

РАСЧЕТ ДВИЖЕНИЯ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

Ю. П. Зуйков, Б. Г. Кузнецов

(Новосибирск)

Рассмотрено одномерное движение смеси, состоящей из вязкой несжимаемой жидкости и взвешенных в ней частиц. Для математического описания принята модель, полученная в [1]. Рассчитаны два примера: осаждение частиц из суспензий и кипящий слой. Результаты расчетов представлены в виде графиков.

1. Значительная часть результатов по исследованию движения двухкомпонентных сред отражена в монографиях [2-4]. В [5] дан качественный анализ явлений в кипящем слое и приведены некоторые характерные зависимости давления и концентрации частиц внутри слоя.

Рассмотрим течение смеси, состоящей из вязкой несжимаемой жидкости и несжимаемых сферических частиц постоянного радиуса, в области $Q: \{0 \leq x \leq L\}$ на интервале времени $t \in [0, T]$. Вектор ускорения силы тяжести g совпадает по направлению с осью X . Согласно [1] система уравнений, описывающих нестационарное одномерное движение двухкомпонентной среды, имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_i v_i) = 0, \quad \rho_i = m_i \alpha_i, \quad m_i = \text{const}, \quad \alpha_0 + \alpha_1 = 1$$

$$\rho_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) = \rho_i g - \alpha_i \frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_i \frac{\partial v}{\partial x} \right) +$$

$$+ (-1)^i \left\{ k(v_1 - v_0) + \lambda_0 \left[\beta \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} + v \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho_i v_i) \right] \right\} \quad (i = 0, 1)$$

$$v = \frac{\rho_0 v_0 + \rho_1 v_1}{\rho_0 + \rho_1}, \quad k = \frac{\beta}{1 - k_1 (\alpha_1 / \alpha_1^*)^{2/3}}, \quad \beta = \frac{\kappa \mu_0}{r^2}$$

$$m_1 > m_0, \quad k_1 = \text{const}, \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L]$$

Величины, помеченные индексом 0, относятся к жидкости, индексом 1 — к частицам. Через p, v обозначены давление и среднемассовая скорость смеси; v_i, α_i, ρ_i — соответственно скорости компонент, их объемные концентрации (удельные объемы) и плотности; m_i — истинные плотности вещества компонент; μ_0, λ_0 — коэффициенты вязкости и диффузии жидкости; r — радиус частиц; L — длина области Q ; T — характерное время процесса. Коэффициент формы $\kappa = 4.5$ для сферических частиц; α_1^* — концентрация частиц при их максимально плотной упаковке. В случае тетраэдрического расположения сферических частиц геометрическое построение дает

$$\alpha_1^* = \frac{2}{9} \pi r^3 (n + 1) (n + 2), \quad n = \text{entier} (1.01965 / r - 0.73205)$$

Для $r \leq 0.1$ мм значение $\alpha_1^* \approx 0.7$.

Рассматриваемую задачу можно сформулировать так. Определить функции $p, v, v_i, \alpha_i, \rho_i$, удовлетворяющие в области $Q_T = Q \times [0, T]$ системе уравнений (1.1) и принимающие на границах заданные значения

$$(1.2) \quad v_0(0, x) = U_0^\circ(x), \quad v_1(0, x) = U_1^\circ(x), \quad \alpha_1(0, x) = \alpha_1^\circ(x)$$

$$t = 0, \quad x \in Q$$

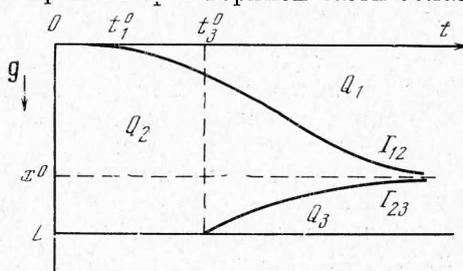
$$(1.3) \quad \left. \begin{aligned} v_0(t, 0) = \varphi^0(t), \quad v_1(t, 0) = 0 \\ v_0(t, L) = \varphi^1(t), \quad v_1(t, L) = 0 \\ p(t, 0) = P_a = \text{const} \end{aligned} \right\}, \quad t \in [0, T]$$

Функции φ^0 и φ^1 должны быть подчинены условию

$$\alpha_0(t, 0) \varphi^0(t) = \alpha_0(t, L) \varphi^1(t)$$

Основные особенности этой задачи проиллюстрируем на примере осаждения взвеси частиц.

