УДК 539.3: 517.958

КАНОНИЧЕСКИЕ МОДУЛИ И ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОСТИ

Н. И. Остросаблин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: abd@hydro.nsc.ru

С использованием ортогонального и аффинного преобразований координат и соответствующих преобразований механических величин уравнения двумерной статической задачи анизотропной упругости приведены к простейшему виду. Доказано, что произвольную матрицу модулей упругости, содержащую шесть независимых компонент, конгруэнтным преобразованием всегда можно привести к матрице с двумя независимыми компонентами, которые названы каноническими модулями. В зависимости от соотношений между каноническими модулями определитель матрицы операторов уравнений в смещениях представляется в виде произведения различных квадратичных множителей. Дано общее представление решения уравнений в смещениях в виде линейной комбинации первых производных от двух квазигармонических функций, удовлетворяющих двум независимым уравнениям. Установлено, что каждому представлению соответствует оператор симметрии, т. е. формула производства новых решений; в трехмерном случае матрица модулей упругости с 21 независимой компонентой конгруэнтна матрице с 12 независимыми каноническими модулями.

Ключевые слова: ортогональные и аффинные преобразования, анизотропия, модули упругости, канонические модули, общее решение, операторы симметрии, диагонализация эллиптической системы.

В [1] показано, что в случае произвольной анизотропии уравнения в смещениях

$$A_{i(kl)j}\,\partial_{kl}u_j + F_i = 0, \qquad i,j,k,l = 1,2,3, \tag{1}$$

где $A_{i(kl)j} = (A_{iklj} + A_{ilkj})/2$; $A_{iklj} = A_{kilj} = A_{ljik}$ — тензор четвертого ранга модулей упругости; u_j — вектор смещения; F_i — вектор объемных сил; ∂_k — производная по координате x_k; по повторяющимся буквенным индексам проводится суммирование, при общем аффинном преобразовании координат

$$x_i = \alpha_i + \alpha_{ij}y_j, \qquad |\alpha_{ij}| \neq 0, \qquad y_k = \beta_k + \beta_{ki}x_i; \tag{2}$$
$$\beta_k = -\beta_{ki}\alpha_i, \qquad \beta_{ki}\alpha_{ij} = \delta_{kj}$$

(δ_{kj} — единичная матрица; α_i, α_{ij} — произвольные действительные постоянные) и соответствующих преобразованиях механических величин не меняют вид:

$$\tilde{A}_{r(pq)s}\,\tilde{\partial}_{pq}\tilde{u}_s + \tilde{F}_r = 0$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00749) и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3066.2008.1).

(знак “$\sim$” соответствует преобразованным величинам). Уравнения равновесия, обобщенный закон Гука, удельная энергия деформации, выражение деформаций через смещения, граничные условия в напряжениях и смещениях также сохраняют вид и в новых переменных [1]. За счет выбора параметров α_{ij}, β_{ki} аффинных преобразований (2) можно упростить уравнения (1) и уменьшить число модулей упругости в законе Гука. Некоторые аффинные преобразования уравнений статики линейной теории упругости анизотропных тел рассматривались, например, в [2–7] (ссылки на другие работы см. в [1]).

Тензор модулей упругости и коэффициенты в уравнениях (1) преобразуются по формулам [1]

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{pqrs} &= \beta_{pi}\beta_{qj}A_{ijkl}\beta_{rk}\beta_{sl}, \qquad A_{ijkl} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\tilde{A}_{pqrs}\alpha_{kr}\alpha_{ls}; \\ \tilde{A}_{r(pq)s} &= \beta_{ri}\beta_{sj}A_{i(kl)j}\beta_{pk}\beta_{ql}, \qquad A_{i(kl)j} = \alpha_{ir}\alpha_{js}\tilde{A}_{r(pq)s}\alpha_{kp}\alpha_{lq}. \end{aligned} \tag{3}$$

Используя для симметричных по двум индексам тензоров формулы перехода от двух индексов к одному

$$h_{11} = h_1, \qquad h_{22} = h_2, \qquad h_{33} = h_3,$$
$$\sqrt{2}\,h_{23} = \sqrt{2}\,h_{32} = h_4, \qquad \sqrt{2}\,h_{13} = \sqrt{2}\,h_{31} = h_5, \qquad \sqrt{2}\,h_{12} = \sqrt{2}\,h_{21} = h_6,$$

запишем (3) в матричном виде:

$$\begin{gathered} A = \hat{\alpha}\tilde{A}\hat{\alpha}', \qquad \tilde{A} = \hat{\beta}A\hat{\beta}', \qquad A^{-1} = \hat{\beta}'\tilde{A}^{-1}\hat{\beta}, \qquad \tilde{A}^{-1} = \hat{\alpha}'A^{-1}\hat{\alpha}, \\ \tilde{A}^{*} = \hat{\beta}A^{*}\hat{\beta}', \qquad A^{*} = \hat{\alpha}\tilde{A}^{*}\hat{\alpha}' \end{gathered} \tag{4}$$

(штрих означает операцию транспонирования матрицы). В (4) все матрицы имеют размер 6×6. Матрица A^{-1} коэффициентов податливости является обратной для матрицы A модулей упругости. Матрицы A, A^{-1} симметричные и положительно-определенные. Матрицы A^*, $\tilde{A}^*$ соответствуют коэффициентам $A_{i(kl)j}$ в уравнениях (1). Матрицы, соответствующие тензорам

$$\alpha_{ijpq} = (\alpha_{ip}\alpha_{jq} + \alpha_{iq}\alpha_{jp})/2, \qquad \beta_{pqij} = (\beta_{pi}\beta_{qj} + \beta_{pj}\beta_{qi})/2,$$

обозначены через $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$. Компоненты матриц $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ приведены в [1, 6]. В двумерном случае матрица $\hat{\beta}$ имеет вид

$$\hat{\beta}_{pi} = \begin{bmatrix} \beta_{11}^2 & \beta_{12}^2 & \sqrt{2}\,\beta_{11}\beta_{12} \\ \beta_{21}^2 & \beta_{22}^2 & \sqrt{2}\,\beta_{21}\beta_{22} \\ \sqrt{2}\,\beta_{11}\beta_{21} & \sqrt{2}\,\beta_{12}\beta_{22} & \beta_{11}\beta_{22} + \beta_{12}\beta_{21} \end{bmatrix}.$$

Формулы (4) представляют собой конгруэнтные преобразования матриц A, $\tilde{A}$, A^{-1}, $\tilde{A}^{-1}$, A^*, $\tilde{A}^*$, определяющих свойства упругости и уравнений (1) для произвольных анизотропных материалов. Аффинные преобразования (2) с невырожденной матрицей $\alpha = [\alpha_{ij}]$ образуют группу, так же как и конгруэнтные преобразования (4) [1, 6].

