

УДК 519.676

Анализ влияния случайных шумов на странные аттракторы методом Монте-Карло на суперкомпьютерах*

С.С. Артемьев^{1,2}, А.А. Иванов¹

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

²Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090
E-mails: ssa@osmf.sccc.ru (Артемьев С.С.), brpp@mail.ru (Иванов А.А.)

Артемьев С.С., Иванов А.А. Анализ влияния случайных шумов на странные аттракторы методом Монте-Карло на суперкомпьютерах // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 2. — С. 121–134.

В работе численно исследуется влияние случайных шумов на поведение траекторий странных аттракторов, задаваемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Возникающие при этом стохастические дифференциальные уравнения решаются обобщенным методом Эйлера. Приводятся результаты численных экспериментов, проведенных на кластере НКС–30Т Сибирского суперкомпьютерного центра при ИВМиМГ СО РАН, с использованием комплекса программ PARMONC. Для анализа численных решений используются частотные характеристики, обобщающие интегральную кривую и фазовый портрет.

DOI: 10.15372/SJNM20150202

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, частотная интегральная кривая, частотный фазовый портрет, обобщенный метод Эйлера, странные аттракторы.

Artemiev S.S., Ivanov A.A. Analysis of the effect of random noise on the strange attractors of Monte Carlo on a supercomputer // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2015. — Vol. 18, № 2. — P. 121–134.

In this paper, we numerically investigate the influence of random noise on the behavior of the trajectories of strange attractors defined by a system of ordinary differential equations. The resulting stochastic differential equations are solved by the generalized Euler method. The results of numerical experiments conducted on a cluster of NKS–30T Siberian Supercomputer Center at ICMMG using the program package PARMONC. For the analysis of the numerical solutions, the frequency characteristics of generalizing the integral curve and the phase portrait are used.

Keywords: stochastic differential equations, cumulative frequency curve, frequency phase portrait, generalized Euler's method, strange attractors.

Наиболее сложными для всех методов анализа свойств решений стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) являются нелинейные стохастические колебания, возникающие в странных аттракторах под воздействием случайных шумов. При этом случайные возмущения могут быть как внешними с постоянной интенсивностью (аддитивные шумы в СДУ), так и внутренними параметрическими с переменной интенсивностью

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00340а).

(мультипликативные шумы), обычно вызывающими рост амплитуды колебаний. Наиболее интересно для изучения поведение решения СДУ вблизи точек бифуркации, когда случайные возмущения могут вызывать разнообразные переходы траекторий решения из одного стационарного состояния в другое. Для численного анализа решений СДУ в работе используется обобщенный явный метод Эйлера как наименее трудоемкий по сравнению с остальными численными методами [1]. При моделировании колебательных решений используется постоянный размер шага интегрирования, который определяется периодом колебаний траекторий решений с наибольшей частотой.

При анализе влияния случайных шумов на странные аттракторы особо изучались условия перехода от устойчивого поведения решения СДУ к неустойчивому. Меняя параметры системы СДУ и интенсивности шумов и оценивая дисперсию компонент решений, можно определить уровни перехода от устойчивого (ламинарного) движения к неустойчивому (турбулентному) [2].

Сверхмалые размеры шага интегрирования и сверхбольшие объемы моделируемых траекторий решений многомерных систем СДУ требуют использования суперкомпьютеров для проведения расчетов за приемлемое время. Отметим, что алгоритмы метода Монте-Карло для решения СДУ естественно распараллеливаются в силу независимости моделируемых траекторий, что значительно облегчает подготовку задачи к решению. В численных экспериментах исследовалось поведение оценок моментов компонент решений систем СДУ, а также рассчитывались новые характеристики для анализа численных решений СДУ — частотная интегральная кривая и частотный фазовый портрет [3].

Численный анализ решений СДУ на суперкомпьютерах ранее проводился в работах [4–6], где основное внимание уделялось вопросам точности оценок математического ожидания и дисперсии компонент решений простейших линейных скалярных СДУ, линейного и нелинейного колебательных контуров, линейного СДУ со случайным коэффициентом сноса.

1. Решаемые задачи

Для численного решения задачи Коши для систем СДУ в смысле Ито:

$$dy = f(y)dt + \sigma(y)dw(t), \quad y(0) = y_0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.1)$$

используется обобщенный явный метод Эйлера:

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n) + \sqrt{h}\sigma(y_n)\xi_{n+1}, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (1.2)$$

Здесь y_{n+1} — численное решение в узле сетки $t_{n+1} = t_n + h$, $\{\xi_{n+1}\}_0^{N-1}$ — последовательность независимых между собой M -мерных гауссовых векторов с независимыми компонентами, f — вектор-функция размера K , σ — матричная функция размера $K \times M$, h — шаг интегрирования.

Под бифуркацией понимается качественное изменение фазовых портретов решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) при изменении одного или нескольких вещественных параметров системы. Критические значения параметров называются точкой бифуркации в пространстве параметров [7].

Аттрактором называется подмножество фазового пространства системы ОДУ, все траектории решения которой, выходящие из некоторой его окрестности, стремятся к нему с ростом t . Аттрактором может быть точка, периодическая траектория или ограниченная область фазового пространства с неустойчивыми траекториями. В последнем

случае аттрактор называется странным. Странные аттракторы могут наблюдаться в поведении решений некоторых систем ОДУ размера $K \geq 3$ и характеризуются режимом установившихся непериодических автоколебаний. Явление резкого изменения фазового портрета аттрактора при прохождении вещественным параметром системы ОДУ критической точки называется бифуркацией странного аттрактора [7]. Систему ОДУ, имеющую странный аттрактор, также принято называть странным аттрактором.

Аттрактор Лоренца задается системой ОДУ вида:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -10(y_1 - y_2), & y_1(0) &= 1, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -y_2 - y_1y_3 + ry_1, & y_2(0) &= 1, \\ \frac{dy_3}{dt} &= -\frac{8}{3}y_3 + y_1y_2, & y_3(0) &= 20. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Анализ, проведенный в [8], показывает, что точкой бифуркации является $r \approx 19.4$.