2. Типичный процесс осаждения частиц из суспензии развивается следующим образом (фиг. 1). В момент времени t_1^0 в верхней части области Q_T появляется зона чистой жидкости Q_1 , в момент t_3^0 в основании Q_T — зона плотного осадка Q_3 . Между ними существует зона Q_2 , в которой частицы находятся во взвешенном состоянии. Образовавшиеся зоны разделяются границами Γ_{12} , Γ_{23} . В пределе при $t \rightarrow T$ границы раздела зон Γ_{12} , Γ_{23} асимптотически приближаются к прямой $x = x^0$. Это состояние соответствует полному осаждению взвеси.



Фиг. 1

Для задачи об осаждении частиц условия (1.2), (1.3) запишутся в виде

$$(2.1) \quad v_0(0, x) = 0, \quad v_1(0, x) = 0, \quad \alpha_1(0, x) = \alpha_1^0(x), \quad t = 0, \quad x \in Q$$

$$(2.2) \quad \left. \begin{aligned} v_0(t, 0) = 0, \quad v_1(t, 0) = 0 \\ v_0(t, L) = 0, \quad v_1(t, L) = 0, \quad p(t, 0) = P_a \end{aligned} \right\}, \quad t \in [0, T]$$

В каждой из зон справедливы свои уравнения. В зоне Q_1 действуют уравнения однофазной вязкой жидкости, которые вместе с (2.1), (2.2) дают

$$(2.3) \quad \left. \begin{aligned} \alpha_1(t, x) = 0, \quad \alpha_0(t, x) = 1 \\ v_0(t, x) = 0, \quad p(t, x) = P_a + m_0 g x \end{aligned} \right\}, \quad (t, x) \in Q_1$$

В зоне Q_2 следует решать систему (1.1); в Q_3

$$(2.4) \quad \left. \begin{aligned} \alpha_0(t, x) = 1 - \alpha_1^* = \text{const}, \quad \alpha_1(t, x) = \alpha_1^* \\ v_0(t, x) = 0, \quad v_1(t, x) = 0 \\ \frac{\partial p_0}{\partial x} = m_0 g, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = m_1 g \end{aligned} \right\}, \quad (t, x) \in Q_3$$

В зоне Q_3 частицы соприкасаются друг с другом и давление между частицами передается через жидкость и непосредственно. Вследствие этого давление в смеси p будет отличаться от давления в жидкости p_0 .

Системы уравнений (2.3), (1.1) и (2.4) замкнуты.

3. На границах раздела сред Γ_{12} , Γ_{23} должны выполняться законы сохранения массы и импульса жидкости и частиц. Исходя из этого требования, получим условия для искоемых функций на этих границах.

Рассмотрим подвижный объем, ограниченный точками $x_-(t)$, $x_+(t)$ и состоящий из одних и тех же точек жидкости. При этом $x_- \in Q_1$, $x_+ \in Q_2$. Пусть $x_* \in \Gamma_{12}$, $x_- < x_* < x_+$. Тогда

$$(3.1) \quad \frac{dx_-}{dt} = 0, \quad \frac{dx_+}{dt} = v_{0+}(t, x_+), \quad \frac{dx_*}{dt} = v_{1+}(t, x_*)$$

где v_{0+} , v_{1+} — значения скоростей жидкости и частиц на границе Γ_{12} со стороны Q_2 . Уравнение сохранения массы жидкости имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{x_-}^{x_*} m_0 dx + \int_{x_*}^{x_+} \rho_0 dx \right) = 0$$

Отсюда

$$m_0 \left(\frac{dx_*}{dt} - \frac{dx_-}{dt} \right) + \rho_0(t, x_+) \frac{dx_+}{dt} - \rho_0(t, x_*) \frac{dx_*}{dt} + \int_{x_*}^{x_+} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} dx = 0$$

или с учетом (3.1) получаем

$$(3.2) \quad \alpha_{0+} v_{0+} + \alpha_{1+} v_{1+} = 0$$

При выводе (3.2) использована непрерывность ρ_0 по x в зоне Q_2 , а также малость интервала (x_*, x_+) .