Преобразование (2) с матрицей $\beta = [\beta_{ki}]$ можно записать в виде произведения трех преобразований [1, 8]

$$\beta = \beta^{(3)}\beta^{(2)}\beta^{(1)}, \tag{5}$$

где $\beta^{(1)}$, $\beta^{(3)}$ — матрицы вращения; $\beta^{(2)}$ — диагональная матрица: $\beta^{(2)} = \operatorname{diag}(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3)$, $\beta_i > 0$. С учетом (5) для $\hat{\beta}$ получаем представление

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}^{(3)}\hat{\beta}^{(2)}\hat{\beta}^{(1)} \tag{6}$$

и из (4), (6) находим

$$\tilde{A} = \hat{\beta}^{(3)}\hat{\beta}^{(2)}\hat{\beta}^{(1)}A\hat{\beta}^{(1)\prime}\hat{\beta}^{(2)\prime}\hat{\beta}^{(3)\prime}. \tag{7}$$

Из (7) следует, что общее конгруэнтное преобразование включает ортогональное преобразование $\hat{\beta}^{(1)}$, растяжение по осям с матрицей

$$\hat{\beta}^{(2)} = \operatorname{diag}(\beta_1^2,\ \beta_2^2,\ \beta_3^2,\ \beta_2\beta_3,\ \beta_1\beta_3,\ \beta_1\beta_2)$$

и еще одно ортогональное преобразование $\hat{\beta}^{(3)}$.

Запишем уравнения (1) для двумерного случая:

$$(A_{i(11)j}\,\partial_{11} + 2A_{i(12)j}\,\partial_{12} + A_{i(22)j}\,\partial_{22})u_j + F_i = 0, \qquad i,j = 1,2. \tag{8}$$

С учетом двухиндексных обозначений для модулей упругости A_{ij} матрица операторов в (8) имеет вид

$$A_{i(kl)j}\,\partial_{kl} = \begin{bmatrix} A_{11}\,\partial_{11} + \sqrt{2}\,A_{61}\,\partial_{12} + \dfrac{A_{66}}{2}\,\partial_{22} & \dfrac{A_{61}}{\sqrt{2}}\,\partial_{11} + \Big(A_{21} + \dfrac{A_{66}}{2}\Big)\,\partial_{12} + \dfrac{A_{62}}{\sqrt{2}}\,\partial_{22} \\ \dfrac{A_{61}}{\sqrt{2}}\,\partial_{11} + \Big(A_{21} + \dfrac{A_{66}}{2}\Big)\,\partial_{12} + \dfrac{A_{62}}{\sqrt{2}}\,\partial_{22} & \dfrac{A_{66}}{2}\,\partial_{11} + \sqrt{2}\,A_{62}\,\partial_{12} + A_{22}\,\partial_{22} \end{bmatrix}.$$

Уравнения (8) представим также в виде

$$\Big(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{61}/\sqrt{2} \\ A_{61}/\sqrt{2} & A_{66}/2 \end{bmatrix}\partial_{11} + \begin{bmatrix} \sqrt{2}\,A_{61} & A_{21} + A_{66}/2 \\ A_{21} + A_{66}/2 & \sqrt{2}\,A_{62} \end{bmatrix}\partial_{12} + \\ + \begin{bmatrix} A_{66}/2 & A_{62}/\sqrt{2} \\ A_{62}/\sqrt{2} & A_{22} \end{bmatrix}\partial_{22}\Big)u_j + F_i = 0. \tag{9}$$

В силу положительной определенности матрицы модулей упругости A_{ij} положительно-определенными являются матрицы $A_{i(11)j}$, $A_{i(22)j}$ в (8), (9), а также матрица $A_{i(kl)j}\partial_{kl}$ при любых ненулевых действительных значениях символов ∂_k, $\partial_{11} + \partial_{22} \ne 0$. При аффинных преобразованиях (2) вид уравнений (9) не меняется. Все модули A_{ij} можно считать безразмерными. Это означает, что напряжения и модули отнесены к некоторому фиксированному напряжению.

С помощью последовательных преобразований вида (5), (6) можно получить следующие значения коэффициентов в (9):

$$A_{61} = 0, \quad A_{62} = 0; \qquad A_{11} = 1, \quad A_{66} = 2$$

(знак "$\sim$" над величинами опускается). При этом уравнения (9) принимают вид

$$\Big(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\partial_{11} + \begin{bmatrix} 0 & 1 + A_{21} \\ 1 + A_{21} & 0 \end{bmatrix}\partial_{12} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}\partial_{22}\Big)u_j + F_i = 0$$

или

$$\begin{bmatrix} \partial_{11} + \partial_{22} & (1 + A_{21})\,\partial_{12} \\ (1 + A_{21})\,\partial_{12} & \partial_{11} + A_{22}\,\partial_{22} \end{bmatrix} u_j + F_i = 0. \tag{10}$$

Из изложенного выше следует, что произвольную матрицу модулей упругости

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & & \mathrm{sym} \\ A_{21} & A_{22} & \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix}$$

конгруэнтными преобразованиями (7), обусловленными аффинными преобразованиями (2), (5), всегда можно привести к каноническому виду

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & \mathrm{sym} \\ A_{21} & A_{22} & \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

а уравнения (8), (9) — к канонической форме (10) [9]. Модули упругости A_{21}, A_{22} в (10), (11) будем называть каноническими. Таким образом, двумерная задача линейной теории упругости для произвольного анизотропного материала сводится к решению уравнений (10) с граничными условиями в напряжениях или смещениях.

Некоторые другие канонические формы уравнений и модулей упругости для двумерной задачи рассматривались в работах [10–13].

