , \tag{4}$$

где $k_r = (2/\pi h)E/(1-\nu^2)$. Подстановка (4) в (2) дает для модели ПКН

$$v = \left(-\frac{k_f k_r}{n+2}\frac{\partial w^{n+2}}{\partial x}\right)^{1/n}. \tag{5}$$

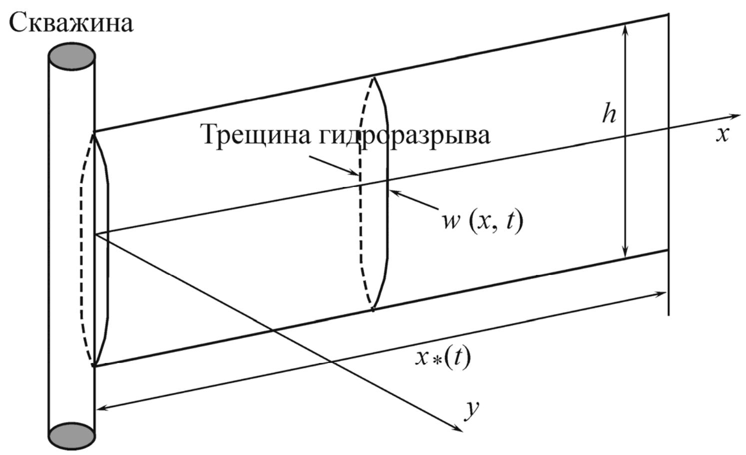

Рис 1. Схема модели ПКН

В точках фронта трещины скорость частиц равна скорости распространения фронта v_*. Таким образом, имеем уравнение скорости [16]

$$v_* = \frac{dx_*}{dt} = v(x_*). \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что для того, чтобы скорость распространения была не нулевой и конечной, функция $y = w^{n+2}$ должна быть линейной около фронта. Отсюда следует, что подходящими переменными могут служить функция y, которую будем называть модифицированным раскрытием, и скорость частиц v, взамен традиционно используемых раскрытия w и дифференциального давления p [16, 18]. Обозначив $\alpha = 1/(n+2)$, имеем $w = y^{\alpha}$.

Уравнение смазки в терминах переменных y и v принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\alpha}{y}\frac{\partial y}{\partial x}v + \frac{\alpha}{y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{y^{\alpha}}q_e = 0. \tag{7}$$

Здесь член q_e учитывает утечку жидкости в породы ($q_e \ge 0$); в дальнейшем считается, что величина q_e может быть сингулярной вблизи фронта, но произведение $y^{1-\alpha}q_e$ все же стремится к нулю при $x \to x_*$.

Зависимость между v и y следует из (5):

$$v = \left(-k_f k_r \alpha \frac{\partial y}{\partial x}\right)^{1/n}. \tag{8}$$

Начальное условие для уравнения (7) выражает отсутствие раскрытия вдоль предполагаемого пути гидроразрыва ($w(x,0) = 0$). В терминах модифицированного раскрытия имеем

$$y(x,0) = 0. \tag{9}$$

Уравнение (7) имеет второй порядок по пространственной переменной x. Поэтому для него ставятся два граничных условия (ГУ). Одно из них — условие заданного притока $q_0(t)$ (на единицу высоты) в устье скважины $x = 0$. Ввиду (3), оно будет

$$y^{\alpha}v\big|_{x=0} = q_0(t)\,. \tag{10}$$

Второе условие выражает отсутствие раскрытия на фронте трещины $x = x_*$:

$$y(x_*, t) = 0\,. \tag{11}$$

Уравнение скорости (6), с учетом (8), принимает вид

$$v(x_*, t) = v_*(t) = \left(-k_f k_r \alpha \frac{\partial y}{\partial x}\right)^{1/n}\Big|_{x=x_*}\,. \tag{12}$$

