

**ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ  
ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ТОЧКОЙ ПЕРЕГИБА  
ПРОФИЛЯ СКОРОСТИ***А. М. Сагалаков, В. Н. Штерн**(Новосибирск)*

Получены энергетические оценки критических чисел Рейнольдса для ряда течений, имеющих профиль скорости с точкой перегиба. Рассмотрены течения с кубическим профилем скорости, свободная затопленная струя и струя в канале. Обнаружено, что энергетические оценки не более чем в 2-3 раза меньше соответствующих критических чисел Рейнольдса, рассчитанных по линейной теории.

1. Существует два подхода к исследованию устойчивости ламинарных стационарных течений [1]. В линейной теории устойчивости рассматривается поведение малых возмущений и изучаются условия, при которых эти возмущения нарастают со временем. Энергетический метод позволяет определить, при каких условиях произвольные возмущения монотонно затухают. Оба эти подхода позволяют выделить диапазон параметров между областями явной устойчивости и явной неустойчивости, внутри которого осуществляется переход от ламинарного режима к турбулентному или к другому ламинарному режиму течения. Для напорных течений в трубах и каналах этот «теоретический диапазон» оказывается большим. Так, например, для течения Пуазейля в плоском канале энергетический анализ дает  $R_*^* = 49.9$  [2], линейная теория —  $R_*^\circ = 5772$  [3], в то время как экспериментальные значения критического числа Рейнольдса  $R_* \sim 1000$  (число Рейнольдса определяется здесь по полуширине канала и максимальной скорости потока). В этих примерах характерно так называемое «парадоксальное» действие вязкости, т. е. вязкость здесь не только приводит к диссипации энергии, но и способствует возникновению нарастающих волн Толлмина — Шлихтинга. Дело обстоит иначе, если неустойчивость обусловлена дестабилизирующим влиянием определенных массовых сил. Например, для конвективной неустойчивости течения жидкости, подогреваемой снизу [4], критические параметры, рассчитанные энергетическим методом, оказываются величинами того же порядка, что и даваемые линейной теорией. В работе [5], где рассматривалась тейлоровская неустойчивость течений между вращающимися соосными цилиндрами, в ряде случаев вообще не получено различия между  $R_*^*$  и  $R_*^\circ$ .

Данная работа посвящена энергетическому анализу устойчивости ряда плоскопараллельных течений с профилями скорости, имеющими точку перегиба. Здесь характерна невязкая неустойчивость, а вязкость оказывает обычное стабилизирующее воздействие. Величины  $R_*^\circ$  сравнительно невелики, и поэтому априори можно ожидать, что энергетические оценки критических чисел Рейнольдса не будут сильно отличаться от результатов линейного анализа. Для ряда искусственных профилей в работе [6] значения  $R_*^\circ$  были в 3—4 раза больше соответствующих величин  $R_*^*$ .

Энергетический анализ устойчивости, выполненный впервые Орром [7] и обоснованный Серрином [8], состоит в том, что рассматривается урав-

нение для энергии произвольного возмущения. В случае вязкой жидкости оно имеет вид

$$\frac{\partial E}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{v_i v_i}{2} d\Omega = - \int v_i v_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} d\Omega - \frac{1}{R} \int \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega \quad (1.1)$$

Здесь переменные даны в безразмерной форме,  $U_i$  и  $v_i$  — соответственно компоненты основного поля скорости и поля возмущений. Интегрирование проводится по некоторому характерному объему, на поверхности которого возмущения скорости обращаются в нуль. Далее полагается, что  $v_i$ , вообще говоря, не есть решение уравнения для возмущений, а некоторое произвольное поле скоростей, удовлетворяющее упомянутым граничным условиям и требованию неразрывности

