

УДК 519.63

ТЕЧЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ РАЗРУШЕНИИ ПЛОТИНЫ НА СКАЧКЕ ШИРИНЫ ПРЯМОУГОЛЬНОГО КАНАЛА

В. В. Остапенко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mail: ostapenko_vv@ngs.ru

В рамках первого приближения теории мелкой воды изучается разрешимость задачи о течениях, возникающих при разрушении плотины на скачке ширины прямоугольного канала. Рассмотрены два случая, когда ширина канала в верхнем бьефе больше или меньше ширины канала в нижнем бьефе. Показано, что в первом случае задача однозначно разрешима в предположении о сохранении полной энергии потока на скачке ширины канала, во втором случае решение задачи при некоторых начальных данных существует только при условии потери полной энергии потока на этом скачке.

Ключевые слова: теория мелкой воды, скачок ширины канала, задача о разрушении плотины, автомодельные решения.

1. Постановка задачи. Дифференциальные уравнения однослойной мелкой воды в непрямоугольном канале без учета влияния трения и уклона дна имеют вид [1]

$$w_t + q_x = 0; \quad (1.1)$$

$$q_t + (qv + ghw/2)_x = gh^2 b_x / 2, \quad (1.2)$$

где $h = h(t, x)$ — глубина потока; $q = q(t, x)$ — расход воды в поперечном сечении канала; $w = w(t, x) = bh$ — площадь поперечного сечения потока; $b = b(x)$ — ширина канала; $v = v(t, x) = q/w$ — средняя по сечению скорость потока; g — ускорение свободного падения.

Для системы (1.1), (1.2) рассмотрим задачу о разрушении плотины

$$h(x, 0) = \begin{cases} h_l, & x < 0, \\ h_r, & x > 0, \end{cases} \quad v(x, 0) = 0 \quad (1.3)$$

на скачке ширины канала

$$b(x) = \begin{cases} b_l, & x < 0, \\ b_r, & x > 0, \end{cases} \quad w(x, 0) = \begin{cases} w_l, & x < 0, \\ w_r, & x > 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

где $w_l = b_l h_l$; $w_r = b_r h_r$; $b_l > b_r$. Решение этой задачи будем искать в виде комбинации простых волн (т. е. прерывных волн, распространяющихся с постоянной скоростью, и центрированных волн понижения), неподвижного гидравлического разрыва, расположенного в начале координат на скачке ширины канала, и соединяющих их зон постоянного течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-00338), а также в рамках программ фундаментальных исследований Президиума РАН № 4.7 и Президиума СО РАН № 23.

© Остапенко В. В., 2012

Так как прерывная волна, возникающая после распада разрыва (1.3), (1.4), распространяется по той части русла, в которой его ширина является постоянной ($b_x = 0$), то соответствующие ей условия Гюгонио, получаемые из законов сохранения массы (1.1) и полного импульса (1.2), имеют вид

$$D[w] = [q]; \quad (1.5)$$

$$D[q] = [qv + ghw/2], \quad (1.6)$$

где $D = x_t$ — скорость прерывной волны; $[f] = f_1 - f_0$ — скачок функции $f(t, x)$ на ее фронте $x = x(t)$; $f_0 = f(t, x(t) + 0)$; $f_1 = f(t, x(t) - 0)$.

Поскольку в случае непрямоугольного русла уравнение для массы (1.1) остается дивергентным, т. е. представляет собой точный закон сохранения при $b_x \neq 0$, соответствующее ему условие Гюгонио (1.5) справедливо и на гидравлическом разрыве, формирующемся на скачке ширины канала (1.4). Так как этот разрыв неподвижен ($D = 0$), то из условия (1.5) получаем соотношение

$$[q] = 0, \quad (1.7)$$

из которого следует равенство $q_1 = q_0 = q(t, 0)$, означающее непрерывность расхода на скачке (1.4).

В случае непрямоугольного русла уравнение для полного импульса (1.2) не является точным законом сохранения, в силу чего его правая часть на разрыве (1.4) становится неопределенной. Это означает, что в рамках формальной теории мелкой воды [1–3] соответствующее уравнению (1.2) условие Гюгонио (1.6) нельзя использовать для получения второго соотношения на разрыве (1.4). Следовательно, если с такого разрыва уходят две характеристики системы (1.1), (1.2), то для замыкания соотношений на нем необходимо ввести дополнительное условие.