Задача состоит в решении (7), где зависимость между v и y задана (8), при начальном условии (9) и ГУ (10), (11). Кроме того, как установлено в [17], при ГУ (11) переход в уравнении (7) к пределу, когда $x \to x_*$, приводит к выводу, что уравнение скорости (12) удовлетворяется тождественно. Следовательно, при фиксированном положении фронта фактически имеем на нем два ГУ (11) и (12), а не одно (11). Это делает граничную задачу некорректной при любом фиксированном значении x_* [16, 17]. Чтобы избежать осложнений при решении задачи ПКН, имеются разные возможности. Одна из них состоит в применении $\varepsilon-$регуляризации [16, 17], другая основана на включении длины трещины x_* в качестве дополнительной динамической переменной в динамическую систему ОДУ, получаемых после пространственной дискретизации [19]. Ниже используем третью возможность, которая служила в работах [16 – 19] при получении эталонных решений для ньютоновской жидкости. Она состоит в решении задачи Коши с начальными условиями (11), (12) при фиксированном положении фронта x_* и в нахождении той скорости фронта v_*, при которой удовлетворяется граничное условие (10) в устье трещины.

3. НОРМИРОВАННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ. АВТОМОДЕЛЬНАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Используем типичные значения потока q_n и времени t_n для нормировки физических величин. Нормированные значения длины x_n, раскрытия w_n, модифицированного раскрытия y_n, давления p_n, скорости v_n и утечки q_{ln} задаются формулами:

$$x_n = (k_r k_f q_n^{\,n+2} t_n^{\,2n+2})^{\frac{1}{2n+3}}, \quad w_n = q_n t_n / x_n\,, \quad y_n = w_n^{\,1/\alpha}\,,$$
$$p_n = k_r w_n\,, \quad v_n = x_n / t_n\,, \quad q_{ln} = q_n / x_n\,. \tag{13}$$

Безразмерные величины определяются отношениями:

$$x_d = x / x_n\,, \quad x_{*d} = x_* / x_n\,, \quad t_d = t / t_n\,, \quad v_d = v / v_n\,, \quad v_{*d} = v_* / v_n\,, \quad w_d = w / w_n\,, \quad y_d = y / y_n\,,$$
$$p_d = p / p_n\,, \quad q_d = q / q_n\,, \quad q_{0d} = q_0 / q_n\,, \quad q_{ld} = q_l / q_{ln}\,. \tag{14}$$

Все уравнения предыдущего раздела сохраняют свой вид при замене коэффициентов k_r и k_f в (8) и (12) на единицу. Это исключает показатель консистенции из уравнений в безразмерных переменных. В дальнейшем, когда это не может привести к недоразумению, будем считать, что $k_r = 1$, $k_f = 1$, и опускать индекс d в обозначениях безразмерных величин.

Рассмотрим случай, когда безразмерный приток в устье трещины задан показательной функцией от безразмерного времени

$$q_0(t) = t^{\beta_q}, \tag{15}$$

где β_q — безразмерная постоянная. Заметим, что в случае постоянного притока $\beta_q = 0$.

При зависимости (15) и нулевой утечке решение задачи (7)–(12) можно найти в автомодельных переменных, определяемых формулами:

$$\begin{gathered} x = \xi t^{\beta_*}, \quad x_* = \xi_* t^{\beta_*}, \quad v = V(\xi) t^{\beta_* - 1}, \quad v_* = V_* t^{\beta_* - 1}, \\ w = W(\xi) t^{\beta_w}, \quad y = Y(\xi) t^{\beta_w / \alpha}, \quad p = P(\xi) t^{\beta_p}, \quad q = Y(\xi)^\alpha V(\xi) t^{\beta_q}. \end{gathered} \tag{16}$$

где ξ_* и $V_* = \xi_* \beta_*$ — постоянные, выражающие соответственно автомодельную длину трещины и автомодельную скорость ее распространения. Поскольку $\xi / \xi_* = x / x_*$, автомодельная координата $\xi = \xi_* x / x_*$ пропорциональна расстоянию от устья, нормированному на длину трещины x_*. Таким образом, фактически формулы (16) представляют решение в виде с разделенными переменными $\varsigma = \xi / \xi_* = x / x_*$ и t. Чтобы качественно оценить роль утечки, примем, что член, учитывающий ее вклад, также представлен в виде с разделенными переменными $q_l = Q_l(\xi) t^{\beta_l}$. Функция $Q_l(\xi)$ может иметь особенность на фронте трещины ξ_*, но особенность не должна быть слишком сильной: $Q_l(\xi) = o((\xi_* - \xi)^{\alpha - 1})$. Подстановка (16) в (7), (10) и (12) показывает, что множители, содержащие время, сокращаются, когда

$$\beta_w = \beta_p = \frac{1 + (n+1)\beta_q}{2n+3}, \ \beta_* = \frac{2(n+1) + (n+2)\beta_q}{2n+3}, \ \beta_l = \beta_w - 1. \tag{17}$$