Покажем, что с помощью преобразований вида (2), (5)–(7) уравнения (8), (9) преобразуются к виду (10), а модули A_{ij} — к виду (11). Определитель матрицы операторов в (8), (9)

$$\begin{aligned} d = |A_{i(kl)j}\,\partial_{kl}| = (1/2)(A_{11}A_{66} - A_{61}^2)\,\partial_{1111} + \sqrt{2}\,(A_{11}A_{62} - A_{21}A_{61})\,\partial_{1112} + \\ + (A_{11}A_{22} - A_{21}^2 - A_{21}A_{66} + A_{61}A_{62})\,\partial_{1122} + \sqrt{2}\,(A_{22}A_{61} - A_{21}A_{62})\,\partial_{1222} + \\ + (1/2)(A_{22}A_{66} - A_{62}^2)\,\partial_{2222} > 0 \end{aligned} \tag{12}$$

при любых ненулевых действительных значениях символов ∂_k, $\partial_{11} + \partial_{22} \neq 0$. Тот же вид определитель (12) имеет и в преобразованной системе координат. Так как всегда $d > 0$, то система уравнений (8) или (9) является эллиптической и уравнение $|A_{i(kl)j}\,\partial_{kl}| = 0$ не имеет действительных корней, при этом определитель (12) разлагается на квадратичные множители:

$$d = (a_{11}\,\partial_{11} + 2a_{12}\,\partial_{12} + a_{22}\,\partial_{22})(b_{11}\,\partial_{11} + 2b_{12}\,\partial_{12} + b_{22}\,\partial_{22}) = D_1D_2, \tag{13}$$

также не имеющие действительных корней. Проводя сравнение коэффициентов в (12), (13), получаем уравнения

$$\begin{gathered} (A_{11}A_{66} - A_{61}^2)/2 = a_{11}b_{11}, \\ \sqrt{2}\,(A_{11}A_{62} - A_{21}A_{61}) = 2(a_{12}b_{11} + a_{11}b_{12}), \\ A_{11}A_{22} - A_{21}^2 - A_{21}A_{66} + A_{61}A_{62} = a_{22}b_{11} + 4a_{12}b_{12} + a_{11}b_{22}, \\ \sqrt{2}\,(A_{22}A_{61} - A_{21}A_{62}) = 2(a_{22}b_{12} + a_{12}b_{22}), \\ (A_{22}A_{66} - A_{62}^2)/2 = a_{22}b_{22}. \end{gathered} \tag{14}$$

Если A_{ij} заданы, то из (14) определяются $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$, при этом коэффициент a_{11} можно зафиксировать произвольно.

Пусть преобразование (5) таково, что коэффициенты при символах ∂_{1112}, ∂_{1222} в (12) равны нулю (знак "$\sim$" над величинами опускается):

$$A_{11}A_{62} - A_{21}A_{61} = 0, \qquad A_{22}A_{61} - A_{21}A_{62} = 0. \tag{15}$$

Так как в силу положительной определенности определитель системы (15) $A_{11}A_{22} - A_{21}^2 > 0$, то из (15) следует, что $A_{61} = 0$, $A_{62} = 0$. С учетом формул (3) последние равенства записываются в виде

$$\tilde{A}_{2111} = \tilde{A}_{61}/\sqrt{2} = \beta_{2i}\beta_{1j}A_{ijkl}\beta_{1k}\beta_{1l} = 0, \quad \tilde{A}_{2122} = \tilde{A}_{62}/\sqrt{2} = \beta_{2i}\beta_{1j}A_{ijkl}\beta_{2k}\beta_{2l} = 0. \tag{16}$$

Существование решения β_{pi} уравнений (16) сложно доказывается в [10–13]. Полагая

$$\beta_{pi} = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} & n_{21} \\ n_{12} & n_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 n_{11} & \beta_1 n_{21} \\ \beta_2 n_{12} & \beta_2 n_{22} \end{bmatrix},$$

где $n_{ik}n_{il} = \delta_{kl}$, уравнения (16) представим в виде

$$n_{i2}A_{ijkl}n_{j1}n_{k1}n_{l1} = 0, \qquad n_{i1}A_{ijkl}n_{j2}n_{k2}n_{l2} = 0. \tag{17}$$

Уравнения (17) являются условиями существования продольных нормалей, которые имеют место при любом тензоре A_{ijkl} модулей упругости [14].

Решение уравнений (17) эквивалентно определению направлений n_{i1}, n_{i2}, для которых величины

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{1111} = \tilde{A}_{11} = A_{ijkl}n_{i1}n_{j1}n_{k1}n_{l1}, \qquad n_{i1}n_{i1} = 1, \\ \tilde{A}_{2222} = \tilde{A}_{22} = A_{ijkl}n_{i2}n_{j2}n_{k2}n_{l2}, \qquad n_{i2}n_{i2} = 1 \end{aligned} \tag{18}$$

достигают экстремальных значений. Из условий существования экстремума величин (18) [14]

$$A_{ijkl}n_{j1}n_{k1}n_{l1} = \tilde{A}_{11}n_{i1}, \qquad A_{ijkl}n_{j2}n_{k2}n_{l2} = \tilde{A}_{22}n_{i2}$$

следуют уравнения (17). Формы (18) записываются в развернутом виде

$$\tilde{A} = A_{11}n_1^4 + 2\sqrt{2}\,A_{61}n_1^3n_2 + 2(A_{21} + A_{66})n_1^2n_2^2 + 2\sqrt{2}\,A_{62}n_1n_2^3 + A_{22}n_2^4, \quad n_1^2 + n_2^2 = 1. \tag{19}$$

Полагая в (19) $n_1 = c$, $n_2 = s$ или $n_1 = -s$, $n_2 = c$, $c^2 + s^2 = 1$, в качестве условия экстремума величины $\tilde{A}$ получаем уравнения (17) в развернутом виде

$$\begin{aligned} A_{61}c^4 + \sqrt{2}\,(A_{21} + A_{66} - A_{11})c^3s + 3(A_{62} - A_{61})c^2s^2 + \\ + \sqrt{2}\,(A_{22} - A_{21} - A_{66})cs^3 - A_{62}s^4 = 0, \\ A_{62}c^4 + \sqrt{2}\,(A_{22} - A_{21} - A_{66})c^3s + 3(A_{61} - A_{62})c^2s^2 + \\ + \sqrt{2}\,(A_{21} + A_{66} - A_{11})cs^3 - A_{61}s^4 = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Поскольку второе уравнение в (20) получается из первого заменой $c \to -s$, $s \to c$, достаточно решить любое из них. Для переменной $t = s/c$ из первого уравнения в (20) следует уравнение четвертой степени

$$A_{61} + \sqrt{2}\,(A_{21} + A_{66} - A_{11})t + 3(A_{62} - A_{61})t^2 + \sqrt{2}\,(A_{22} - A_{21} - A_{66})t^3 - A_{62}t^4 = 0,$$

которое при любых A_{ij} имеет действительные корни, так как всегда существуют экстремальные значения формы (19) [14]. Все величины $A_{ij}^{(1)}$ выражаются по формуле (7) через A_{ij} и корень t.