С помощью аналогичных рассуждений для частиц и смеси можно убедиться, что закон сохранения массы на Γ_{12} дает только условие (3.2).

Потребуем выполнение закона сохранения импульса жидкости на Γ_{12} . Пусть (x_-, x_*) и $(x_* x_+)$ — два подвижных объема, движущихся со скоростью частиц на границе Γ_{12} , $x_* \in \Gamma_{12}$. Для первого объема закон сохранения импульса жидкости при $x_- \rightarrow x_+$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \alpha_{0-} \left(-p_- + 2\mu_0 \frac{\partial v_-}{\partial x} \right) - \rho_{0-} v_{0-} (v_{0-} - v_{1-}) = \\ = \alpha_{0-} \left[-p_+ + 2\mu_0 \frac{\partial v_+}{\partial x} \right] - \rho_{0+} v_{0+} (v_{0+} - v_{1+}) \end{aligned}$$

Здесь в правой части записан общий импульс, действующий на первый объем со стороны Q_2 , в квадратных скобках стоит выражение тензора напряжений смеси. Учитывая, что

$$\alpha_{0-} = 1, \quad \partial v_- / \partial x = 0, \quad \partial v_{0-} / \partial x = 0, \quad v_{0-} = 0$$

получим

$$(3.3) \quad -p_- = -p_+ + 2\mu_0 \partial v_+ / \partial x - \rho_{0+} v_{0+} (v_{0+} - v_{1+})$$

Такие же рассуждения для второго объема дают

$$(3.4) \quad -p_- = -p_+ + 2\mu_0 \frac{\partial v_+}{\partial x} - \frac{\rho_{0+} v_{0+}}{\alpha_{0+}} (v_{0+} - v_{1+}), \quad \alpha_{0+} > 0$$

При выводе (3.3), (3.4) предполагалась регулярность всех объемных сил в окрестности x_* .

Закон сохранения импульса частиц с учетом (3.3) и (3.4) приводит к следующим соотношениям на линии Γ_{12} :

$$(3.5) \quad v_{0-} = v_{0+} = 0, \quad \alpha_{0-} = \alpha_{0+} = 1, \quad p_+ = p_- + 2\mu_0 \partial v_+ / \partial x$$

В точке x_* должны быть выполнены условия

$$(3.6) \quad \alpha_{1+}(t, x_*) = 0, \quad \partial \alpha_{1+}(t, x_*) / \partial x > 0$$

При переходе через границу Γ_{12} функции α_0 , v_0 должны быть непрерывны, а давление может изменяться скачком.

Выполнение законов сохранения массы и импульса на границе Γ_{23} дает соотношения

$$(3.7) \quad \begin{aligned} (\alpha_{0-} - \alpha_{0*}) v_* &= \alpha_{0-} v_{0-}, \quad (\alpha_{1-} - \alpha_{1*}) v_* = \alpha_{1-} v_{1-} \\ \rho_{0-} v_{0-} (v_* - v_{0-}) &= \alpha_{0-} p_{0-} - 2\mu_0 \alpha_{0-} \partial v_- / \partial x - \alpha_{0*} p_{0+} \\ \rho_{1-} v_{1-} (v_* - v_{1-}) &= \alpha_{1-} p_{1-} - 2\mu_0 \alpha_{1-} \partial v_- / \partial x - \alpha_{1*} p_+ \end{aligned}$$

Величины, помеченные индексом минус, действуют со стороны зоны Q_2 , индексом плюс — со стороны Q_3 . Величина $v_* = dx_*/dt$ есть скорость изменения высоты осаждаемого слоя и $v_1 \neq v_*$. На Γ_{23} имеем условие для α_1

$$(3.8) \quad \alpha_{1+} = \alpha_1^* = \text{const}$$

4. Точность решения задачи зависит от корректного выделения границ раздела сред и реализации на них условий (3.5), (3.7).

Если известна область Q_1 , то искомые функции внутри нее находятся в виде конечных соотношений (2.3).