$$\partial v_i / \partial x_i = 0$$

Такое поле называется пробным. Серрин показал, что если  $R$  меньше определенной величины, то  $\partial E / \partial t < 0$  для любого пробного поля скорости. В этих условиях энергия любого возмущения будет монотонно убывать со временем. Целью энергетического анализа является определение того наименьшего числа Рейнольдса  $R_*^*$ , при котором  $\partial E / \partial t$  для некоторого пробного поля (или некоторых пробных полей) впервые обратится в нуль. Иными словами, требуется найти  $R$ , при котором

$$\max_{v_i} \partial E / \partial t = 0$$

При  $R = R_*^*$  энергия произвольного возмущения будет строго монотонно уменьшаться, за исключением отдельных моментов времени, когда  $\partial E / \partial t = 0$ . Уравнения Эйлера — Лагранжа для этой вариационной задачи имеют вид

$$\Delta v_i = \frac{R}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) v_j + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь  $\varphi$  — множитель Лагранжа, являющийся аналогом гидродинамического давления.

2. Переходя к случаю плоского канала и производя преобразования Фурье по координатам  $x$  и  $z$  (направление оси  $x$  совпадает с направлением потока), получим задачу на собственные значения  $R$

$$\begin{aligned} u'' - k^2 u &= 1/2 R U' v + i \alpha \lambda, & v'' - k^2 v &= 1/2 R U' u + \lambda' \\ w'' - k^2 w &= i \beta \lambda & (-1 \leq y \leq 1) \\ i \alpha u + i \beta w + v' &= 0 & (u(\pm 1) = v(\pm 1) = w(\pm 1) = 0) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $u, v, w, \lambda$  — фурье-образы  $v_i$  и  $\varphi$  компонент  $(x, y, z)$ ;  $\alpha, \beta, k$  — соответственно  $x$  и  $z$ -компоненты волнового вектора и его модуль, штрих означает дифференцирование по  $y$ . Систему (2.1) удобно свести к одному уравнению. Вводя угол  $\theta$  между вектором скорости основного течения и волновым вектором возмущения (при этом  $\alpha = k \cos \theta, \beta = k \sin \theta$ ), получим

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) \left[ \frac{1}{U'} \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right)^2 v + i k R \cos \theta \left( v' + \frac{U''}{2U'} v \right) \right] + \frac{k^2 R^2 \sin^2 \theta}{4} U' v = 0 \quad (2.2)$$

$$v = v' = v'''' - 2k^2 v'' = 0 \quad \text{при } y = \pm 1$$

Перечислим некоторые полезные свойства задачи.

1. Существуют только вещественные собственные значения  $R$ . Чтобы убедиться в этом, достаточно умножить первые три уравнения (2.1) на  $u^*$ ,  $v^*$ ,  $w^*$  соответственно (здесь \* означает комплексное сопряжение), сложить их и проинтегрировать по  $y$  на всем интервале.

2. Наряду с собственным значением  $R$  и собственной функцией  $v$  существует и собственное значение  $-R$  с собственной функцией  $v^*$ . Чтобы убедиться в этом, достаточно провести комплексное сопряжение в (2.2). Таким образом, имеет смысл говорить только о поиске минимума модуля собственного значения  $R$ .

3. Достаточно изучить поведение  $R$  в квадранте  $0 \leq \theta \leq 1/2 \pi$  ( $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ), поскольку из (2.2) видно, что смена знака  $\theta$ , а также изменение  $\theta$  на  $\pi$  с последующим комплексным сопряжением (2.2) приводят к одной и той же спектральной задаче.

4. При  $k \ll 1$  собственные значения  $R \sim 1/k$ . В этом можно убедиться, вводя  $R_+ = kR$  и затем пренебрегая членами, содержащими  $k$  в (2.2).