Таким образом, из изложенного выше следует, что всегда существует *ортогональное* преобразование $\beta_{pi}^{(1)} = n_{ip}$, приводящее произвольную матрицу модулей упругости A_{ij} к виду

$$A_{ij}^{(1)} = \begin{bmatrix} A_{11} & & \mathrm{sym} \\ A_{21} & A_{22} & \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Далее вторым преобразованием $\beta^{(2)} = \mathrm{diag}\,(\beta_1,\ \beta_2)$ матрица (21) приводится к виду

$$A_{ij}^{(2)} = \begin{bmatrix} \beta_1^4 A_{11} & & \mathrm{sym} \\ \beta_1^2\beta_2^2 A_{21} & \beta_2^4 A_{22} & \\ 0 & 0 & \beta_1^2\beta_2^2 A_{66} \end{bmatrix}.$$

Выбирая параметры β_1, β_2, из матрицы $A_{ij}^{(2)}$ можно получить либо каноническую матрицу (11), где $A_{11}^{(2)} = \beta_1^4 A_{11} = 1$, $A_{66}^{(2)} = \beta_1^2\beta_2^2 A_{66} = 2$, либо матрицу из [10]

$$A_{ij}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & & \mathrm{sym} \\ \beta-\alpha & 1 & \\ 0 & 0 & 2\alpha \end{bmatrix}, \tag{22}$$

где

$$\beta_1^2 = \frac{1}{\sqrt{A_{11}}}, \quad \beta_2^2 = \frac{1}{\sqrt{A_{22}}}, \quad \beta-\alpha = \frac{A_{21}}{\sqrt{A_{11}A_{22}}}, \quad 2\alpha = \frac{A_{66}}{\sqrt{A_{11}A_{22}}},$$

либо матрицу из [11, 12], где $A_{11}^{(2)} = A_{22}^{(2)} = \beta_1^4 A_{11} = \beta_2^4 A_{22}$, $\beta_1\beta_2 = 1$.

С учетом (21) уравнения (14) принимают вид

$$\begin{gathered} a_{11}b_{11} = \frac{1}{2}A_{11}A_{66}, \qquad \frac{a_{12}}{a_{11}} + \frac{b_{12}}{b_{11}} = 0, \qquad \frac{a_{22}}{a_{11}}\frac{b_{12}}{b_{11}} + \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{b_{22}}{b_{11}} = 0, \\ \frac{a_{22}}{a_{11}} + 4\,\frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{b_{12}}{b_{11}} + \frac{b_{22}}{b_{11}} = \frac{A_{11}A_{22} - A_{21}^2 - A_{21}A_{66}}{A_{11}A_{66}/2}, \qquad \frac{a_{22}}{a_{11}}\frac{b_{22}}{b_{11}} = \frac{A_{22}}{A_{11}}. \end{gathered} \tag{23}$$

Из второго и третьего уравнений (23) находим

$$\frac{b_{12}}{b_{11}} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}, \qquad \frac{a_{12}}{a_{11}}\Big(\frac{b_{22}}{b_{11}} - \frac{a_{22}}{a_{11}}\Big) = 0,$$

откуда следует, что возможны два варианта:

$$\frac{a_{12}}{a_{11}} = 0; \tag{24а}$$

$$\frac{b_{22}}{b_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{11}}. \tag{24б}$$

В случае если реализуется вариант (24а), из четвертого и пятого уравнений в (23) следует, что a_{22}/a_{11}, b_{22}/b_{11} являются корнями квадратного уравнения

$$a^2 - \frac{A_{11}A_{22} - A_{21}^2 - A_{21}A_{66}}{A_{11}A_{66}/2}\,a + \frac{A_{22}}{A_{11}} = 0.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \frac{A_{11}A_{22} - A_{21}^2 - A_{21}A_{66}}{A_{11}A_{66}} \pm \sqrt{\frac{(A_{11}A_{22} - A_{21}^2 - A_{21}A_{66})^2}{(A_{11}A_{66})^2} - \frac{A_{22}}{A_{11}}} = \\ &= \frac{1}{A_{11}A_{66}}\Big[A_{11}A_{22} + \Big(\frac{1}{2}A_{66}\Big)^2 - \Big(A_{21} + \frac{1}{2}A_{66}\Big)^2 \pm \\ &\qquad \pm\sqrt{(A_{11}A_{22} - A_{21}^2)[A_{11}A_{22} - (A_{21} + A_{66})^2]}\,\Big]. \end{aligned} \tag{25}$$

Корни (25) являются действительными и положительными, если выполняются условие положительной определенности матрицы (21)

$$-\sqrt{A_{22}/A_{11}} < A_{21}/A_{11} < \sqrt{A_{22}/A_{11}} \tag{26}$$

и неравенство

$$A_{21}/A_{11} \leqslant \sqrt{A_{22}/A_{11}} - A_{66}/A_{11}. \tag{27}$$

В случае если выполняется неравенство

$$\sqrt{A_{22}/A_{11}} - A_{66}/A_{11} < A_{21}/A_{11}, \tag{28}$$

имеет место вариант (24б). Тогда из двух последних уравнений в (23) находим коэффициенты

$$a_{22}/a_{11} = \sqrt{A_{22}/A_{11}},$$

$$2a_{12}/a_{11} = \sqrt{2\big[\sqrt{A_{22}/A_{11}} - (A_{11}A_{22} - A_{21}^2 - A_{21}A_{66})/(A_{11}A_{66})\big]} = \tag{29}$$

$$= \sqrt{2\big(\sqrt{A_{11}A_{22}} + A_{21}\big)\big[A_{66} - \big(\sqrt{A_{11}A_{22}} - A_{21}\big)\big]/(A_{11}A_{66})}.$$

Итак, при выполнении неравенств (26)–(28) определитель (12)

$$d = \frac{1}{2}\,A_{11}A_{66}\,\partial_{1111} + (A_{11}A_{22} - A_{21}^2 - A_{21}A_{66})\,\partial_{1122} + \frac{1}{2}\,A_{22}A_{66}\,\partial_{2222} \tag{30}$$