При таком выборе уравнение в частных производных (7) становится обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) в автомодельных переменных:

$$\frac{dV}{d\xi} + \alpha \frac{V(\xi) - V_* \xi / \xi_*}{Y(\xi)} \frac{dY}{d\xi} + \beta_w + \frac{1}{Y(\xi)^\alpha} Q_e(\xi) = 0. \tag{18}$$

Зависимость (8), ГУ (10), (11) и уравнение скорости (12) становятся соответственно:

$$V(\xi) = \left(-\alpha \frac{dY}{d\xi} \right)^{1/n}, \tag{19}$$

$$Y^\alpha V(0) = A, \tag{20}$$

$$Y(\xi_*) = 0, \tag{21}$$

$$V_* = \xi_* \beta_* = \left(-\alpha \frac{dY}{d\xi} \right)^{1/n} \Big|_{\xi = \xi_*}. \tag{22}$$

Фактически в (20) $A = 1$, но мы использовали символ A для дальнейшего обсуждения свойств решения. Начальное условие (9) для уравнения (7) удовлетворяется автоматически выражением (16) для автомодельного раскрытия w, если $\beta_w > 0$. Из первой формулы в (17) следует, что $\beta_w > 0$ при $\beta_q > -1/(n+1)$. Таким образом, показатель β_q может быть отрицательным, что отвечает случаю, когда поток убывает от первоначально бесконечного значения.

Для любого фиксированного ξ_* задача решения ОДУ (18), где зависимость между V и Y задана формулой (19), при ГУ (20), (21) некорректна. Действительно, в пределе $\xi \to \xi_*$, решение (18), удовлетворяющее ГУ (21), тождественно удовлетворяет также и уравнению скорости (22). Следовательно, в точке $\xi = \xi_*$ мы фактически имеем *два*, а не одно условие. Поэтому для любого фиксированного ξ_* эти два *начальных* условия (21) и (22) в точке $\xi = \xi_*$ полностью определяют решение ОДУ (18). Тогда они определяют и производную $dY / d\xi$, а следовательно, и постоянную A в условии (20). В итоге, в соответствии с результатами [16, 17], невозможно решить задачу (18)–(21) с *граничными условиями* без регуляризации. Поэтому при фиксированном ξ_* имеет смысл решать задачу (18), (19), (21), (22) с *начальными условиями* (Коши). Подставив ее решение в ГУ (20), находим соответствующий приток A. Изменяя ξ_*, можно найти то значение ξ_*, для которого условие (20) удовлетворено с заданной точностью для $A = 1$.

Фактически в случае отсутствия утечки нет нужды в решении задачи для разных значений ξ_*. Можно проверить прямой подстановкой, что если $Y_1(\xi)$ — решение при $\xi_* = \xi_{*1}$ так, что соответствующий приток равен A_1, то решение для произвольного притока A, дается формулами

$$\xi_* = \xi_{*1}\left(\frac{A}{A_1}\right)^{(n+2)/(2n+3)}, \quad Y(\xi) = \left(\frac{\xi_*}{\xi_{*1}}\right)^{n+1} Y\left(\xi \frac{\xi_{*1}}{\xi_*}\right).$$

Следовательно, достаточно найти решение при $\xi_{*1} = 1$. Аналогичный вывод получен в статьях [16, 17] для частного случая ньютоновской жидкости (n = 1).

4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Общий случай. Из ГУ (21) и уравнения скорости (22) следует, что функция $Y(\xi)$ по меньшей мере линейна около фронта ξ_*. Примем, что член $Q_l(\xi)$, характеризующий утечку, около фронта имеет порядок $O((\xi_* - \xi)^\alpha)$. Тогда функции $Y(\xi)$, $V(\xi)$ и $Q_l(\xi)$ можно представить степенными рядами в переменной $\tau = 1 - \xi / \xi_*$:

$$Y(\xi) = \frac{\xi_*^{n+1}\beta_*^n}{\alpha}\sum_{j=1}^{\infty} a_j \tau^j, \quad V(\xi) = V_* \sum_{j=0}^{\infty} b_j \tau^j, \quad Q_l(\xi) = \tau^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} q_j \tau^j, \tag{23}$$

где коэффициенты утечки q_j известны. ГУ (21) и уравнение скорости (22) дают $a_1 = b_0 = 1$. При этом разложения (23) отвечают решению корректной задачи (18), (19), (21), (22) с *начальными условиями*.