5. Более детального обсуждения заслуживает случай  $k \gg 1$ . Проводя преобразования  $R = kR^+$ ,  $y_+ = ky$  и затем устремляя величину  $k$  к бесконечности, получим из (2.2)

$$\left(\frac{d^2}{dy_+^2} - 1\right) \left[ \frac{1}{U_+'} \left(\frac{d^2}{dy_+^2} - 1\right)^2 v_+ + iR^+ \cos \theta \left(v_+' + \frac{U_+''}{2U_+'} v_+\right) \right] + \frac{R^{+2} \sin^2 \theta}{4} U_+' v_+ = 0$$

$$v_+ = v_+' = v_+''' - 2v_+'' = 0 \quad \text{при } y_+ = \pm \infty \quad (2.3)$$

$$v_+ = v(y_+), \quad U_+ = U(y_+)$$

Если задача на собственные значения (2.3) имеет нетривиальные решения, то при  $k \gg 1$  асимптотически  $R \sim k$ . Однако в некоторых случаях уравнение (2.3) имеет только тривиальное решение и модуль  $R$  с ростом  $k$  увеличивается быстрее, чем по линейному закону.

Последние два свойства указывают на то, что  $R$  достигает минимума при  $k \sim 1$ , т. е. когда волновое число порядка обратного характерного размера задачи (имеются в виду умеренные значения  $U'$ ).

3. В области  $k \sim 1$  вплоть до выхода  $R$  на асимптотические зависимости при малых и больших  $k$  расчеты собственных значений проводились численно. При больших  $R$  в уравнении (2.2) появляется малый параметр при старшей производной, что приводит к обычным в таких случаях трудностям. Хотя энергетические оценки  $R_{**}$ , как правило, сравнительно невелики, следует иметь в виду, что в (2.2) есть член с  $R^2$ . Для детального спектрального анализа вообще желательно иметь универсальный численный метод, пригодный как при малых, так и при больших  $R$ . Этим условиям удовлетворяет метод дифференциальной прогонки [9]. Проведение массовых расчетов собственных значений на ЭВМ требует выбора экономной схемы прогонки. Стандартный вариант [9], для уравнения (2.2) приводит к весьма громоздким правым частям в системе уравнений для прогоночных коэффициентов. М. А. Гольдштиком и В. А. Сапожниковым был предложен следующий подход в близкой по характеру задаче. Способ прогонки не связывается с видом граничных условий, а находится из требования наибольшей простоты системы дифференциальных уравнений для прогоночных коэффициентов. Начальные данные для этой системы получаются с помощью интегрирования исходного линейного уравнения на малом интервале от граничных точек. Применительно к уравнению (2.2) эти предложения реализуются следующим образом.

Введем в рассмотрение функцию

$$\psi = \frac{2}{RU'} \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right)^2 v - 2i\alpha \left( v' - \frac{U''}{2U'} v \right) \quad (3.1)$$

В силу граничных условий (2.2)  $\psi(\pm 1) = 0$ . Прогоночную схему определим соотношением

$$\begin{pmatrix} v'' \\ \psi \\ \psi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v' \\ v'' \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Систему дифференциальных уравнений для  $A_{ij}$  получим, дифференцируя (3.1) и используя (2.2) и (3.1). Она имеет вид

$$\begin{aligned} A_{11}' &= \frac{1}{2}RU'A_{21} - A_{11}A_{13} + \frac{1}{2}i\alpha RU'' - k^2 \\ A_{12}' &= \frac{1}{2}RU'A_{22} - A_{11} - A_{12}A_{13} - i\alpha RU' \\ A_{13}' &= \frac{1}{2}RU'A_{23} - A_{12} - A_{13}^2 + 2k^2 \\ A_{21}' &= A_{31} - A_{11}A_{33}, \quad A_{22}' = A_{32} - A_{21} - A_{12}A_{23} \\ A_{23}' &= A_{33} - A_{22} - A_{13}A_{23} \\ A_{31}' &= k^2A_{21} - A_{11}A_{33} - \frac{1}{2}\beta^2RU' \\ A_{32}' &= k^2A_{22} - A_{31} - A_{12}A_{33}, \quad A_{33}' = k^2A_{23} - A_{32} - A_{13}A_{33} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для системы (3.3) рассматривается задача Коши. Начальные условия вблизи граничных точек определяются с помощью (2.5) и (2.2). Обозначая ниже результаты интегрирования (3.3) от одной граничной точки индексом плюс, а от другой — индексом минус, получим характеристическое уравнение для  $R$