разлагается на множители вида (13)

$$d = a_{11}b_{11}(\partial_{11} + a_1\,\partial_{22})(\partial_{11} + a_2\,\partial_{22}); \tag{31а}$$

$$d = a_{11}b_{11}\Big(\partial_{11} + 2\,\frac{a_{12}}{a_{11}}\,\partial_{12} + \sqrt{\frac{A_{22}}{A_{11}}}\,\partial_{22}\Big)\Big(\partial_{11} - 2\,\frac{a_{12}}{a_{11}}\,\partial_{12} + \sqrt{\frac{A_{22}}{A_{11}}}\,\partial_{22}\Big), \tag{31б}$$

где коэффициенты определены выше (см. (25), (29)). В выражении (31б) квадратичные формы являются положительно-определенными, так как выполняется неравенство $(a_{12}/a_{11})^2 < \sqrt{A_{22}/A_{11}}$. Если в (27) имеет место знак равенства, то из выражения (31а) получаем

$$d = a_{11}b_{11}(\partial_{11} + \sqrt{A_{22}/A_{11}}\,\partial_{22})^2. \tag{32}$$

Таким образом, представление определителя (30) в виде (31а), (31б) или (32) зависит от того, какие из соотношений (26)–(28) выполняются, т. е. от того, в какой области допустимых значений находятся модули упругости A_{ij}. Область допустимых значений модулей A_{ij}, описываемая неравенствами (26)–(28), показана на рис. 1. Область I соответствует неравенствам (26), (27), область II — неравенствам (26), (28). Знаку равенства в (27) на рис. 1 соответствует прямая, разделяющая области I и II. Далее будем считать, что $A_{11} = A_{66}/2 = 1$, $a_{11} = b_{11} = 1$.

Запишем уравнения (9) для случая, когда матрица A_{ij} имеет вид (22):

$$\begin{aligned}(\partial_{11} + \alpha\,\partial_{22})u_1 + \beta\,\partial_{12}u_2 + F_1 = 0,\\ \beta\,\partial_{12}u_1 + (\alpha\,\partial_{11} + \partial_{22})u_2 + F_2 = 0.\end{aligned} \tag{33}$$

Определитель матрицы операторов в (33) равен

$$d = \alpha\,\partial_{1111} + (1 + \alpha^2 - \beta^2)\,\partial_{1122} + \alpha\,\partial_{2222} =$$

$$= (1/4)[(1+\alpha)^2 - \beta^2](\partial_{11} + \partial_{22})^2 + (1/4)[\beta^2 - (1-\alpha)^2](\partial_{11} - \partial_{22})^2. \tag{34}$$

Определитель $d > 0$, т. е. система (33) является эллиптической, если

$$-(1+\alpha) < \beta < 1 + \alpha, \qquad \alpha > 0. \tag{35}$$

При

$$-(1-\alpha) \leqslant \beta \leqslant 1 - \alpha, \qquad 0 < \alpha \leqslant 1; \tag{36а}$$

$$-(\alpha-1) \leqslant \beta \leqslant \alpha - 1, \qquad 1 < \alpha \tag{36б}$$

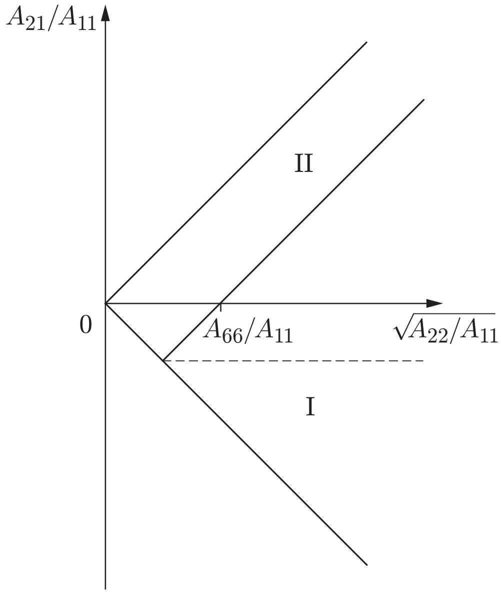

Рис. 1. Области допустимых значений A_{ij}:
I — область, определяемая неравенствами (26), (27); II — область, определяемая неравенствами (26), (28)

определитель (34) записывается в виде

$$d = \alpha(\partial_{11} + a_1\,\partial_{22})(\partial_{11} + a_2\,\partial_{22}), \tag{37}$$

где

$$a_{1,2} = \frac{1}{2\alpha}\left\{1 + \alpha^2 - \beta^2 \pm \sqrt{[(1+\alpha)^2 - \beta^2][(1-\alpha)^2 - \beta^2]}\,\right\}.$$

Если выполняются неравенства

$$1 - \alpha < \beta, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \quad \alpha - 1 < \beta, \quad 1 < \alpha; \tag{38а}$$

$$\beta < -(1 - \alpha), \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \quad \beta < -(\alpha - 1), \quad 1 < \alpha, \tag{38б}$$

то определитель (34) разлагается на множители:

$$d = \alpha\Big(\partial_{11} + 2\,\frac{a_{12}}{a_{11}}\,\partial_{12} + \partial_{22}\Big)\Big(\partial_{11} - 2\,\frac{a_{12}}{a_{11}}\,\partial_{12} + \partial_{22}\Big), \tag{39}$$

где

$$2a_{12}/a_{11} = \sqrt{[\beta^2 - (1-\alpha)^2]/\alpha}.$$

Таким образом, в зависимости от того, какое из неравенств (36а), (36б) (38а), (38б) выполняется для коэффициентов α, β, определитель (34) представляется в виде (37) или (39). Области допустимых значений α, β показаны на рис. 2. Область эллиптичности системы (33) задается неравенствами (35), и на рис. 2 в нее входят области I, II, III, IV. Случаю $a_1 = a_2$ в (37) соответствуют знаки равенства в (36а), (36б), а на рис. 2 — прямые $\beta = 1-\alpha$ и $\beta = \alpha - 1$.