Из зависимости (19) следует уравнение $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}\tau^k = \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \tau^j\right)^n$, которое позволяет рекуррентно выразить коэффициенты a_{k+1} (k = 1,…) через b_j (j = 1,…, k). Для первых пяти коэффициентов имеем:

$$a_1 = b_0 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}nb_1, \quad a_3 = \frac{1}{6}n[(n-1)b_1^2 + 2b_2], \quad a_4 = \frac{1}{24}n[(n-1)(n-2)b_1^3 + 6(n-1)b_1b_2 + 6b_3],$$
$$a_5 = \frac{1}{120}n[(n-1)(n-2)(n-3)b_1^4 + 12(n-1)(n-2)b_1^2b_2 + 24(n-1)b_1b_3 + 24b_4]. \tag{24}$$

С ростом k коэффициенты убывают быстрее, чем $1/k^2$. Подстановка рядов (23) в ОДУ (18) дает вторую группу рекуррентных соотношений для $j \ge 2$:

$$b_j = -\frac{1}{j+\alpha}\left\{\sum_{k=2}^{j}(j-k+1+\alpha k)a_k b_{j-k+1} + (\alpha j - \frac{\beta_w}{\beta_*})a_j - C_l \sum_{k=1}^{j} c_k q_{j-k}\right\} \qquad (25)$$

со стартовыми значениями $a_1 = b_0 = 1$, $b_1 = \frac{1}{1+\alpha}\left(-\alpha + \frac{\beta_w}{\beta_*} + C_l q_0\right)$. Здесь $C_l = \left(\frac{\alpha}{\xi_*^{n+1}\beta_*^{n+1/\alpha}}\right)^{\alpha}$, а коэффициенты c_k рекуррентно вычисляются через a_i (i = 1,…,k) из формулы $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \tau^k = \tau\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1}\tau^i\right)^{\alpha}$. Для первых пяти коэффициентов это дает уравнения, подобные (24):

$$c_1 = a_1 = 1, \quad c_2 = (1-\alpha)a_2, \quad c_3 = \frac{1}{2}(1-\alpha)[-\alpha a_2^2 + 2a_3],$$
$$c_4 = \frac{1}{6}(1-\alpha)[\alpha(\alpha+1)a_2^3 - 6\alpha a_2 a_3 + 6a_4], \qquad (26)$$
$$c_5 = \frac{1}{24}(1-\alpha)[-\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)a_2^4 + 12\alpha(\alpha+1)a_2^2 a_3 - 24\alpha a_2 a_4 + 24a_5].$$

Стартуя с $a_1 = b_0 = c_1 = 1$, $b_1 = \left(-\alpha + \beta_w/\beta_* + C_l q_0\right)/(1+\alpha)$, находим a_2 из второго уравнения (24), а c_2 из второго уравнения (26). Тогда (25) дает b_2, третье в (24) определяет a_3, третье в (26) дает c_3 и т. д. В случае ньютоновской жидкости (n = 1, $\alpha = 1/3$) имеем $a_j = b_{j-1}/j$ (j = 1,…) и при отсутствии утечки ($q_{k-1} = c_k = 0$, k = 1,…) рекуррентные соотношения (25) сводятся к уравнениям, полученным в [18].

Для идеально пластической жидкости (n = 0, $\alpha = 1/2$), все коэффициенты a_k, c_k равны нулю при $k > 1$. Тогда при постоянном притоке ($\beta_q = 0$) решение приобретает вид

$$\xi_* = (9/8)^{1/3}, \quad Y(\xi) = 2(\xi_* - \xi), \quad V(\xi) = V_*\left[1 + \frac{1}{\beta_*\sqrt{2\xi_*}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2}{2j+1}q_{j-1}\left(1-\frac{\xi}{\xi_*}\right)^j\right], \quad V_* = \frac{2}{3}\xi_*. \qquad (27)$$

Из (27) следует, что функция $Y(\xi)$ линейна относительно расстояния от устья трещины; при отсутствии утечки, автомодельная скорость частиц постоянна вдоль всей трещины, будучи равной автомодельной скорости распространения.