Аналогичная ситуация имеет место при изучении одномерных течений газа в трубе с разрывом площади поперечного сечения. В [4, 5] при решении задачи о распаде разрыва на скачке площади сечения в трубе в качестве дополнительного соотношения на скачке использовалось уравнение импульса, в котором учитывалась реакция стенки p , соединяющей трубопроводы различных диаметров. Однако получаемое таким способом соотношение на скачке определено неоднозначно: оно существенно зависит от способа задания величины p (в работах [4, 5] эта величина задается по-разному). Кроме того, в общем случае это соотношение не дивергентно, т. е. не допускает записи в виде условия Гюгонио $[F] = 0$.

В то же время существует другой подход [6], при котором недостающее условие на скачке площади сечения в предположении адиабатичности течения получается из дифференциального следствия базисных уравнений газовой динамики — закона сохранения энтропии, имеющего дивергентную форму при изменении площади сечения. При выводе недостающего условия для уравнений изоэнтропической газовой динамики применяется аналогичный подход [7], основанный на использовании на скачке площади сечения наряду с уравнением неразрывности дивергентного уравнения для полной энергии.

Тот же подход применен в [8, 9] при получении дополнительного условия на гидродинамическом разрыве, возникающем в прямоугольном канале над ступенькой (уступом) дна при описании волновых течений жидкости на основе уравнений мелкой воды. При этом в качестве дополнительного соотношения на разрыве над ступенькой дна использовалась непрерывность функции Бернулли, которая следует из закона сохранения локального импульса (в результате на таком разрыве сохраняется полная энергия набегающего потока). Построенные таким образом автомодельные решения задачи о разрушении плотины над ступенькой [8] и уступом [9] дна достаточно хорошо согласуются с результатами лабораторных экспериментов [10, 11] (возможные типы волн, скорости их распространения, асимптотические глубины за их фронтами).

В настоящей работе, следуя [6, 7], соотношения на гидравлическом разрыве, формирующемся на скачке ширины канала (1.4), получим из законов сохранения системы (1.1), (1.2), которые в случае непризматического русла допускают запись в дивергентной форме. Если с этого разрыва уходят две характеристики, то в качестве дополнительного к (1.7) соотношения будем использовать соотношение [8, 9]

$$[v^2/2 + gh] = 0, \quad (1.8)$$

означающее непрерывность функции Бернулли $J = v^2/2 + gh$ на скачке ширины канала. Это соотношение можно получить из условия Гюгонио для закона сохранения локального импульса

$$v_t + (v^2/2 + gh)_x = 0, \quad (1.9)$$

являющегося дифференциальным следствием системы (1.1), (1.2).

Дифференциальным следствием системы (1.1), (1.2) является также уравнение для полной энергии

$$e_t + (qv^2 + 2qgh)_x = 0, \quad (1.10)$$

где $e = qv + gbh^2$ — удвоенная полная энергия потока. Поскольку уравнение (1.10) дивергентно, т. е. так же, как и уравнения (1.1), (1.9), в случае непризматического русла является точным законом сохранения, из соответствующего ему условия Гюгонио на разрыве (1.4) следует соотношение $[q(v^2 + 2gh)] = 0$, которое при $q \neq 0$ эквивалентно соотношению (1.8). Таким образом, при условиях (1.7), (1.8) на скачке ширины канала (1.4) сохраняется полная энергия набегающего потока.

2. Допустимые течения на скачке ширины канала при сохранении на нем полной энергии набегающего потока. С учетом непрерывности расхода (1.7) соотношение (1.8) можно записать в виде

$$q^2[w^{-2}] + 2g[h] = 0. \quad (2.1)$$

Отсюда следует

$$q^2 = \frac{gw_0^2 w_1^2 [h]}{\bar{w}[w]}, \quad (2.2)$$

где $q = q(t, 0) \neq 0$; $\bar{w} = (w_0 + w_1)/2$, поэтому на разрыве (1.4) (при сохранении на нем полной энергии набегающего потока) возможны лишь такие течения, для которых

$$[h][w] = (h_1 - h_0)(w_1 - w_0) > 0. \quad (2.3)$$

С учетом того, что $b_l > b_r$, неравенство (2.3) допускает две конфигурации потока на скачке (1.4):

$$h_1 > h_0, \quad w_1 > w_0; \quad (2.4)$$

$$w_1 < w_0, \quad h_1 < h_0. \quad (2.5)$$

Неравенство (2.3) не допускает промежуточную конфигурацию, для которой $h_1 < h_0$, $w_1 > w_0$. Поэтому соответствующие данной конфигурации разрывные решения возможны лишь при потере полной энергии на скачке ширины канала.