Выше не учитывалось условие положительной определенности удельной энергии деформации, т. е. матрицы (22):

$$\alpha - 1 < \beta < 1 + \alpha, \qquad \alpha > 0. \tag{40}$$

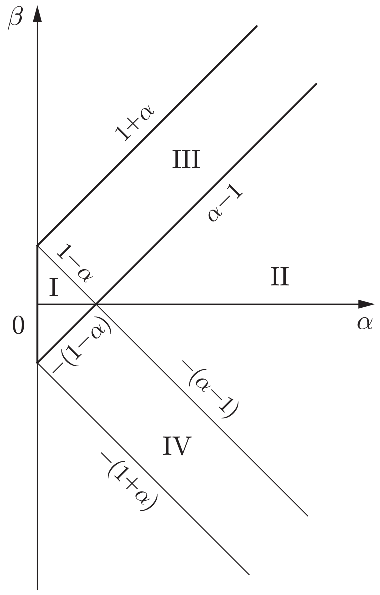

Рис. 2. Области допустимых значений параметров α, β:
I — область, определяемая неравенствами (36а); II — неравенствами (36б); III — неравенствами (38а); IV — область, определяемая неравенствами (38б)

На рис. 2 неравенствам (40) соответствуют области I, III. Таким образом, если α, β принадлежат областям I, III на рис. 2, то (33) есть уравнения теории упругости. Если α, β находятся в областях II, IV на рис. 2, то уравнения (33) не являются уравнениями теории упругости, так как не выполняются условия (40). При этом уравнения (33) остаются эллиптическими, и имеют место представления (37), (39). Область эллиптичности уравнений (10) также шире области упругости (26).

В случае изотропного материала матрица (11) и уравнения (10) принимают вид

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & \mathrm{sym} \\ \lambda/\mu & (\lambda/\mu+2)^2 & \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \partial_{11}+\partial_{22} & (\lambda/\mu+1)\,\partial_{12} \\ (\lambda/\mu+1)\,\partial_{12} & \partial_{11}+(\lambda/\mu+2)^2\partial_{22} \end{bmatrix} u_j + F_i = 0$$

(λ, μ — постоянные Ламе), а определитель матрицы операторов следующий:

$$d = [\partial_{11} + (\lambda/\mu+2)\,\partial_{22}]^2.$$

При этом параметры α, β в уравнениях (33) равны [10]

$$\alpha = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}, \qquad \beta = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}, \qquad \alpha+\beta = 1.$$

Пусть $D = \operatorname{diag}(D_1,\ D_2)$ — диагональная матрица, где D_1, D_2 — множители в выражениях (31), (32), т. е. $d = D_1D_2$. Для вариантов (31а), (31б), (32) существуют матрицы C, B

$$C = \begin{bmatrix} \alpha_{111}\,\partial_1 + \alpha_{121}\,\partial_2 & \alpha_{112}\,\partial_1 + \alpha_{122}\,\partial_2 \\ \alpha_{211}\,\partial_1 + \alpha_{221}\,\partial_2 & \alpha_{212}\,\partial_1 + \alpha_{222}\,\partial_2 \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} \beta_{111}\,\partial_1 + \beta_{121}\,\partial_2 & \beta_{112}\,\partial_1 + \beta_{122}\,\partial_2 \\ \beta_{211}\,\partial_1 + \beta_{221}\,\partial_2 & \beta_{212}\,\partial_1 + \beta_{222}\,\partial_2 \end{bmatrix}, \qquad (41)$$

такие что выполняется соотношение

$$AC = BD, \tag{42}$$

где A — матрица операторов в (10). Так как $|A||C| = |B||D|$ и $|A| = |D| = d = D_1D_2$, то $|C| = |B|$. В [15] показано, что общее решение однородных уравнений (10) $Au = 0$ представляется в виде

$$u = C\varphi, \qquad D\varphi = f, \qquad Bf = 0. \tag{43}$$

Формулы $u = C\varphi$, $\varphi = B'\tilde{u}$, $A\tilde{u} = 0$ переводят решения уравнений $Au = 0$, $D\varphi = 0$ друг в друга. При этом $u = CB'\tilde{u}$ — формула производства новых решений, т. е. $Q = CB'$ — оператор симметрии [15].

Для выражения (31а) матрицы (41) имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} C = \begin{bmatrix} \alpha_{111}\,\partial_1 + a_1\beta_{121}\,\partial_2 & \alpha_{112}\,\partial_1 + a_2\beta_{122}\,\partial_2 \\ \alpha_{211}\,\partial_1 + a_1\psi_1\,\partial_2 & \alpha_{212}\,\partial_1 + a_2\psi_2\,\partial_2 \end{bmatrix}, \\ B = \begin{bmatrix} \alpha_{111}\,\partial_1 + \beta_{121}\,\partial_2 & \alpha_{112}\,\partial_1 + \beta_{122}\,\partial_2 \\ \alpha_{211}\,\partial_1 + A_{22}\psi_1\,\partial_2 & \alpha_{212}\,\partial_1 + A_{22}\psi_2\,\partial_2 \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{44}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \beta_{121} &= (A_{22} - a_1)\alpha_1 - (1 + A_{21})\alpha_2, & \alpha_{211} &= -(1 + A_{21})a_1\alpha_1 + (a_1 - 1)\alpha_2, \\ \alpha_{111} &= (a_1 - A_{22})\beta_1 - (1 + A_{21})a_1\beta_2, & \psi_1 &= -(1 + A_{21})\beta_1 + (1 - a_1)\beta_2, \\ \beta_{122} &= (A_{22} - a_1)\gamma_1 - (1 + A_{21})\gamma_2, & \alpha_{212} &= -(1 + A_{21})a_2\gamma_1 + (a_2 - 1)\gamma_2, \\ \alpha_{112} &= (a_2 - A_{22})\delta_1 - (1 + A_{21})a_2\delta_2, & \psi_2 &= -(1 + A_{21})\delta_1 + (1 - a_2)\delta_2, \end{aligned}$$

α_i, β_i, γ_i, δ_i — свободные параметры. Проводя непосредственную проверку, можно показать, что соотношение (42) для матриц (44) выполняется. Если $1 + A_{21} = 0$ ($A_{21} + A_{66}/2 = 0$), то система (10) уже является диагональной. Прямой $1 + A_{21} = 0$ на рис. 1 соответствует штриховая линия.