Идеально пластическая жидкость. Выше получено решение (27) для идеально пластической жидкости в рядах в предположении, что утечка не имеет особенности в кончике трещины. Между тем для идеально пластической жидкости можно найти более общее решение в квадратурах. Ввиду важности этого частного случая, приведем такое решение.

При n = 0 выражение (19) сразу дает второе из уравнений (27). Подстановка его в автомодельное уравнение смазки (18) превращает последнее в линейное ОДУ первого порядка относительно автомодельной скорости $V(\xi)$. Его решение, удовлетворяющее уравнению скорости (22), имеет вид

$$V(\xi) = V_*\left[1 + \frac{1}{\beta_*\sqrt{2\xi_*\tau}}\int_0^{\tau} Q_l(\xi(\tau))d\tau\right], \qquad (28)$$

где, как и выше, $\tau = 1 - \xi/\xi_*$. Заметим, что суммирование ряда в третьей из формул (27) дает тот же результат, но теперь утечка может быть сингулярной на фронте, возрастая как $o(\tau^{-\delta})$ при

$0 < \delta < 0.5$. Автомодельная длина трещины ξ_* и, соответственно, автомодельная скорость продвижения $V_* = \xi_* \beta_*$ находятся из ГУ (20) при $A = 1$. Это дает кубическое уравнение относительно $\sqrt{\xi_*}$: $a(\sqrt{\xi_*})^3 + b(\sqrt{\xi_*})^2 = 1$, где $a = \beta_* / \sqrt{\alpha}$; $b = \int_0^1 Q_l(\xi(\tau))d\tau$. Его решение легко найти, введя новую переменную $z_1 = a^{1/3}\sqrt{\xi_*}$ или $z_2 = b^{1/2}\sqrt{\xi_*}$. Тогда приходим к уравнению $z_1^3 + b_1 z_1^2 = 1$ линейному относительно $b_1 = ba^{-2/3}$, если использовать z_1, или к уравнению $a_2 z_2^3 + z_2^2 = 1$ линейному относительно $a_2 = ab^{-3/2}$, если использовать z_2. Первый выбор удобен при малых или умеренных значениях утечки (b_1 меньше или порядка единицы). Второй выбор полезен при умеренных и больших значениях утечки (a_2 меньше или порядка единицы). Замечая, что равенство $b_1 = 1$ влечет равенство $a_2 = 1$, видно, что области применимости этих решений перекрываются. Следовательно, любое из них может служить для нахождения ξ_* при умеренных величинах b_1 и a_2.

Значение $b_1 = 0$ отвечает отсутствию утечки; тогда $\xi_* = a^{-2/3} = \sqrt[3]{\alpha / \beta_*^2}$. Для идеально пластической жидкости $\alpha = 1/2$, $\beta_* = 2/3$, и при малой утечке имеем $\xi_* = \sqrt[3]{9/8} = 1.0400$. Это значение пригодно при $\int_0^1 Q_l(\xi(\tau))d\tau < 0.33$ с относительной ошибкой, не превышающей 10 %.

Величина $a_2 = 0$ отвечает большой утечке, тогда $\xi_* = b^{-1} = \left(\int_0^1 Q_l(\xi(\tau))d\tau\right)^{-1}$. С относительной ошибкой, не превышающей 10 %, это уравнение пригодно, когда $\int_0^1 Q_l(\xi(\tau))d\tau \geq 4.1$; соответствующая автомодельная длина трещины ξ_* меньше 0.22.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сравним течение жидкости и распространение трещины при использовании жидкостей с разными показателями поведения n. Фактически достаточно рассмотреть идеально пластическую ($n = 0$) и ньютоновскую ($n = 1$) жидкости, поскольку результаты для “утончающихся” жидкостей ($0 < n < 1$) являются промежуточными между результатами для этих предельных случаев. Для определенности примем, что утечка отсутствует ($q_l = 0$) и приток постоянен ($\beta_w = 0$).