Рассмотрим область Q_2 . Пусть в момент времени t^n в Q_2 известны функции $v^n, v_0^n, v_1^n, p^n, \alpha_0^n, \alpha_1^n, \rho_0^n, \rho_1^n$. Тогда из соотношения $dx_*/dt = v_1^*$ можно найти x_*^{n+1} — границу Γ_{12} в следующий момент времени t^{n+1} . Уравнение неразрывности для частиц позволит найти α_1^{n+1} в Q_2 , а следовательно, и функции $\alpha_0^{n+1}, \rho_0^{n+1}, \rho_1^{n+1}$. Далее можно определить границу Γ_{23} из соотношений (3.7), (3.8).

Уравнения неразрывности с учетом (2.2) дают интеграл

$$(4.1) \quad \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 = 0$$

После исключения из уравнений импульсов давления получим, используя (4.1), уравнение для v_0

$$(4.2) \quad a \frac{\partial v_0}{\partial t} + b \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + c \frac{\partial v_0}{\partial x} + d v_0 = e$$

где функции a, b, c, d, e зависят от $t, x, v_0, \alpha_1, \partial \alpha_1 / \partial x, \partial^2 \alpha_1 / \partial x^2$. На кривой Γ_{12} $\alpha_0 = 1$ и уравнение (4.2) содержит особенность $(\alpha_0 - 1)^{-1}$. Но из (3.5) имеем $v_0 / \Gamma_{12} = 0$. В остальных точках области Q_2 $\alpha_0 < 1$. Условие (3.7) позволит получить значение v_0 на Γ_{23} , после чего уравнение (4.2) может быть решено в области Q_2 численно. Из (4.1) найдем v_1^{n+1} из соответствующей формулы v^{n+1} , из какого-либо уравнения импульса при условии (3.5) — давление p^{n+1} . Для момента времени t^{n+1} искомые в Q_2 функции будут найдены.

Решив в зоне Q_3 уравнения (2.4), (3.7), получим искомые функции во всей области Q . Чтобы найти их в следующий момент времени, необходимо повторить описанную процедуру.

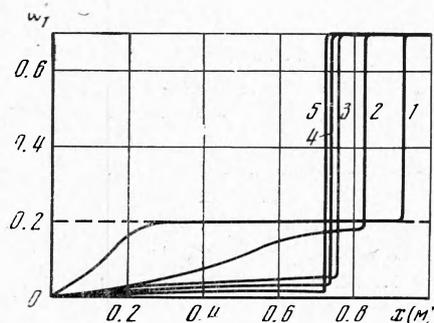
Данный алгоритм был реализован в виде программы на языке ФОРТРАН. Интегрирование дифференциальных уравнений осуществлялось численно методом конечных разностей. Использовались разностные схемы, имеющие второй порядок аппроксимации по пространственной переменной и первый порядок по времени. Число узлов сетки в направлении X бралось равным 100. Среднее время счета одного варианта задачи на ЭВМ БЭСМ-6 не превышало 10 мин.

5. Были рассчитаны различные режимы осаждения частиц в зависимости от значений $m_0, m_1, \mu_0, \lambda_0, r$ и других параметров. Ниже приводятся графики расчетов осаждения частиц радиусом 0.1 мкм с начальной концентрацией $\alpha_1^0 = 0.2$. Осаждение происходило в воде

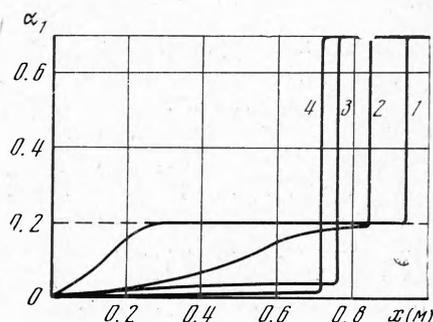
$$\begin{aligned} \mu_0 &= 0.1_{10}^{-2} \text{ (кг/м} \cdot \text{сек)}, & \lambda_0 &= 0.1_{10}^{-9} \text{ (м}^2\text{/сек)}, \\ m_0 &= 1000 \text{ (кг/м}^3\text{)} \end{aligned}$$

На фиг. 2 приведены линии распределения концентрации частиц по высоте области Q к моменту времени $t = 60$ сек. Кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют частицам с плотностью m_1 , в 2, 5, 10, 15 и 20 раз превышающей плотность воды m_0 . Пунктиром показана линия начальной концентрации при $t = 0$.