В случае если имеет место формула (32), матрицы (41) принимают вид

$$\begin{gathered} C = \begin{bmatrix} \alpha_{111}\,\partial_1 - \sqrt{A_{22}}\,\alpha_{211}\,\partial_2 & \alpha_{112}\,\partial_1 - \sqrt{A_{22}}\,\alpha_{212}\,\partial_2 \\ \alpha_{211}\,\partial_1 + \alpha_{111}\,\partial_2 & \alpha_{212}\,\partial_1 + \alpha_{112}\,\partial_2 \end{bmatrix}, \\ B = \begin{bmatrix} \alpha_{111}\,\partial_1 - \alpha_{211}\,\partial_2 & \alpha_{112}\,\partial_1 - \alpha_{212}\,\partial_2 \\ \alpha_{211}\,\partial_1 + \sqrt{A_{22}}\,\alpha_{111}\,\partial_2 & \alpha_{212}\,\partial_1 + \sqrt{A_{22}}\,\alpha_{112}\,\partial_2 \end{bmatrix}, \end{gathered} \tag{45}$$

при этом параметры $\alpha_{111}, \alpha_{211}, \alpha_{112}, \alpha_{212}$ остаются свободными. Определители матриц (45) совпадают:

$$|C| = |B| = (\alpha_{111}\alpha_{212} - \alpha_{211}\alpha_{112})(\partial_{11} + \sqrt{A_{22}}\,\partial_{22})$$

и не обращаются в нуль, если $\alpha_{111}\alpha_{212} - \alpha_{211}\alpha_{112} \neq 0$. Соотношение (42) также выполняется.

Для выражения (31б) матрицы (41) имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} C = \begin{bmatrix} \alpha_{111}\,\partial_1 + \sqrt{A_{22}}\,\beta_{121}\,\partial_2 & \alpha_{112}\,\partial_1 + \sqrt{A_{22}}\,\beta_{122}\,\partial_2 \\ \alpha_{211}\,\partial_1 + \alpha_{221}\,\partial_2 & \alpha_{212}\,\partial_1 + \alpha_{222}\,\partial_2 \end{bmatrix}, \\ B = \begin{bmatrix} \alpha_{111}\,\partial_1 + \beta_{121}\,\partial_2 & \alpha_{112}\,\partial_1 + \beta_{122}\,\partial_2 \\ \alpha_{211}\,\partial_1 + \sqrt{A_{22}}\,\alpha_{221}\,\partial_2 & \alpha_{212}\,\partial_1 + \sqrt{A_{22}}\,\alpha_{222}\,\partial_2 \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{46}$$

Здесь

$$\alpha_{211} = \frac{1}{1+A_{21}}\,\big[\big(1-\sqrt{A_{22}}\,\big)\beta_{121} + 2a_{12}\alpha_{111}\big],$$

$$\alpha_{221} = \frac{1}{1+A_{21}}\,\big[2a_{12}\beta_{121} + \big(\sqrt{A_{22}}-1\big)\alpha_{111}\big],$$

$$\alpha_{212} = \frac{1}{1+A_{21}}\,\big[\big(1-\sqrt{A_{22}}\,\big)\beta_{122} - 2a_{12}\alpha_{112}\big],$$

$$\alpha_{222} = \frac{1}{1+A_{21}}\,\big[-2a_{12}\beta_{122} + \big(\sqrt{A_{22}}-1\big)\alpha_{112}\big],$$

коэффициенты α_{111}, β_{121}, α_{112}, β_{122} остаются произвольными, а соотношение (42) также выполняется.

При построении матриц (41) некоторые коэффициенты в (44)–(46) остаются свободными, за счет чего можно получать различные формы представления (43) смещений через квазигармонические функции φ_1, φ_2. Приведем некоторые примеры.

Для варианта (31а) из (44) можно получить матрицы C, B в виде

$$C = \begin{bmatrix} \partial_1 & \partial_1 \\ k_1\,\partial_2 & k_2\,\partial_2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \partial_1 & \partial_1 \\ a_2k_1\,\partial_2 & a_1k_2\,\partial_2 \end{bmatrix},$$

$$|C| = |B| = \frac{a_2-a_1}{1+A_{21}}\,\partial_{12}, \qquad k_1 = \frac{a_1-1}{1+A_{21}}, \qquad k_2 = \frac{a_2-1}{1+A_{21}},$$

или

$$C = \begin{bmatrix} -a_1k_2\,\partial_2 & -a_2k_1\,\partial_2 \\ \partial_1 & \partial_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -k_2\,\partial_2 & -k_1\,\partial_2 \\ \partial_1 & \partial_1 \end{bmatrix}, \quad |C| = |B| = \frac{a_1-a_2}{1+A_{21}}\,\partial_{12},$$

или

$$C = \begin{bmatrix} \partial_1 & -a_2k_1\,\partial_2 \\ k_1\,\partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \partial_1 & -k_1\,\partial_2 \\ a_2k_1\,\partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix}, \quad |C| = |B| = \partial_{11} + a_2k_1^2\,\partial_{22},$$

или

$$C = \begin{bmatrix} -a_1k_2\,\partial_2 & -\partial_1 \\ \partial_1 & -k_2\,\partial_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -k_2\,\partial_2 & -\partial_1 \\ \partial_1 & -a_1k_2\,\partial_2 \end{bmatrix}, \quad |C| = |B| = \partial_{11} + a_1k_2^2\,\partial_{22}.$$

При этом функции φ_1, φ_2 удовлетворяют уравнениям

$$(\partial_{11} + a_1\,\partial_{22})\varphi_1 = f_1, \qquad (\partial_{11} + a_2\,\partial_{22})\varphi_2 = f_2, \qquad Bf = 0, \qquad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}.$$

Для варианта (32) из (45) можно получить матрицы C, B в виде

$$C = \begin{bmatrix} \partial_1 & -\sqrt{A_{22}}\,\partial_2 \\ \partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \partial_1 & -\partial_2 \\ \sqrt{A_{22}}\,\partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix},$$

или

$$C = \begin{bmatrix} \sqrt{A_{22}}\,\partial_2 & \partial_1 \\ -\partial_1 & \partial_2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \partial_2 & \partial_1 \\ -\partial_1 & \sqrt{A_{22}}\,\partial_2 \end{bmatrix}, \quad |C| = |B| = \partial_{11} + \sqrt{A_{22}}\,\partial_{22}.$$

При этом функции φ_1, φ_2 удовлетворяют уравнениям

$$(\partial_{11} + \sqrt{A_{22}}\,\partial_{22})\varphi_1 = f_1, \qquad (\partial_{11} + \sqrt{A_{22}}\,\partial_{22})\varphi_2 = f_2, \qquad Bf = 0.$$