Наиболее поразительная особенность течения при отсутствии утечки состоит в том, что в любой момент времени скорость частиц v и градиент модифицированного раскрытия $y = w^{1/\alpha}$ практически постоянны вдоль трещины. Представляющие отношения $v(x,t)/v_*(t)$ и $y(x,t)/y(0,t)$ рис. 2 и рис. 3 для предельных случаев идеально пластической и ньютоновской жидкостей, наглядно иллюстрируют это свойство. (Как упомянуто, результаты для “утончающихся” жидкостей являются промежуточными). Рис. 2 и рис. 3 также ясно свидетельствуют о преимуществе использования скорости частиц v и модифицированного раскрытия $y = w^{1/\alpha}$ вместо давления p и раскрытия w.

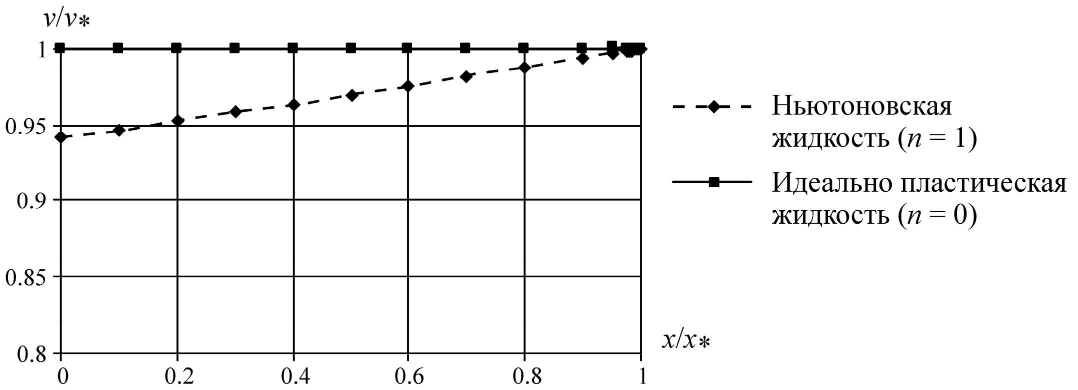

Рис 2. Распределение скорости по трещине

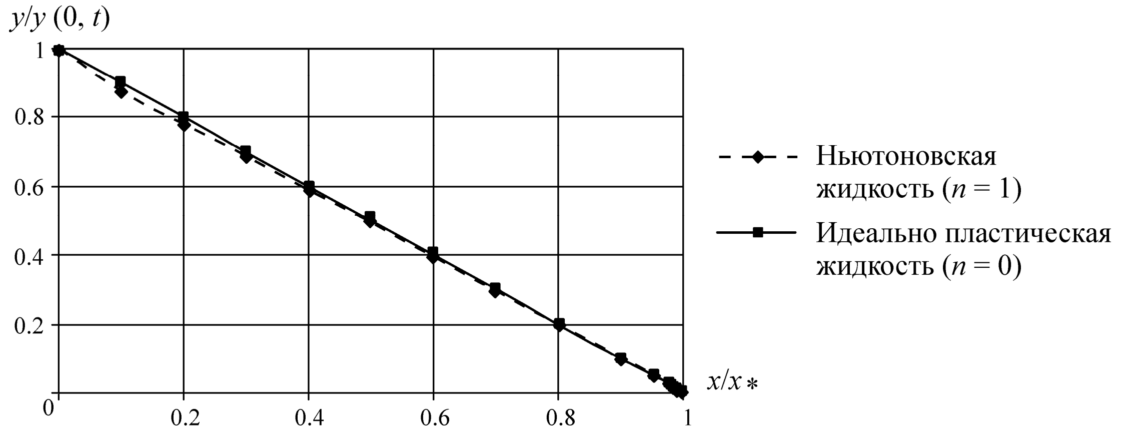

Рис 3. Модифицированное открытие трещины

Из рис. 3 и определения y следуют приближенные решения для раскрытия и давления

$$\frac{w(x,t)}{w(0,t)} = \frac{p(x,t)}{p(0,t)} = \left(1 - \frac{x}{x_*}\right)^{\alpha}. \tag{29}$$