Так как согласно (2.2)

$$v_1^2 = \frac{q^2}{w_1^2} = \frac{gw_0^2 [h]}{\bar{w}[w]},$$

то течение слева от разрыва (1.4) при $x = 0 - 0$ является докритическим ($|v_1| < c_1$) в случае конфигурации (2.4) и сверхкритическим ($|v_1| > c_1$) в случае конфигурации (2.5)

($c = \sqrt{gw/b} = \sqrt{gh}$ — скорость распространения малых возмущений в мелкой воде). Это означает, что для устойчивости гидродинамического разрыва [3, 6] на скачке (1.4) течение справа от скачка при $x = 0 + 0$ должно быть докритическим ($|v_0| < c_0$) или критическим с положительной скоростью ($v_0 = c_0$) в случае конфигурации (2.4) и сверхкритическим ($|v_0| > c_0$) или критическим с отрицательной скоростью ($v_0 = -c_0$) в случае конфигурации (2.5). При этом во всех случаях течение по обе стороны от разрыва (1.4) должно быть однонаправленным ($v_0 v_1 > 0$).

Запишем соотношение (2.1) в виде

$$J_1(h_1) = J(h_1, b_l) = J_0(h_0) = J(h_0, b_r), \quad (2.6)$$

где $J(h, b) = q^2/(2b^2h^2) + gh$ — функция Бернулли, в которой расход

$$q = w_0 v_0 = b_r h_0 v_0 = w_1 v_1 = b_l h_1 v_1 \quad (2.7)$$

фиксирован. Поскольку

$$J_h(h, b) = g - \frac{q^2}{b^2 h^3} = g - \frac{q^2}{w^2 h} = g - \frac{v^2}{h},$$

функция $J(h, b)$ достигает минимума по h

$$\min_h J(h, b) = J(h_c, b) = \frac{v_c^2}{2} + gh_c = \frac{3}{2} gh_c = \frac{3}{2} \left(\frac{gq}{b} \right)^{2/3}$$

в случае критического течения в точке $h_c = v_c^2/g = \sqrt[3]{q^2/(gb^2)}$. Поэтому при $h < h_c$, $J_h < 0$ функция $J(h, b)$ определяет сверхкритические течения ($|v| > c$), а при $h > h_c$, $J_h > 0$ — докритические течения ($|v| < c$). Следовательно, в случае устойчивых течений уравнение (2.6) однозначно разрешимо относительно h_1 при всех $h_0 > 0$ и относительно h_0 при всех значениях h_1 , удовлетворяющих неравенству $J_1(h_1) > J_0(h_c^0)$, где $h_c^0 = \sqrt[3]{q^2/(gb_r^2)}$. Если $J_1(h_1) = J_0(h_c^0)$, то для устойчивых течений уравнение (2.6) разрешимо относительно h_0 только при $h_1 > h_c^1$, где $h_c^1 = \sqrt[3]{q^2/(gb_l^2)}$, т. е. когда течение h_1 , v_1 является докритическим.

3. Задача о разрушении плотины на скачке ширины канала при $h_l > h_r$.

Покажем, что задача о разрушении плотины (1.1)–(1.4) при $h_l > h_r$ и $b_l > b_r$ (т. е. когда ширина русла в верхнем бьефе больше, чем в нижнем) однозначно разрешима при выполнении условий (1.7), (1.8) на разрыве (1.4), означающих, что на скачке ширины канала сохраняется полная энергия набегающего потока. В рассматриваемом случае верхний бьеф расположен в интервале $x < 0$, а нижний — в интервале $x > 0$.