Если рассматривать параметр r как “шумящий”, то систему ОДУ (1.3) можно записать в виде системы СДУ в смысле Ито:

$$\begin{aligned} dy_1 &= -10(y_1 - y_2)dt, & y_1(0) &= 1, \\ dy_2 &= (-y_2 - y_1y_3 + ry_1)dt + \sigma y_1 dw(t), & y_2(0) &= 1, \\ dy_3 &= \left(-\frac{8}{3}y_3 + y_1y_2 \right) dt, & y_3(0) &= 20. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь и далее начальные значения в задаче Коши для систем СДУ будут задаваться детерминированными.

Аттрактор Ресслера записываются в виде системы ОДУ:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -y_2 - y_3, & y_1(0) &= 1, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -y_1 + ay_2, & y_2(0) &= 1, \\ \frac{dy_3}{dt} &= 0.2 + y_1y_3 - 2.83y_3, & y_3(0) &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Точкой бифуркации является $a = 0.2$ (см. [7]).

Аттрактор Ресслера под воздействием случайного внутреннего шума записывается в виде системы СДУ в смысле Ито:

$$\begin{aligned} dy_1 &= -(y_2 + y_3)dt, & y_1(0) &= 1, \\ dy_2 &= (y_1 + ay_2)dt + \sigma y_2 dw(t), & y_2(0) &= 1, \\ dy_3 &= (0.2 + y_1y_3 - 2.83y_3)dt, & y_3(0) &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Существует ряд дискретных моделей уравнения Навье–Стокса (простейшей моделью является система уравнений Лоренца), описывающих конвективную турбулентность в слое несжимаемой жидкости [8]. Результаты расчетов для разных моделей сильно различаются, например, переход к хаосу при увеличении числа Рейнольдса происходит либо через удвоение периода колебаний, либо через возникновение и последующее разрушение квазипериодических режимов [8].

Семимерная система ОДУ из [8] при наличии мультипликативного случайного шума запишется в виде системы СДУ в смысле Ито:

$$\begin{aligned}
 dy_1 &= (-2y_1 + 4\sqrt{5}(y_2y_3 + y_4y_5)) dt, & y_1(0) &= 0, \\
 dy_2 &= (-9y_2 + 3\sqrt{5}(y_1y_3 + y_6y_7)) dt, & y_2(0) &= 2, \\
 dy_3 &= (-5y_3 + 9y_1y_7 - 7\sqrt{5}y_1y_2 + R) dt + \sigma y_3 dw(t), & y_3(0) &= 0, \\
 dy_4 &= (-5y_4 - \sqrt{5}y_1y_5) dt, & y_4(0) &= -3, \\
 dy_5 &= (-y_5 - 3\sqrt{5}y_1y_4) dt, & y_5(0) &= -9, \\
 dy_6 &= (-8y_6 - 4\sqrt{5}y_2y_7) dt, & y_6(0) &= 0, \\
 dy_7 &= (-5y_7 + \sqrt{5}y_2y_6 - 9y_1y_3), & y_7(0) &= 4.
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

2. ЧИК и ЧФП

В работе [3] предложены новые характеристики для анализа численных решений систем СДУ: ЧИК (частотная интегральная кривая) и ЧФП (частотный фазовый портрет), которые в настоящей работе будут использоваться как основные при анализе СДУ (1.4), (1.6), (1.7).

При численном анализе систем ОДУ с осциллирующими решениями принято наряду с графиком интегральной кривой $y_i(t)$ исследовать фазовый портрет двух компонент решения $(y_i(t), y_j(t))$. Для решений систем СДУ используются частотная интегральная кривая (ЧИК) и частотный фазовый портрет (ЧФП), которые являются аналогами интегральной кривой и фазового портрета при решении ОДУ. Отметим, что ЧИК в фиксированный момент времени t_n будет являться аппроксимацией плотности распределения $p(y_i(t_n))$ (после соответствующей нормировки), т. е. дает оценку решения уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. Для одной моделируемой траектории решения системы СДУ график ЧФП дает аналог фазового портрета $(y_i(t), y_j(t))$. В отличие от гистограмм, в которых статистика собирается по ансамблю моделируемых траекторий СДУ для фиксированного момента времени, в ЧИК и ЧФП собирается полная информация по всему ансамблю на каждом шаге на всем интервале интегрирования.

Приведем формальное определение ЧИК и ЧФП из [3].

1. Сетка S_K и ЧИК W_K :

$$S_K = \left\{ (U_i, \tau_j) \left| \begin{array}{l} h_U = \frac{U_{N_U} - U_0}{N_U}, \quad U_0 = A, \quad U_{N_U} = B, \quad U_i = U_0 + ih_U, \quad i = 1, \dots, (N_U - 1), \\ h_\tau = \frac{\tau_{N_\tau} - \tau_0}{N_\tau}, \quad \tau_0 = C, \quad \tau_{N_\tau} = D, \quad \tau_j = \tau_0 + jh_\tau, \quad j = 1, \dots, (N_\tau - 1) \end{array} \right. \right\}.$$

Здесь $[C, D] \subseteq [0, T]$, $A < B$ произвольны, h_U и h_τ — шаги сетки ЧИК по пространству и времени.

$$W_K = \{W_{ij} \mid W_{ij} \text{ — количество пар } (y_m(t_n), t_n), \text{ попавших в } (i, j) \text{ площадку сетки } S_K\}.$$

Здесь $y_m(t_n)$ — значение m -й компоненты решения СДУ в узле интегрирования t_n . Номер узла сетки находится по формулам: $i = \left[\frac{y_m(t_n) - A}{h_U} \right]$, $j = \left[\frac{t_n - C}{h_\tau} \right]$, где $n = 0, \dots, N$, а $[\]$ — целая часть числа. Для ЧИК шаг интегрирования h и шаг сетки h_τ должны быть кратными: $h_\tau = \mu h$, где $\mu \geq 1$. Смоделированные значения с $i < 0$, $j < 0$ и $i > N_U$, $j > N_\tau$ в ЧИК не учитываются.