Распределение потока q, определенного уравнением (3), аналогично (29), поскольку скорость практически постоянна вдоль трещины. Согласно определениям (16), $v_*(t) = V_* t^{\beta_* - 1}$, $w(0,t) = W_0 t^{\beta_w}$, $p(0,t) = P_0 t^{\beta_w}$, где постоянные определяются формулами $V_* = \xi_* \beta_*$, $W_0 = P_0 = \left(C_Y \sum_{j=1}^{\infty} a_j\right)^{\alpha}$. Эти постоянные не изменяются существенно для "утончающихся" жидкостей. А именно, в случае постоянного притока ($\beta_q = 0$) имеем:

— для идеально пластической жидкости ($n = 0$, $\alpha = 1/2$, $\beta_* = 2/3$, $\beta_w = 1/3$): $\xi_* = 1.04004$, $V_* = 0.69336$, $C_Y = 2.08008$, $W_0 = 1.44225$;

— для ньютоновской жидкости ($n = 1$, $\alpha = 1/3$, $\beta_* = 4/5$, $\beta_w = 1/5$): $\xi_* = 1.00101$, $V_* = 0.75398$, $C_Y = 2.40485$, $W_0 = 1.32628$.

Из этих результатов следует, что с погрешностью, не превышающей 4.5 %, можно использовать средние значения $\xi_* = 1.02$, $V_* = 0.72$, $W_0 = 1.38$ для любой "утончающейся" жидкости.

В итоге с такой погрешностью получаем простое аналитическое решение задачи в терминах безразмерных величин, нормированных согласно (13), (14), для произвольной “утончающейся” жидкости

$$x_{*d}(t_d) \approx 1.02 t_d^{\beta_*}, \quad v_d(x_d, t_d) \approx v_{*d}(t_d) \approx 1.02 \beta_* t_d^{\beta_* - 1},$$
$$w_d(x_d, t_d) = p(x_d, t_d) \approx 1.38(1 - x / x_*)^{\alpha} t_d^{\beta_w}. \tag{30}$$

Из (30) очевидно, что в терминах нормированных величин длина трещины, скорость частиц, скорость распространения, раскрытие и давление изменяются во времени подобным образом. Фактически различия касаются только показателей степени β_*, β_w и α у множителей, зависящих от времени. Эти различия не слишком велики, поскольку в предельных случаях идеально пластической и ньютоновской жидкостей разность показателей составляет 2/15 ≈ 0.133 в β_* и β_w и 1/6 ≈ 0.166 в α.

Для размерных (физических) величин из (30) и определений (13) и (14) следует:

$$x_*(t) = 1.02(k_f k_r q_0^{n+2})^{\beta_w} t^{\beta_*}, \quad v_*(t) = \beta_* x_*(t) t^{-1}, \quad w(x,t) \approx 1.38\left(1 - x / x_*\right)^{\alpha} (q_0^{\,n+1} t / k_f k_r)^{\beta_w},$$
$$p(x,t) = k_r w(x,t).$$

Эти зависимости учитывают влияние показателя консистенции, который входит в k_f, и модуля упругости вмещающих пород, который входит в k_r.

ВЫВОДЫ

1. Подтверждено, что использование модифицированной постановки задачи в надлежащих переменных обеспечивает существенные аналитические преимущества. Переменные включают скорость частиц жидкости v и модифицированное раскрытие трещины $y = w^{\alpha}$, представляющее раскрытие в степени, которая обеспечивает конечное ненулевое значение скорости в конце трещины. Для рассмотренной ПКН – модели аналитическое решение дается быстро сходящимися рядами при любом показателе поведения жидкости. В частном случае идеально пластической жидкости, решение выражается квадратурами.

2. Решение обнаруживает важную общую черту гидравлического разрыва для “утончающихся” жидкостей. При отсутствии утечки скорость частиц практически постоянна, а модифицированное смещение почти линейно вдоль трещины. Автомодельная длина трещины также практически не зависит от показателя поведения жидкости n ($\xi_* = 0.040$ для n = 0; $\xi_* = 1.001$ для n = 1). Это приводит к аналитическим зависимостям (30) для нормированных величин, которые одинаковы для любой “утончающейся” жидкости. Различия касаются преимущественно показателей степени β_* и β_w у времени, входящего множителем в выражения для нормированной длины и раскрытия трещины соответственно. Разница в показателях не слишком велика: сравнение предельных случаев идеально пластической и ньютоновской жидкостей показывает, что максимальное различие составляет 2/15 как для β_*, так и для β_w.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Желтов Ю. П., Христианович С. А.** О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР, ОТН. — 1955. — № 5.