На фиг. 3 представлен процесс осаждения в воде стеклянных сферических частиц ($r = 0.1$ мм, $m_1 = 2m_0$). Кривые 1, 2, 3, 4 описывают поведение функции α_1 в последовательные моменты времени $t = 50, 200, 450$ и 3600 сек.

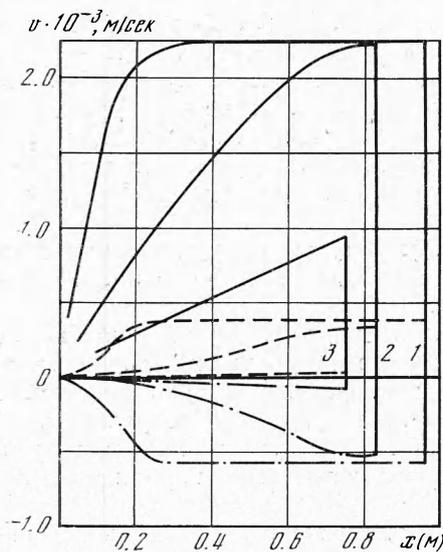


Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 4 для предыдущего примера приведены графики скоростей частиц (сплошные линии), жидкости (штрихпунктир) и смеси (пунктир). Вертикальные прямые 1, 2, 3 соответствуют высоте осажденного слоя в моменты времени $t = 50, 200$ и 450 сек. При $t = 3600$ сек все скорости практически равны нулю, т. е. процесс осаждения частиц закончился. Как видно из этого графика, величины скоростей частиц и жидкости по модулю близки, но то, что они направлены в противоположные стороны, приводит к появлению дополнительных сил, препятствующих осаждению. Поэтому общее время процесса осаждения по модели [1] значительно увеличивается по сравнению с моделями, в которых движение жидкости не учитывается [3].



Фиг. 4

6. Пусть через слой твердых сферических частиц, насыпанных на горизонтальную сетку внутри вертикальной цилиндрической трубы, снизу вверх течет вязкая несжимаемая жидкость. Ускорение силы тяжести g направлено вниз по оси трубы X . При некоторой скорости потока жидкости v_0^* подъемная сила, действующая на частицы, становится по модулю больше суммы сил, удерживающих слой частиц в плотном состоянии (вес частиц, силы взаимодействия между частицами и т. д.). Слой начинает расширяться, расстояние между частицами увеличивается и частицы становятся разделенными прослойкой жидкости. Поскольку увеличилось проходное сечение слоя, падает скорость жидкости и подъемная сила.

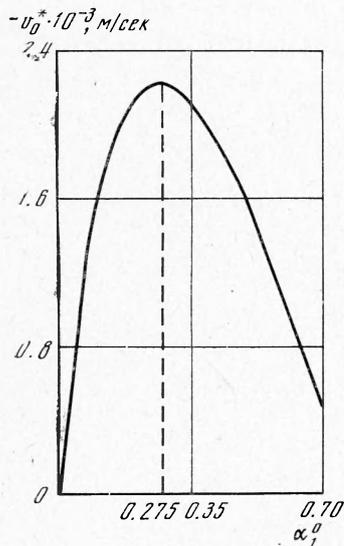
В слое устанавливается распределение концентрации частиц и скоростей, при котором подъемная сила уравновешивается силой тяжести. Движение частиц в слое напоминает процесс кипения, по аналогии такие слои называют кипящими.

Подробное описание кипящего слоя имеется в [5]. Там же предлагается элементарная теория слоя, основанная на эмпирических гипотезах и качественно описывающая движение в однородном кипящем слое. Под последним понимается такой слой, в котором поток жидкости и частиц распределен равномерно по всей высоте слоя. Однородный кипящий слой имеет четкую верхнюю границу, отделяющую его от зоны «чистой» жидкости, где концентрация частиц много меньше, чем внутри слоя.