2. Сетка S_P и ЧФП W_P :

$$S_P = \left\{ (U_i, V_j) \left| \begin{array}{l} h_U = \frac{U_{N_U} - U_0}{N_U}, U_0 = A, U_{N_U} = B, U_i = U_0 + ih_U, i = 1, \dots, (N_U - 1), \\ h_V = \frac{V_{N_V} - V_0}{N_V}, V_0 = C, V_{N_V} = D, V_j = V_0 + jh_V, j = 1, \dots, (N_V - 1) \end{array} \right. \right\}.$$

Здесь $A < B$, $C < D$ произвольны, h_U и h_V — шаги сетки ЧФП по пространству.

$$W_P = \{W_{ij} \mid W_{ij} \text{ — количество пар } (y_l(t_n), y_m(t_n)), \text{ попавших в } (i, j) \text{ площадку сетки } S_P\}.$$

Здесь $y_l(t_n)$, $y_m(t_n)$ — значения l -й и m -й компоненты решения СДУ в узле интегрирования t_n . Номер узла сетки находится по формулам: $i = \left[\frac{y_l(t_n) - A}{h_U} \right]$, $j = \left[\frac{y_m(t_n) - C}{h_V} \right]$, где $n = 0, \dots, N$. Для ЧИК и ЧФП размер и место двумерной сетки выбирается так, чтобы продемонстрировать графически нужный участок поведения решения СДУ. Смоделированные значения с $i < 0$, $j < 0$ и $i > N_U$, $j > N_V$ в ЧФП не учитываются. В отличие от ЧИК, в ЧФП размеры шагов h , h_U и h_V никак не связаны между собой.

3. Численные эксперименты

Численные эксперименты проводились с помощью обобщенного явного метода Эйлера с использованием до 96 ядер кластера НКС-30Т Сибирского суперкомпьютерного центра при ИВМиМГ СО РАН в рамках специализированной библиотеки программ PARMONS [9], предназначенной для решения разнообразных задач методом Монте-Карло.

Тест 1.

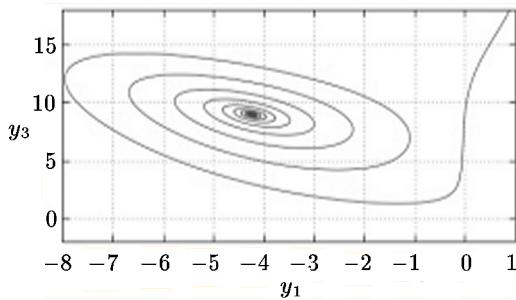


Рис. 1. Фазовая траектория (y_1, y_3) решения ОДУ (1.3) при $r = 10$

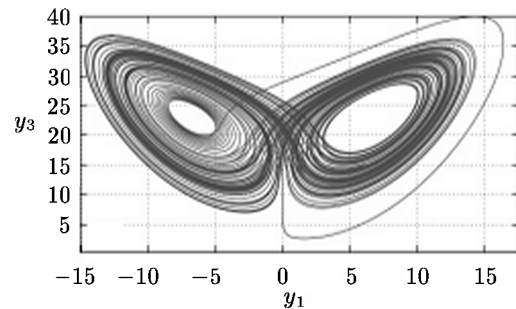


Рис. 2. Фазовая траектория (y_1, y_3) решения ОДУ (1.3) при $r = 24$

На рис. 1 и 2 приведены графики фазовой траектории (y_1, y_3) решений системы ОДУ (1.3) при $r=10$ и 24 соответственно, полученные с помощью явного метода Эйлера на интервале времени $[0, 100]$. Такие значения параметра r выбраны для того, чтобы продемонстрировать переход параметра точки бифуркации с изменением одного режима колебаний на другое. Фазовый портрет на рис. 1 называется гиперболическим аттрактором, на рис. 2 — аттрактором Лоренца [8].

На рис. 3а, 3б и 4а, 4б представлены ЧФП (y_1, y_3) решения системы СДУ (1.4) при $r=10$ и 24 соответственно для $\sigma = 1$, $T = 100$, $h = 10^{-6}$. Воздействие гауссового случайного шума на параметр r приводит к тому, что точка бифуркации уже не является точкой

изменения фазового портрета. Так, при $r=10$ и при $r=24$ изображение ЧФП практически совпадают, что расходуется с рис. 1 и 2 для тех же значений параметра r в ОДУ (1.3), хотя размеры ЧФП значительно разнятся между собой. Более темный цвет на рисунках соответствует большим частотам. Для построения ЧФП использовалась сетка 300×300 .