$$F(R) \equiv \det(A_+ - A_-) = 0$$

в любой внутренней точке интервала  $(-1, 1)$ . В ряде случаев полезно в качестве такой точки выбрать корень уравнения  $U'(y) = 0$ , если он лежит внутри интервала, поскольку эта точка является аналогом критической точки в линейной теории гидродинамической устойчивости. Для симметрических профилей  $U$  достаточно рассмотреть симметричные и антисимметричные решения (2.2). В этом случае характеристическим уравнением служит

$$F(R) \equiv A_{32}(A_{11}A_{23} - A_{13}A_{21}) = 0$$

на оси канала  $y = 0$ . Для антисимметрических решений  $A_{32} = 0$ , в симметричном случае в нуль обращается выражение в скобках.

Первоначально при некоторых значениях  $k$  и  $\theta$  находился наименьший положительный корень  $F(R) = 0$ , а затем по непрерывности строилась достаточно густая сетка  $R(k, \theta)$  и определялась величина и положение минимума этой функции. В случае необходимости эти параметры уточнялись. Численный анализ не обнаружил пересечения спектральных ветвей для рассмотренных течений.

Расчеты проводились на БЭСМ-6. Собственные значения находились с заданной точностью (три значащие цифры).

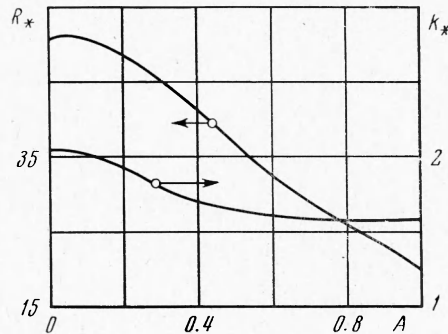
Расчет устойчивости течения Куэтта—Пуазейля

$$U = (1 - A)(1 - y^2) + Ay$$

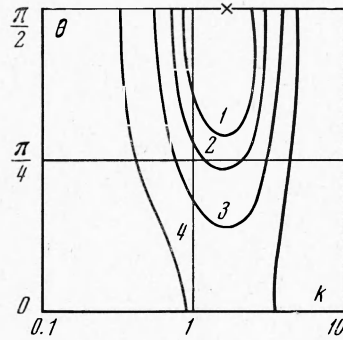
носил в основном контрольный характер для проверки применяемого

численного метода. В случае течения Пуазейля ( $A = 0$ ) вычисления дали  $R_*^* = 49.9$ ,  $k_* = 2.04$ , что совпадает с полученными ранее результатами [2], а для течения Куэтта ( $A = 1$ ) было найдено  $R_*^* = 20.6$ ,  $k_* = 1.56$ , как и в [4]. На фиг. 1 представлены зависимости  $R_*(A)$  (кривая 1) и  $k_*(A)$  (кривая 2). Энергетические оценки  $R_*$  с ростом  $A$  уменьшаются в отличие от результатов линейной теории [10] (при небольших  $A$  все же имеет место увеличение  $\tilde{R}_*$ , однако оно весьма незначительное). Во всех рассмотренных здесь и ниже случаях минимум  $R$  достигается при  $\theta = \pi/2$ , т. е. наиболее «опасными» являются возмущения, волновой вектор которых перпендикулярен вектору скорости основного течения. Аналитического доказательства этого факта, однако, не получено.

4. Примером плоскопараллельного несимметричного течения с точкой перегиба в профиле скорости служит течение вязкой теплопроводной



Фиг. 1



Фиг. 2

жидкости, заключенной между вертикальными параллельными плоскостями, нагретыми до разных температур. Профиль скорости имеет вид

$$U = y - y^3$$

Если числа Прандтля малы, при анализе устойчивости можно ограничиться чисто гидродинамическими возмущениями. В рамках линейной теории этот анализ проведен в [11] и позднее в [12]. Критические параметры таковы:  $R_*^{\circ} = 82$ ,  $\alpha_* = k_* = 1.32$ .