Режим однородного кипящего слоя не всегда реализуется. Рассмотрим вопрос, при каких соотношениях концентрации частиц α_1° в слое и скорости жидкости v_0^* режим однородного кипящего слоя возможен и устойчив. Будем решать систему уравнений (1.1) при условиях

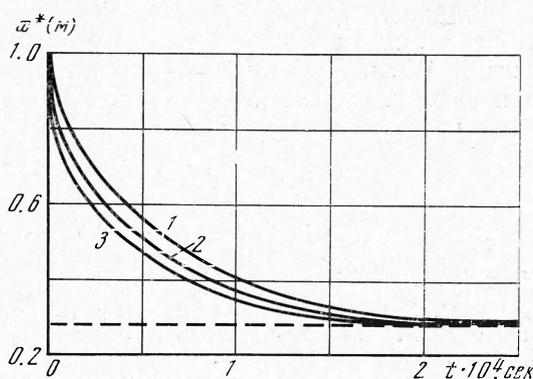
$$(6.1) \quad v_0(0, x) = \begin{cases} v_0^*(1 - \alpha_1^\circ), & x \in [0, l] \\ v_0^*, & x \in [l, L] \end{cases}, \quad \alpha_1(0, x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, l] \\ \alpha_1^\circ, & x \in [l, L] \end{cases}$$

$$(6.2) \quad \left. \begin{aligned} v_1(t, x) &= 0, & x \in [0, L], & t = 0 \\ v_0(t, 0) &= v_0^*(1 - \alpha_1^\circ), & v_1(t, 0) &= 0 \\ v_0(t, L) &= v_0^*, & v_1(t, L) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad t \in [0, T]$$



Фиг. 6

с результатами работы [5], где для устойчивости кипящего слоя получена оценка $\alpha_1^\circ > 0.35$.



Фиг. 5

где $|L - l|$ — первоначальная высота слоя. С помощью (6.1), (6.2) из (1.1) можно получить следующую зависимость v_0^* от α_1° :

$$(6.3) \quad v_0^*(\alpha_1^\circ) = \frac{r^2}{\alpha_{10}^*} \left[1 - k_1 \left(\frac{\alpha_1^\circ}{\alpha_{10}^*} \right)^{2/3} \right] \times \alpha_1^\circ (1 - \alpha_1^\circ) (m_0 - m_1) g$$

Вид этой зависимости показан на фиг. 6. Из этой фигуры следует, что решение задачи (1.1), (6.1), (6.2) неединственно в диапазоне изменения α_1° от нуля до значения концентрации плотной упаковки $\alpha_{10}^* = 0.7$. Чтобы выделить устойчивое решение, были проведены контрольные расчеты этой задачи для зависимости (6.3). Установлено, что при одной и той же скорости v_0^* режим устойчивого однородного слоя обеспечивается только для значений α_1° , лежащих справа от точки максимума кривой $v_0^*(\alpha_1^\circ)$, т. е. для $\alpha_1^\circ > 0.275$. Качественно этот вывод согла-

Были проведены расчеты для случаев, когда $0.275 \leq \alpha_1^0 < \alpha_1^*$ и скорость жидкости увеличивалась по абсолютной величине по некоторому закону от 0 до значения v_0^* , предварительно найденному из (6.3). Оказалось, что решение задачи выходит на стационарный однородный режим, если только за время, в течение которого скорость жидкости достигла значения v_0^* , в основании слоя не успел образоваться плотный осадок. В противном случае величина скорости v_0^* оказывается недостаточной, чтобы привести слой в однородное состояние. Если задать v_0 немного больше v_0^* , наблюдается размывание верхней части кипящего слоя и его однородность также нарушается. При скоростях $v_0 \gg v_0^*$ частицы всплывают вверх и в основании трубы образуется зона чистой жидкости.

Поступила 27 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов Б. Г. Об уравнениях гидродинамики многофазных систем. В сб. «Численные методы механики сплошной среды», т. 4, № 1. Новосибирск, 1973.
2. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. М., «Мир», 1971.
3. Уоллис Г. Б. Одномерные двухфазные течения. М., «Мир», 1972.
4. Азров М. Э., Тодес О. М. Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем. Л., «Химия», 1968.
5. Гольдштик М. А. Элементарная теория кипящего слоя. ПМТФ, 1972, № 6.