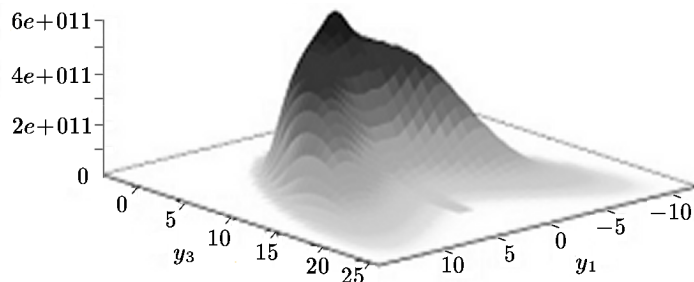


Рис. 3а. ЧФП (y_1, y_3) решения СДУ (1.4) при $r = 10$, вид сбоку

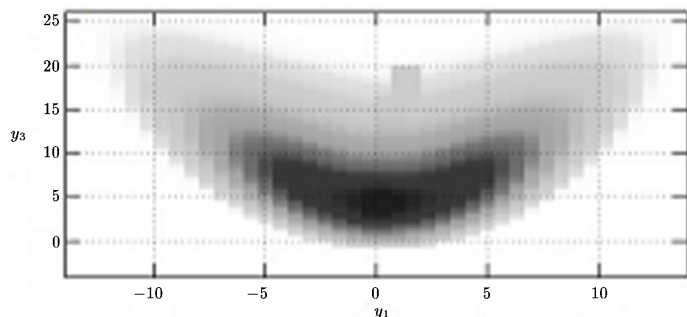


Рис. 3б. ЧФП (y_1, y_3) решения СДУ (1.4) при $r = 10$, вид сверху

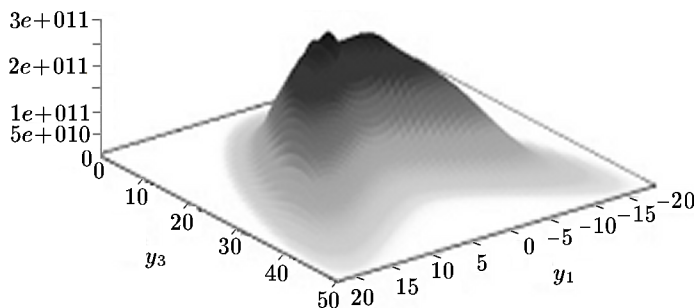


Рис. 4а. ЧФП (y_1, y_3) решения СДУ (1.4) при $r = 24$, вид сбоку

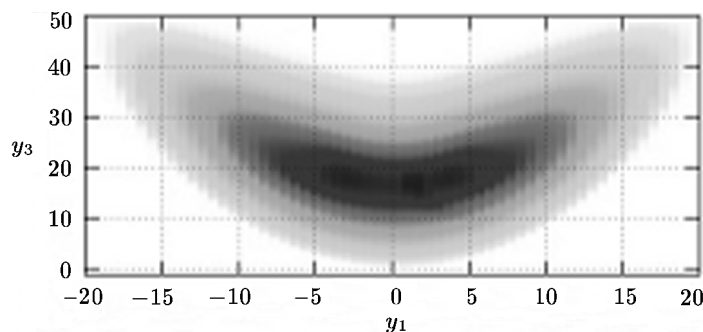


Рис. 4б. ЧФП (y_1, y_3) решения СДУ (1.4) при $r = 24$, вид сверху

На рис. 5а и 5б приведен график ЧИК для решения $y_1(t)$ системы СДУ (1.4) при $r=24$, $\sigma = 1$, $T = 5$, $h = 10^{-6}$. Для расчета ЧФП и ЧИК моделировалось $N_{\text{Тр}} = 10^6$ траекторий решения системы СДУ (1.4).

Из вида этих рисунков можно сделать вывод, что распределение решения $y_1(t)$ со временем переходит от одновершинного к равномерному.

Рис. 5а. ЧИК решения $y_1(t)$ СДУ(1.4) при $r = 24$, вид сбоку

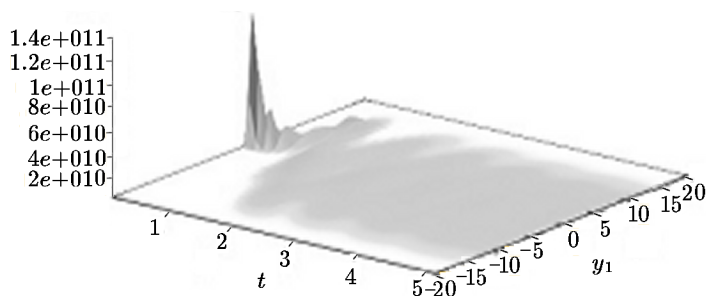
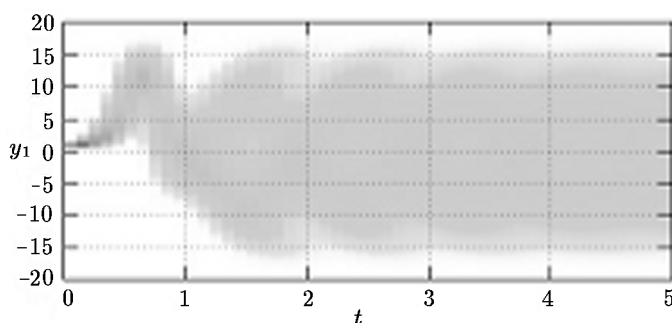


Рис. 5б. ЧИК решения $y_1(t)$ СДУ(1.4) при $r = 24$, вид сверху



На рис. 6 приведены графики оценки дисперсии $D(y_1(t))$ решения $y_1(t)$ системы СДУ (1.4) для разных значений r при $T = 10$, $h = 10^{-4}$, $N_{Tp} = 10^5$, $\sigma = 1$.

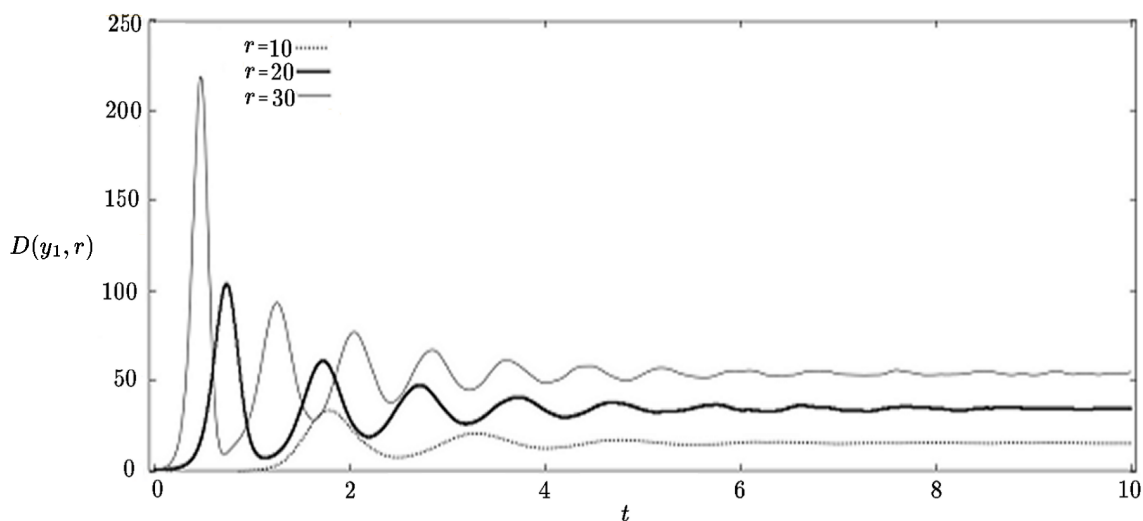


Рис. 6. График оценки дисперсии $D(y_1(t))$ решения СДУ (1.4) при $r = 10$, $r = 20$, $r = 30$

Как видим, дисперсия $D(y_1(t))$ растет с увеличением r , но всегда выходит на стационарный уровень, хотя и с разной скоростью для разных r . Отметим, что при $r = 100$ стационарный уровень дисперсии $D(y_1(t))$ вырастает до 250.

Тест 2.

На рис. 7 и 8 приведены графики фазовой траектории (y_1, y_2) системы ОДУ (1.5) для $a = 0$ и 0.4 при $T = 100$. Как видим, при переходе a от 0 к 0.4 резко меняется фазовый портрет. При $a = 0.5$ отмечается неограниченный рост амплитуды колебаний решений системы ОДУ(1.5) со временем.