Энергетический анализ дает  $R_*^* = 29$ ,  $\beta_* = k_* = 1.8$ . Если рассматривать только двумерные возмущения, то  $R_*^* = 58$ ,  $\alpha_* = 1.9$ . На фиг. 2 приведены линии уровня  $R(k, \theta) = \text{const}$ . Звездочкой здесь отмечено положение минимума  $R$ . Линии уровня (кривые 1, 2, 3, 4) соответствуют  $R = 35, 40, 50, 80$ . Картина линий уровня типична для всех рассматриваемых в этой работе течений.

Критические числа  $\tilde{R}_*^{\circ}$  и  $R_*^*$  отличаются менее чем в три раза, тогда как для напорных течений разница составляет несколько порядков. Экспериментальные измерения [12], которые проводились при числе Прандтля  $P = 0.71$ , дали  $R_* = 91 (1 \pm 0.1)$ ,  $k_* = 1.37$ , что несколько превышает данные линейной теории. Это может быть связано с погрешностями опыта.

Еще меньшие расхождения между  $R_*^*$  и  $R_*^{\circ}$  получаются для течений струйного типа.

Рассмотрим устойчивость течения

$$U = 1 - \text{th}^2 y \quad (-a \leq y \leq a) \quad (4.1)$$



Профиль скорости (4.1) представляет собой автомодельное решение Шлихтинга для плоской затопленной струи. Граничными условиями для возмущений здесь по-прежнему служат условия прилипания при  $y = \pm a$ . Это течение, которое условно назовем струей в канале, здесь рассматривается как модель симметричного течения с точкой перегиба профиля скорости. Число Рейнольдса, как видно из (4.1), определено по полуширине струи и максимальной скорости.

На фиг. 3 представлен ряд результатов для случая  $a = 6$ . Кривая 1 — зависимость  $R(k)$ , рассчитанная энергетическим методом при  $\theta = 1/2\pi$ . Кривая 2 соответствует плоским возмущениям ( $\theta = 0$ ). Зависимость  $R(k)$  при  $\theta = 1/2\pi$ , следующей спектральной ветви (антисимметричные по  $v$  возмущения), изображается кривой 3. С целью сравнения на фиг. 3 (кривая 4) приведена нейтральная кривая, рассчитанная по линейной теории устойчивости. Она соответствует возмущениям с  $\theta = 0$ ; в силу теоремы Сквайра [1] в линейном случае они являются наиболее опасными. Приведем значения критических параметров для сопоставления. Энергетический метод ( $\theta = 1/2\pi$ , абсолютный минимум) дает  $\bar{R}_* = 3.7$ ,  $k_* = 0.327$ , энергетический метод ( $\theta = 0$ ) —  $R_* = 4.75$ ,  $k_* = 0.345$ , линейная теория ( $\theta = 0$ ) —  $\bar{R}_* = 6.25$ ,  $k_* = 0.46$ .

Асимптотическое поведение  $R(k)$ , определяемое энергетическим методом, имеет общий вид для всех рассмотренных спектральных ветвей и для всех  $\theta$ . При малых  $k$  согласно свойству 4 (см. п. 2)  $R$  обратно пропорционально  $k$ . В случае больших  $kR$  возрастает быстрее, чем по линейному закону. Здесь  $R$  примерно пропорционально  $k^2$ . Минимальное значение  $R$  для антисимметричных возмущений, равное 6.1, достигается при  $k = 0.4$ , т. е. при несколько большем волновом числе в сравнении со случаем симметричных возмущений. При больших  $k$  различие в числах Рейнольдса для симметричных и антисимметричных возмущений стремится к нулю. Это свидетельствует о том, что коротковолновые возмущения практически отличны от нуля лишь в некоторой подобласти интервала  $-1 \leq y \leq 1$ , и эта подобласть не захватывает точки  $y = 0$ , так что условия симметрии или антисимметрии на оси несущественны.