Поскольку при $h_l > h_r$ жидкость после распада разрыва (1.3), (1.4) течет в положительном направлении ($v > 0$), при $x > 0$ по фону глубиной h_r будет распространяться прерывная волна S , а при $x < 0$ по фону глубиной h_l будет распространяться волна понижения R . Слева от гидравлического разрыва на скачке (1.4) (этот стационарный разрыв обозначим L) образуется зона постоянного докритического течения, соединяющая разрыв L с волной понижения R (рис. 1). Это означает, что при решении задачи (1.1)–(1.4) на разрыве L всегда реализуется конфигурация (2.4). Картина течения справа от разрыва L зависит от режима течения за фронтом прерывной волны S .

При выполнении условий (1.7), (1.8) на разрыве L глубина H и скорость потока V слева от этого разрыва однозначно определяются по их значениям h и v справа от него (см. п. 2). С учетом этого рассмотрим однопараметрическое семейство устойчивых разрывных течений с глубинами и скоростями $h, v(h)$ справа от разрыва L и $H(h), V(h)$ слева от него.

Следующая теорема аналогична теореме 1 в работе [8].

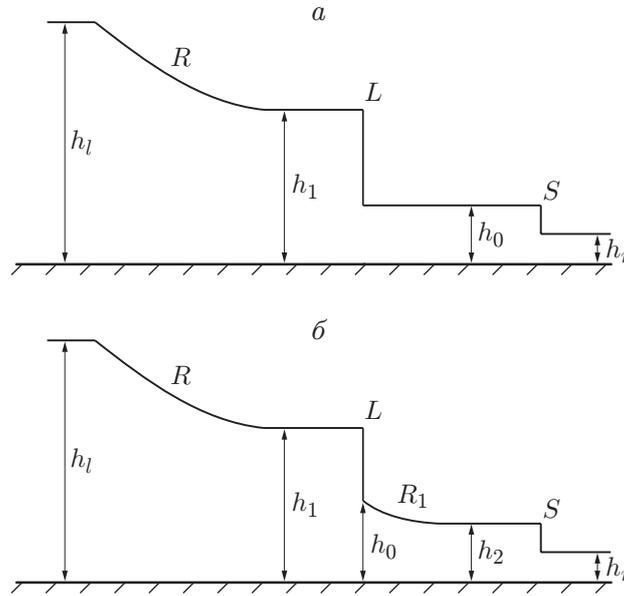


Рис. 1. Характерные профили волн, получаемые при начальных глубинах $h_l > h_r$:
 а — $h_l \in (h_r, h_l^*]$; б — $h_l > h_l^*$

Теорема 1. Если функция $v(h)$ удовлетворяет неравенствам $c \geq v > 0$, $v_h > 0$, где $c = \sqrt{gh}$, то соответствующие ей функции $H(h)$, $V(h)$ удовлетворяют неравенствам $C > V > 0$, $H_h > 0$, $V_h > 0$, в силу которых $C > \tilde{V} > 0$, $\tilde{V}_H > 0$, где $C = \sqrt{gH}$; $\tilde{V}(H) = V(h(H))$; $h(H)$ — функция, обратная $H(h)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом введенных выше обозначений запишем соотношение (2.6) в виде

$$\frac{q^2}{2B^2H^2} + gH = \frac{q^2}{2b^2h^2} + gh, \quad (3.1)$$

где $q = wv = WV$; $w = bh$; $W = BH$; $b = b_r$; $B = b_l$. Взяв полный дифференциал от обеих частей уравнения (3.1), получаем

$$\alpha_1 dH = \alpha_0 dh + (v/w - V/W) dq, \quad (3.2)$$

где $\alpha_0 = (c^2 - v^2)/h$; $\alpha_1 = (C^2 - V^2)/H$.

В силу условий теоремы на разрыве L реализуется конфигурация (2.5), для которой $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 > 0$. Поэтому из формулы (3.2) следует

$$H_h = \frac{1}{\alpha_1} \left(\alpha_0 + \left(\frac{v}{w} - \frac{V}{W} \right) q_h \right) = \frac{1}{\alpha_1} \left(\alpha_0 + \frac{q(W^2 - w^2)}{w^2 W^2} q_h \right) > 0, \quad (3.3)$$

где $q = wv > 0$; $q_h = (wv)_h = b(v + hv_h) > 0$.