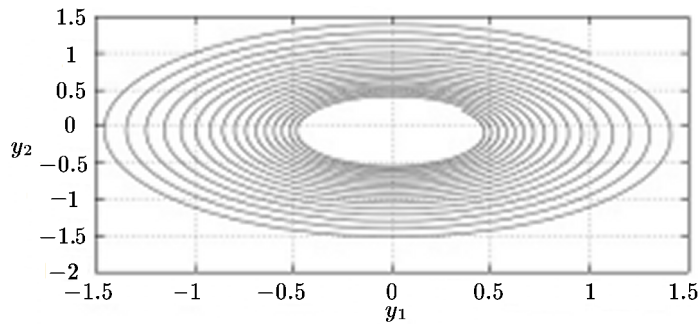


Рис. 7. Фазовая траектория (y_1, y_2) решения ОДУ (1.5) при $a = 0$

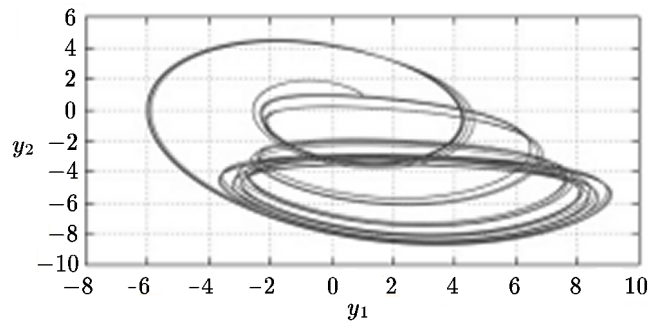


Рис. 8. Фазовая траектория (y_1, y_2) решения ОДУ (1.5) при $a = 0.4$

На рис. 9а, 9б и 10а, 10б представлены ЧФП (y_1, y_2) решения системы СДУ (1.6) при $a = 0$ и $a = 0.4$ соответственно для $T = 10$, $h = 10^{-6}$, $\sigma = 0.1$.

Как и в тесте 1, здесь нет резких различий в ЧФП для разных значений параметра a . Отметим, что увеличение интенсивности шума σ в СДУ вызывает только увеличение размеров ЧФП.

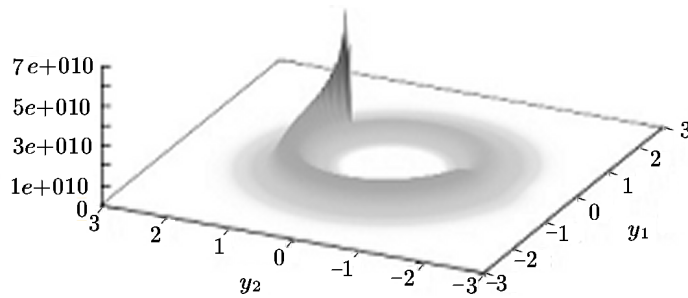


Рис. 9а. ЧФП (y_1, y_2) решения СДУ (1.6) при $a = 0.4$, вид сбоку

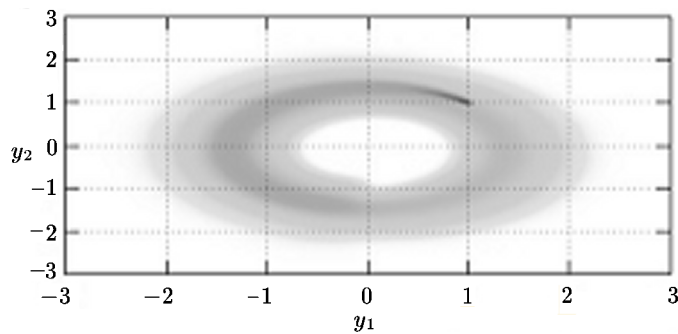


Рис. 9б. ЧФП (y_1, y_2) решения СДУ (1.6) при $a = 0$, вид сверху

Рис. 10а. ЧФП (y_1, y_2) решения СДУ (1.6) при $a = 0.4$, вид сбоку

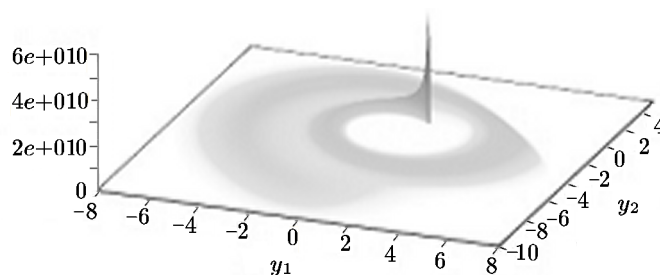
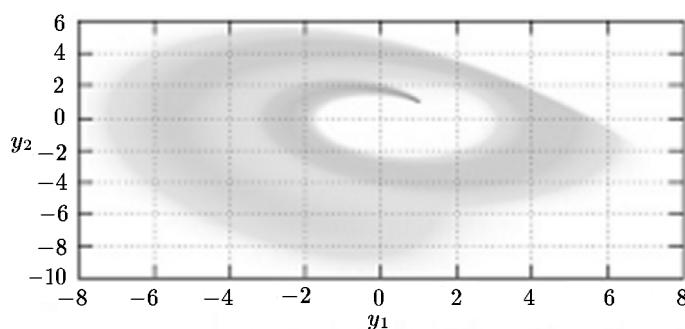


Рис. 10б. ЧФП (y_1, y_2) решения СДУ (1.6) при $a = 0.4$, вид сверху



На рис. 11а, 11б приведена ЧИК для компоненты $y_2(t)$ решения СДУ (1.6) для $a = 0.4$ при $T = 10$, $h = 10^{-6}$, $\sigma = 0.1$. Пик ЧИК находится вблизи начального значения 1.

Для расчета ЧФП и ЧИК моделировалось $N_{\text{Тр}} = 10^6$ траекторий решения системы СДУ (1.6).