Расчеты показали, что энергетические оценки критического числа Рейнольдса существенно зависят от отношения ширины канала к ширине струи  $a$  и при  $a \rightarrow \infty$  число Рейнольдса стремится к нулю. На фиг. 4 представлена зависимость  $R_*(a)$  (кривая 1) в диапазоне  $5 \leq a \leq 100$ . При  $a > 10$  приближенно выполняется соотношение  $R_* \sim a^{-0.55}$ . Характерно, что зависимость критического волнового числа от  $a$  (кривая 3) имеет вид  $k_* \sim 1/a$ , т. е. волновое число, рассчитанное по полуширине канала с утоньшением струи, остается постоянным и равным примерно 2.43, в то время как число Рейнольдса  $aR$ , рассчитанное по полуширине канала с утоньшением струи, растет. Для достаточно больших волновых чисел собственное значение  $R$  уже не зависит от ширины канала. Расщепление кривых  $R(k)$  по  $a$  в рассматриваемом диапазоне при  $k > 1$  не наблюдается. Это свидетельствует о том, что подобласть, где практически отличны от нуля коротковолновые возмущения, не захватывает граничных точек и сосредоточена, по-видимому, в окрестности точки перегиба профиля скорости. Но критические числа  $\bar{R}_*$  в данном случае соответствуют слишком малым  $k$  и зависят от ширины канала.

Поскольку критические возмущения «чувствуют» стенки канала, т. е. для них существенно, на каком расстоянии поставлены граничные условия, то, видимо, и характер граничных условий должен сказываться на результатах.

Интересно рассмотреть струю в безграничном пространстве, тем более что ей посвящен ряд работ по линейной теории устойчивости. За основу

и здесь берется автомодельное решение Шлихтинга для струи

$$U(y) = \begin{cases} 1 - \text{th}^2 a & (y \leq -a) \\ 1 - \text{th}^2 y & (-a \leq y \leq a) \\ 1 - \text{th}^2 a & (y \geq a) \end{cases}$$

Граничные условия ставятся на бесконечности и сводятся к требованию затухания. Их можно снести к  $y = \pm a$ . При  $|y| > a$   $U' = 0$  в систему (2.1), исключая  $\lambda$ , можно привести к виду

$$v'''' - 2k^2 v'' + k^4 v = 0, \quad u'' - k^2 u = \frac{i\alpha}{k^2} (v'''' - k^2 v'') \quad (4.2)$$

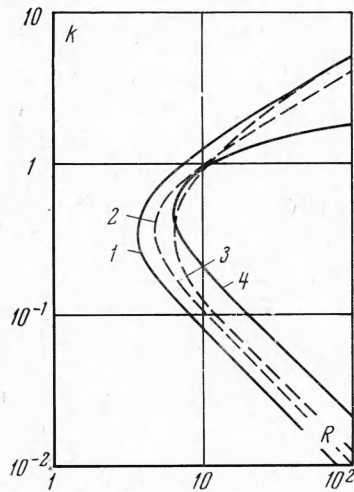
Легко видеть, что найдутся три линейно-независимые решения (4.2), затухающие на бесконечности. Например, для  $y < -a$  имеем

$$v = e^{ky}, \quad u = 0 \quad (4.3)$$

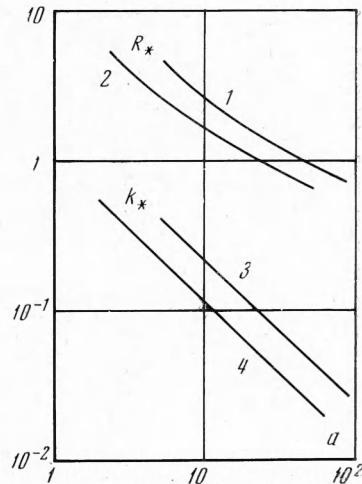
$$v = ye^{ky}, \quad u = \frac{i\alpha}{k} ye^{ky} \quad (4.4)$$

$$v = 0, \quad u = e^{ky} \quad (4.5)$$

Эти фундаментальные решения можно использовать для вычисления прогоночных коэффициентов  $A_{ij}$ , продолжая их внутрь интервала в соот-



Фиг. 3



Фиг. 4

ветствии (2.2) и решая (3.2) в точке  $y = -a + \epsilon$ , где  $\epsilon$  — некоторая малая величина (см. п. 2).