Для варианта (31б) из (46) можно получить матрицы C, B в виде

$$C = \begin{bmatrix} \partial_1 + m_2\sqrt{A_{22}}\,\partial_2 & \partial_1 - m_2\sqrt{A_{22}}\,\partial_2 \\ -m_1\,\partial_1 & m_1\,\partial_1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \partial_1 + m_2\,\partial_2 & \partial_1 - m_2\,\partial_2 \\ -m_1\,\partial_1 & m_1\,\partial_1 \end{bmatrix},$$

$$|C| = |B| = 2m_1\,\partial_{11}, \qquad m_1 = -\frac{1 + A_{21}}{2a_{12}}, \qquad m_2 = \frac{1 - \sqrt{A_{22}}}{2a_{12}}.$$

При этом функции φ_1, φ_2 удовлетворяют уравнениям

$$(\partial_{11} + 2a_{12}\,\partial_{12} + \sqrt{A_{22}}\,\partial_{22})\varphi_1 = f_1, \quad (\partial_{11} - 2a_{12}\,\partial_{12} + \sqrt{A_{22}}\,\partial_{22})\varphi_2 = f_2, \quad Bf = 0.$$

Приведенные примеры не исчерпывают все возможности выбора матриц (44)–(46) для представления смещений $u = C\varphi$ через квазигармонические функции φ_1, φ_2, удовлетворяющие уравнениям $D_1\varphi_1 = f_1$, $D_2\varphi_2 = f_2$, $Bf = 0$. При решении конкретных задач за счет наличия свободных параметров в матрицах (44)–(46) можно также упростить краевые условия в смещениях или напряжениях.

Таким образом, использование изложенного выше подхода позволяет свести двумерную задачу линейной теории упругости для произвольного анизотропного материала к решению уравнений (10) или (33) с двумя каноническими модулями. При этом с помощью соотношений (31а), (31б), (32) или (37), (39) и (42) системы уравнений (10) или (33) приводятся к диагональному виду, а их общее решение представляется в виде (43) через квазигармонические функции φ_1, φ_2 (см. приведенные выше примеры). Изотропный материал соответствует соотношениям (32), (45), причем из них непосредственно следует представление смещений через комплексные потенциалы Колосова — Мусхелишвили. Другие подходы к построению решения уравнений (9) рассматриваются в [16].

В трехмерном случае с помощью преобразований (2), (4) также можно упростить уравнения (1), а матрицу модулей упругости A_{ij} с 21 независимой компонентой привести к матрице с 12 независимыми каноническими модулями. Обобщая уравнения (17) на трехмерный случай, можно показать, что существует ортогональная система координат (ортогональное преобразование n_{ik}, $n_{ik}n_{il} = \delta_{kl}$), в которой $A_{42} = 0$, $A_{43} = 0$, $A_{51} = 0$, $A_{53} = 0$, $A_{61} = 0$, $A_{62} = 0$. Это означает, что при произвольной анизотропии имеется не более 15 независимых модулей упругости, а не 21 модуль, как считалось ранее. Ниже приведен один из вариантов канонической матрицы с 12 модулями:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ A_{21} & 1 & & & \text{sym} & \\ A_{31} & A_{32} & 1 & & & \\ A_{41} & 0 & 0 & A_{44} & & \\ 0 & A_{52} & 0 & A_{54} & A_{55} & \\ 0 & 0 & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix}.$$

Из вида этой матрицы следует, что предположение в [6] о конгруэнтности (эквивалентности) произвольной матрицы модулей упругости A_{ij} матрице модулей материала моноклинной симметрии не выполняется. Матрица A_{ij} указанного выше вида приведена в работах [17, 18]. Решение уравнений (1) в трехмерном случае также представляется через три независимые квазигармонические функции, т. е. система (1) приводится к диагональному виду.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Остросаблин Н. И.** Об аффинных преобразованиях уравнений линейной теории упругости // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 4. С. 124–134.
2. **Колокольчиков В. В.** Об анизотропии, сводящейся при решении задач преобразованиями тензоров к фиктивной изотропии // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 3. С. 567–570.
3. **Menditto G., Quattrini L., Tarantino A. M.** The contact problem for a class orthotropic elastic solids // J. Elast. 1993. V. 33, N 2. P. 167–190.
4. **Milton G. W., Movchan A. B.** A correspondence between plane elasticity and the two-dimensional real and complex dielectric equations in anisotropic media // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1995. V. 450, N 1939. P. 293–317.
5. **Pouya A., Zaoui A.** A transformation of elastic boundary value problems with application to anisotropic behavior // Intern. J. Solids Struct. 2006. V. 43, N 16. P. 4937–4956.
6. **Лангер С., Назаров С. А., Шпековиус-Нойгебауер М.** Аффинные преобразования трехмерных анизотропных сред и явные формулы для фундаментальных матриц // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 2. С. 95–102.
7. **Pouya A.** Green's function solution and displacement potentials for transformed transversely isotropic materials // Europ. J. Mech. A. Solids. 2007. V. 26, N 3. P. 491–502.
8. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
9. **Остросаблин Н. И.** Каноническая форма уравнений плоской статической задачи анизотропной упругости // Проблемы механики сплошных сред и физики взрыва: Тез. докл. Всерос. конф., посвящ. 50-летию Ин-та гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, 17–22 сент. 2007 г. Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 2007. С. 136.
10. **Olver P. J.** Canonical elastic moduli // J. Elast. 1988. V. 19, N 3. P. 189–212.
11. **Алфутова Н. Б., Мовчан А. Б., Назаров С. А.** Алгебраическая эквивалентность плоских задач для ортотропных и анизотропных сред // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1991. Вып. 3. С. 64–68.
12. **Куликов А. А., Назаров С. А., Нарбут М. А.** Аффинные преобразования в плоской задаче анизотропной теории упругости // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2000. Вып. 2. С. 91–95.
13. **Li X., Xu B., Wang M.** On the canonical elastic moduli of linear plane anisotropic elasticity // J. Elast. 2006. V. 85, N 1. P. 107–117.
14. **Федоров Ф. И.** Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965.
15. **Остросаблин Н. И.** Операторы симметрии и общие решения уравнений линейной теории упругости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 5. С. 98–104.
16. **Gao X.-L., Rowlands R. E.** On displacement methods in planar anisotropic elasticity // Mech. Res. Comm. 2000. V. 27, N 5. P. 553–560.
17. **Остросаблин Н. И.** Собственные операторы и векторы для системы дифференциальных уравнений линейной теории упругости анизотропных материалов // Докл. РАН. 1994. Т. 337, № 5. С. 608–610.
18. **Остросаблин Н. И.** Упругий анизотропный материал с чисто продольными и поперечными волнами // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 2. С. 143–151.

Поступила в редакцию 18/VI 2009 г.