Рис. 11а. ЧИК решения $y_2(t)$ СДУ (1.6) при $a = 0.4$, вид сбоку

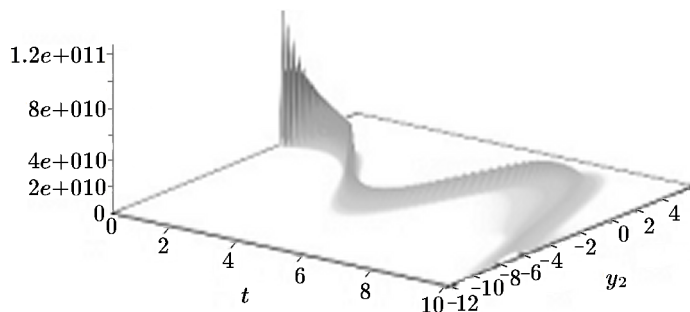
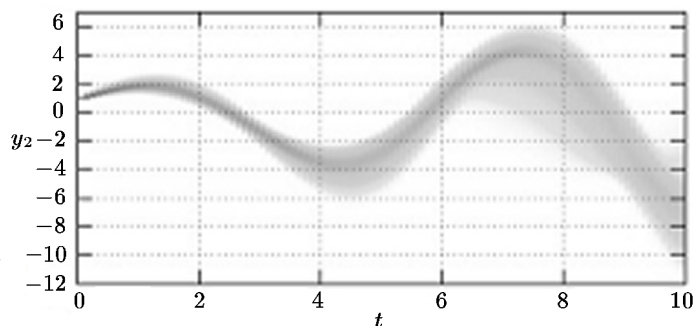


Рис. 11б. ЧИК решения $y_2(t)$ СДУ (1.6) при $a = 0.4$, вид сверху



На рис. 12 приведены графики оценок дисперсии $D(y_2(t))$ для системы СДУ (1.6) при $T = 10$, $h = 10^{-3}$, $N_{\text{Тр}} = 10^5$, $\sigma = 0.1$ для разных значений параметра a .

В отличие от аттрактора Лоренца, дисперсия $D(y_2(t))$ для аттрактора Ресслера растет экспоненциально без выхода на стационарный уровень.

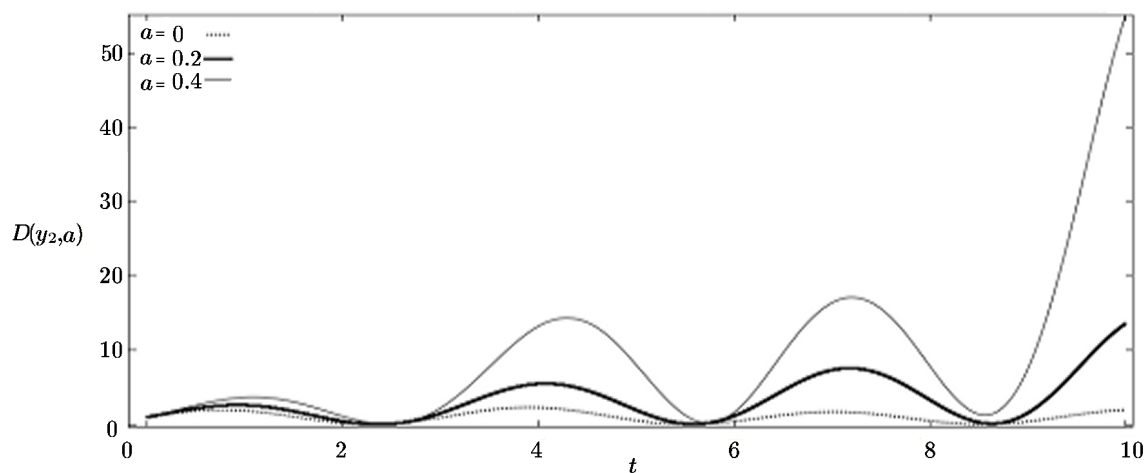


Рис. 12. График оценки дисперсии $D(y_2(t))$ решения СДУ (1.6) при $a = 0$, $a = 0.2$, $a = 0.4$

Тест 3.

На рис. 13 и 14 приведены графики фазовой траектории (y_3, y_5) решения системы СДУ (1.7) без шума при $T = 10$, $\sigma = 0$, $R = 50$ и $R = 200$ соответственно.

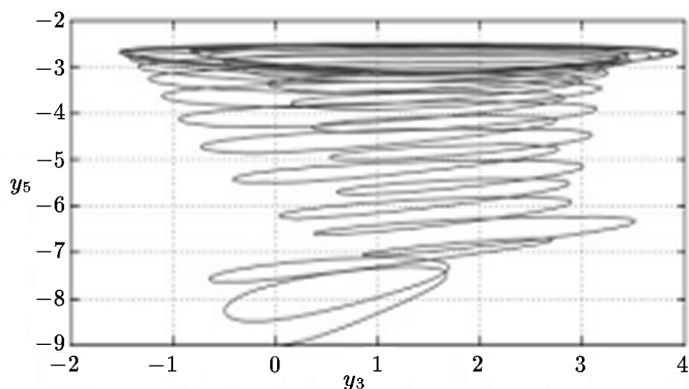


Рис. 13. Фазовая траектория (y_3, y_5) решения СДУ (1.7) при $R = 50$

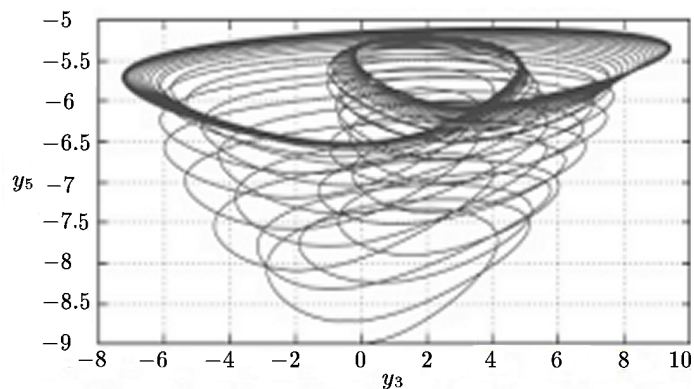


Рис. 14. Фазовая траектория (y_3, y_5) решения СДУ (1.7) при $R = 200$

На рис. 15а, 15б и 16а, 16б представлены графики ЧФП (y_3, y_5) решения системы СДУ (1.7) при $R = 50$ и 200 соответственно для $T = 100$, $\sigma = 1$, $h = 10^{-6}$. Сравнивая рис. 15а и 16а, видим незначительное различие в режимах колебаний для разных значений параметра R .