2. **Khristianovich S. A., Zheltov V. P.** Formation of vertical fractures by means of highly viscous liquid, Proc. 4-th World Petroleum Congress, Rome, 1955.
3. **Geertsma J., F. de Klerk.** A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures, J. Pet. Tech., December. 1969.
4. **Алексеенко О. П., Вайсман А. М.** Некоторые особенности плоской задачи гидроразрыва упругой среды // ФТПРПИ. — 1999. — № 3.
5. **Perkins T. K., Kern L. F.** Widths of hydraulic fractures, J. Pet. Tech., Sept. 1961.
6. **Nordgren R. P.** Propagation of a vertical hydraulic fracture, Soc. Pet. Eng. J., August 1972.
7. **Adachi J., E. Siebrits E. et al.** Computer simulation of hydraulic fractures, Int. J. Rock Mech. Mining Sci., 2007, Vol. 44.
8. **Kovalyshen Y., Detournay E.** A re-examination of the classical PKN model of hydraulic fracture, Transport in Porous Media, 2009, Vol. 81.
9. **Hu J., Garagash D. I.** Plane strain propagation of a fluid-driven crack in a permeable rock with fracture toughness, ASCE J. Eng. Mech., 2010, Vol. 136.
10. **Garagash D. I., Detournay E. and Adachi J. I.** Multiscale tip asymptotics in hydraulic fracture with leak-off, J. Fluid Mech., 2011, Vol. 669.
11. **Mikhailov D. N., Economides M. J. and Nikolaevskiy V. N.** Fluid leakoff determines hydraulic fracture dimensions: approximate solution for non-Newtonian fracturing fluid, Int. J. Engineering Sci., 2011, Vol. 49.
12. **Spence D. A., Sharp P. W.** Self-similar solutions for elastohydrodynamic cavity flow, Proc. Roy Soc., London, Ser. A, 1985, Vol. 400.
13. **Adachi J., Detournay E.** Self-similar solution of plane-strain fracture driven by a power-law fluid, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 2002, Vol. 26.
14. **Garagash D. I.** Transient solution for a plane-strain fracture driven by a shear-thinning, power-law fluid, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech, 2006, Vol. 30.
15. **Adachi J. I., Detournay E.** Plane strain propagation of a hydraulic fracture in a permeable rock, Eng. Fracture Mech., 2008, Vol. 75.
16. **Линьков А. М.** Уравнение скорости и его применение для решения некорректных задач о гидроразрыве // ДАН. — 2011. — Т. 439. — № 4.
17. **Linkov A. M.** Use of speed equation for numerical simulation of hydraulic fractures // available at: http://arxiv.org/abs/1108.6146, Date: Wed, 31 Aug 2011 07:47:52 GMT (726kb), Cite as: arXiv: 1108.6146v1 [physics.flu-dyn].
18. **Linkov A. M.** On efficient simulation of hydraulic fracturing in terms of particle velocity, Int. J. Engineering Sci., 2012, Vol. 52.
19. **Mishuris G., Wrobel M. and Linkov A.** On modeling hydraulic fracture in proper variables: stiffness, accuracy, sensitivity, Int. J. Engineering Sci., 2012, Vol. 61.
20. **Linkov A. M.** Numerical modeling of hydraulic fractures: State of art and new results. Proc. XL Summer School-Conference, "Advanced Problems in Mechanics, APM 2012", Institute for Problems of Mechanical Engineering, RAS, 2012, CD-ROM.
21. **Kresse O., Cohen C., Weng X. et al.** Numerical modeling of hydraulic fracturing in naturally fractured formations, Proc. 5-th US Rock Mechanics Symposium, San Francisco, CA, June 26-29, 2011, American Rock Mechanics Association. Paper ARMA 11-363.
22. **Cipola C., Weng X., Mack M. et al.** Integrating microseismic mapping and complex fracture modeling to characterize fracture complexity, Soc. Pet. Eng., 2011, Paper SPE 140185.

Поступила в редакцию 17/IX 2012