На фиг. 4 представлены зависимости  $R_*(a)$  (кривая 2) и  $k_*(a)$  (кривая 4) в случае свободной струи. Критические числа Рейнольдса получаются примерно в полтора раза меньше, чем для струи в канале. Величины  $k_*$  по-прежнему убывают обратно пропорционально  $a$ , причем  $k_* a = 1.24$ . Характерно, что при  $a \rightarrow \infty$  относительная разница в результатах по  $R_*$  и  $k$  для свободной струи и струи в канале не стремится к нулю.

Линейный анализ также обнаруживает зависимость  $R_*^\circ$  от  $a$ .

Так, в работе [13] при  $a = 3$  получено  $R_*^\circ = 7.5$ , а в [14] при  $a = 6$   $R_*^\circ = 4$ . Энергетический метод в этих случаях дает  $R_*^* = 3.9$  при  $a = 3$ ,  $R_*^* = 2.2$  при  $a = 6$ .

На основе проведенного анализа можно заключить, что для ряда течений с профилями скорости, имеющими точку перегиба, критические числа Рейнольдса, рассчитанные энергетическим способом, меньше соответствующих величин  $R_{*}^{\circ}$  не более чем в 2-3 раза. Таким образом, в этих случаях энергетический метод совместно с линейной теорией позволяет получить оценки критических чисел Рейнольдса, удовлетворительные для ряда технических приложений.

Авторы благодарят М. А. Гольдштика за внимание к работе.

Поступила 4 I 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.
2. Joseph D. D., Carmi S. Stability of poiseuille flow in pipes, annuli and channels. *Quart. Appl. Math.*, 1969, vol. 26, No. 4.
3. Сапожников В. А., Штерн В. Н. Численный анализ устойчивости плоского течения Пуазейля. ПМТФ, 1969, № 4.
4. Joseph D. D. Nonlinear stability of the Boussinesq equations by the method of energy. *Arch. Ration. Mech. and Analysis*, 1966, vol. 22, No. 3, pp. 163—184.
5. Joseph D. D., Munson B. R. Global stability of spiral flow. *J. Fluid Mech.*, 1970, vol. 43, pt 3.
6. Carmi S. Energy stability of channel flows. *ZAMP*, 1969, Bd 20, Nr 4.
7. Orr W. McF. The stability or instability of the steady motions of a liquid. *Proc. Roy. Irish Acad., Ser. A*, 1907, vol. 27, pp. 69—138.
8. Serrin J. On the stability of viscous fluid motions. *Arch. Ration. Mech. and Analysis*, 1959, vol. 3, No. 1.
9. Сапожников В. А. Решение задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений методом прогонки. Труды Всес. семинара по числ. методам механики вязкой жидкости, т. 2, Канев, 1968; Новосибирск, «Наука», 1969.
10. Pötte M. C. Stability of plane Couette—Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 1966, vol. 24, pt 3.
11. Бирх Р. В. О малых возмущениях плоскопараллельного течения с кубическим профилем скорости. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
12. Vest C. M., Aspraci V. S. Stability of natural convection in a vertical slot. *J. Fluid Mech.*, 1969, vol. 36, pt 1.
13. Супруненко И. П. Устойчивость струйных течений. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4.
14. Ko Sung Hwan, Lessen M. Viscous instability of an incompressible full jet. *Phys. Fluids*, 1969, vol. 12, No. 11.