Рис. 15а. ЧФП (y_3, y_5) решения СДУ (1.7) при $R = 50$, вид сбоку

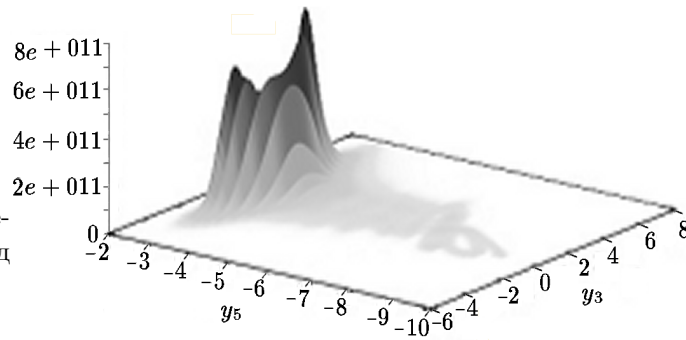


Рис. 15б. ЧФП (y_3, y_5) решения СДУ (1.7) при $R=50$, вид сверху

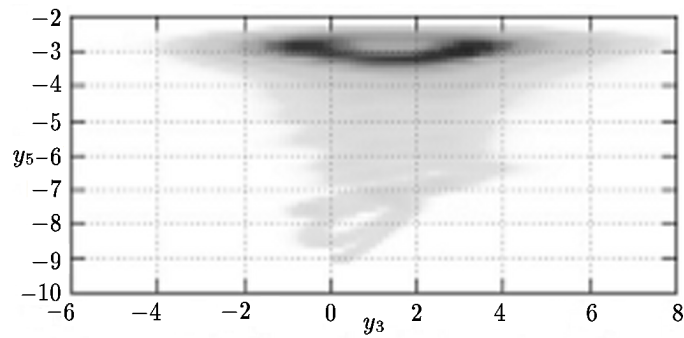


Рис. 16а. ЧФП (y_3, y_5) решения СДУ (1.7) при $R = 200$, вид сбоку

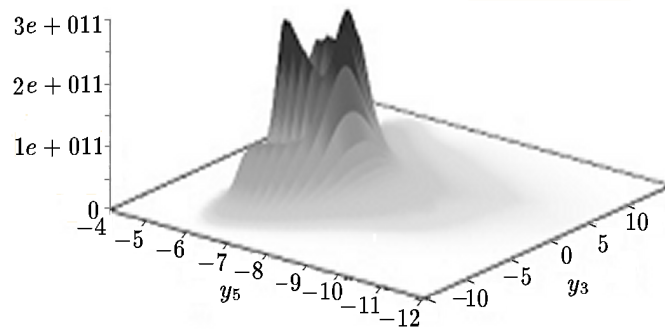
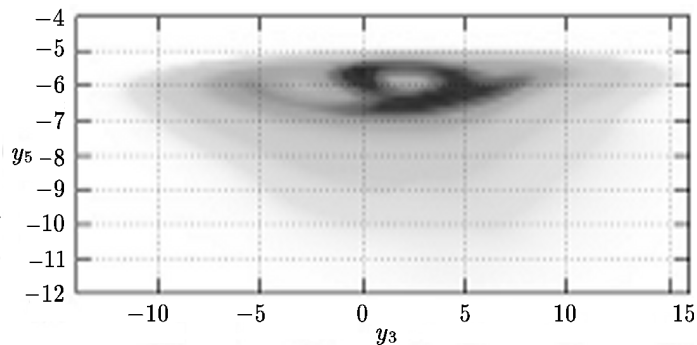


Рис. 16б. ЧФП (y_3, y_5) решения СДУ (1.7) при $R = 200$, вид сверху



На рис. 17а, 17б приведена ЧИК для компоненты $y_3(t)$ решения СДУ (1.7) для $R = 200$, $T = 2$, $\sigma = 1$, $h = 10^{-6}$. Пик ЧИК находится вблизи начального значения 0. Для расчета ЧФП и ЧИК моделировалось $N_{Tr} = 10^6$ траекторий решения системы СДУ (1.7).

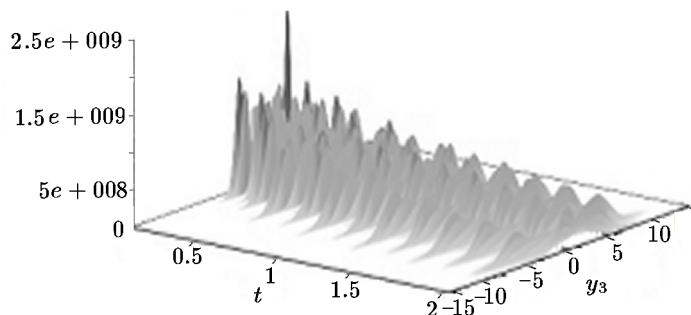


Рис. 17а. ЧИК решения $y_3(t)$ СДУ (1.7) при $R = 200$, вид сбоку

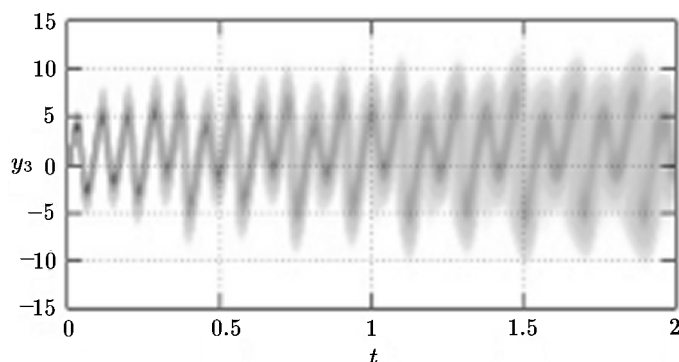


Рис. 17б. ЧИК решения $y_3(t)$ СДУ (1.7) при $R = 200$, вид сверху

На рис. 18 приведены графики оценки дисперсии $D(y_3(t))$ для разных значений параметра R при $T = 10$, $\sigma = 1$, $h = 10^{-6}$, $N_{TP} = 10^5$. Как и в случае аттрактора Лоренца, значение дисперсии выходит на стационарный уровень.

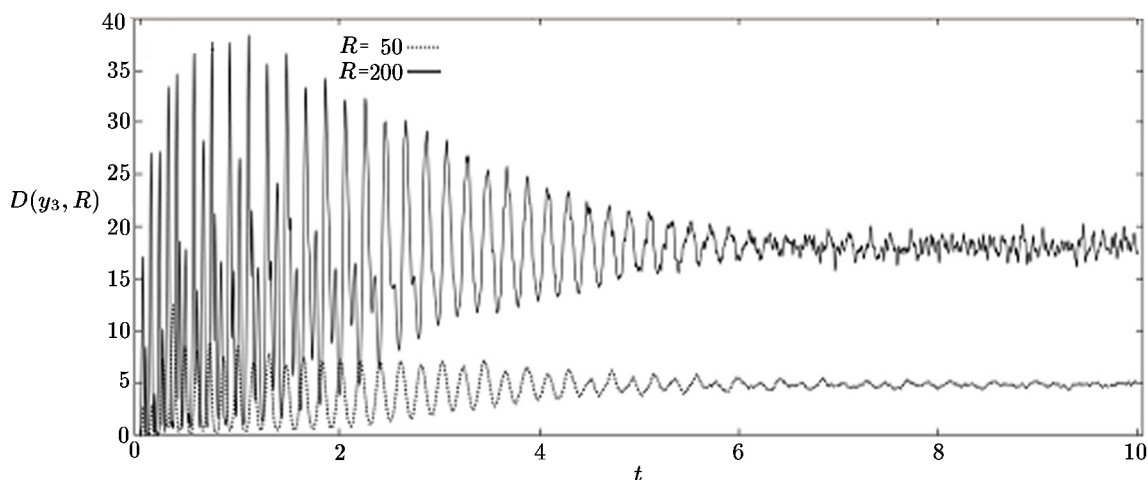


Рис. 18. График оценки дисперсии $D(y_3(t))$ решения СДУ (1.7) при $R = 50$, $R = 200$

Для сравнения были проведены аналогичные численные эксперименты с внешними (аддитивными) случайными шумами с постоянной интенсивностью, которые показали почти одинаковый эффект воздействия шумов на странные аттракторы, что и для случая мультипликативных шумов.

В данной работе не предусматривается рассмотрение вычислительных аспектов исследований. Анализ зависимости точности оценок от размера шага интегрирования методом Эйлера и объема выборки моделируемых траекторий решений СДУ, рассуждения о необходимости и особенностях использования суперкомпьютеров для решения задач методом Монте-Карло рассматривались подробно в работах [4, 5]. Программный комплекс PARMONC и датчик псевдослучайных чисел подробно описываются в [9].

Заключение

Основной вывод по результатам проведенных численных экспериментов заключается в том, что не следует искать многочисленные точки бифуркации у решений систем ОДУ, так как даже случайные шумы с малой интенсивностью вызывают всевозможные переходы из одного режима колебаний в другой при фиксированных параметрах ОДУ. Более реалистичную картину о режимах колебаний дают графики ЧИК и ЧФП. Темпы роста дисперсии компонент решений исследуемых систем СДУ показывают темпы увеличения размеров странных аттракторов.

Рисунки ЧИК и ЧФП показывают динамику изменения со временем странных аттракторов под воздействием случайных шумов, что позволяет, например, воспроизводить реальные картины движения жидкости и газа [2]. Результаты моделирования решений стохастических уравнений Навье–Стокса в частных производных будут представлены в следующих работах авторов.

Литература

1. **Артемьев С.С.** Численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1993. (Artem'ev S.S. *Chislennyye metody resheniya zadachi Koshi dlya sistem obyknovennykh i stokhasticheskikh differentsial'nykh uravnenij*. — Novosibirsk: Izd-vo VTS SO RAN, 1993.)
2. **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1987. (Lojtsyanskij L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza*. — M.: Nauka, 1987.)
3. **Артемьев С.С., Иванов А.А., Смирнов Д.Д.** Новые частотные характеристики численного решения стохастических дифференциальных уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 1. — С. 15–26. (Artem'ev S.S., Ivanov A.A., Smirnov D.D. *Novye chastotnye kharakteristiki chislennogo resheniya stokhasticheskikh differentsial'nykh uravnenij* // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2015. — T. 18, № 1. — S. 15–26.)
4. **Артемьев С.С., Корнеев В.Д.** Численное решение стохастических дифференциальных уравнений на суперкомпьютерах // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2011. — Т. 14, № 1. — С. 5–17. (Artem'ev S.S., Korneev V.D. *Chislennoe reshenie stokhasticheskikh differentsial'nykh uravnenij na superkomp'yuterakh* // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2011. — T. 14, № 1. — S. 5–17.)
5. **Артемьев С.С., Иванов А.А., Корнеев В.Д.** Численный анализ стохастических осцилляторов на суперкомпьютерах // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2012. — Т. 15, № 1. — С. 31–43. (Artem'ev S.S., Ivanov A.A., Korneev V.D. *Chislennyj analiz stokhasticheskikh ostillyatorov na superkomp'yuterakh* // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2012. — T. 15, № 1. — S. 31–43.)
6. **Артемьев С.С., Корнеев В.Д., Якунин М.А.** Численное решение стохастических дифференциальных уравнений со случайной структурой на суперкомпьютерах // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 4. — С. 303–311. (Artem'ev S.S., Korneev V.D., Yakunin M.A. *Chislennoe reshenie stokhasticheskikh differentsial'nykh uravnenij so sluchajnoj strukturoj na superkomp'yuterakh* // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2013. — T. 16, № 4. — S. 303–311.)
7. **Анищенко В.С.** Сложные колебания в простых системах. — М: Наука, 1990. (Anishchenko V.S. *Slozhnye kolebaniya v prostykh sistemakh*. — M: Nauka, 1990.)

8. **Неймарк Ю.И., Ланда П.С.** Стохастические и хаотические колебания. — М.: Наука, 1987. (Nejmark YU.I., Landa P.S. Stokhasticheskie i khaoticheskie kolebaniya. — М.: Nauka, 1987.)
9. **Марченко М.А., Михайлов Г.А.** Распределенные вычисления по методу Монте-Карло // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 5. — С. 157–170. (Marchenko M.A., Mikhajlov G.A. Raspredeleнные vychisleniya po metodu Monte-Karlo // Avtomatika i telemekhanika. — 2007. — № 5. — S. 157–170.)

*Поступила в редакцию 24 сентября 2013 г.,
в окончательном варианте 31 марта 2014 г.*