Для того чтобы определить знак производной V_h , представим ее в виде

$$V_h = (q/W)_h = (Wq_h - qW_h)/W^2,$$

где $W_h = BH_h$. Отсюда с учетом (3.3) получаем

$$\begin{aligned} V_h &= \frac{1}{W^2} \left(Wq_h - \frac{Bq}{\alpha_1} \left(\alpha_0 + \frac{q(W^2 - w^2)}{w^2 W^2} q_h \right) \right) = \\ &= \frac{B((\alpha_1 H + V^2 - v^2)q_h - \alpha_0 q)}{\alpha_1 W^2} = \frac{B((C^2 - c^2)q_h + \alpha_0 whv_h)}{\alpha_1 W^2} > 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $C^2 = gH > c^2 = gh$. Теорема доказана.

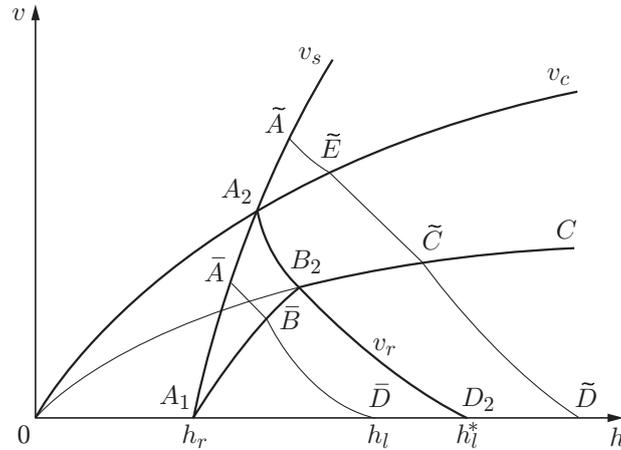


Рис. 2. Диаграмма адиабат для построения решений при начальных глубинах $h_l > h_r$

Так как ударная адиабата

$$v = v_s(h, h_r) = \sqrt{\frac{g(h + h_r)}{2hh_r}} (h - h_r), \quad h > h_r, \quad (3.5)$$

которую задают параметры течения за фронтом прерывной волны S , является положительной строго монотонно возрастающей функцией h , то в силу теоремы 1 та ее часть, которой на рис. 2 соответствует отрезок $[A_1, A_2]$, лежащий в области докритических течений, переводится соотношением (3.1) через разрыв L в строго монотонно возрастающую функцию, график которой представляет собой отрезок $[A_1, B_2]$, лежащий в области докритических течений. Линия критических течений

$$v = v_c(h) = \sqrt{gh} \quad (3.6)$$

также переводится соотношением (3.1) в строго монотонно возрастающую функцию, график которой, лежащий в области докритических течений, показан на рис. 2 отрезком $[0, B_2]$, переходящим в линию $B_2 C$. Так как ударная адиабата (3.5) и линия критических течений (3.6) пересекаются в единственной точке $A_2(h_r^*, \sqrt{gh_r^*})$, то при отображении (3.1) их образы пересекаются в области докритических течений в единственной точке B_2 .

Поскольку параметры постоянного течения h, v за волной понижения R , распространяющейся по фону h_l , удовлетворяют уравнению волновой r -адиабаты

$$v = v_r(h, h_l) = 2(\sqrt{gh_l} - \sqrt{gh}), \quad h < h_l, \quad (3.7)$$

выходящей из точки $h_l > h_r$ на оси h , однозначная разрешимость задачи о распаде разрыва (1.1)–(1.4) обусловлена строго монотонным убыванием функции (3.7) и строго монотонным возрастанием кусочно-гладкой функции, график которой показан на рис. 2 линией $A_1 B_2 C$. Участок $A_1 B_2$ этой линии является образом докритического участка $A_1 A_2$ ударной адиабаты v_s , а участок $B_2 C$ — образом участка линии критических течений v_c , расположенной правее точки A_2 , т. е. в интервале $h > h_r^*$.

Обозначим через h_l^* точку на оси h , из которой выходит волновая адиабата v_r , проходящая через точку B_2 излома линии $A_1 B_2 C$. Тогда при $h_l \in (h_r, h_l^*]$ адиабата v_r пересекает эту линию на участке $A_1 B_2$, что приводит к формированию картины течения, показанной на рис. 1, а. При этом волне понижения R соответствует участок $\bar{D}\bar{B}$ волновой адиабаты v_r (\bar{B} — точка с координатами h_1, v_1), разрыву L — ударный переход $\bar{B}\bar{A}$ по формуле (2.6) (\bar{A} — точка с координатами h_0, v_0), прерывной волне S — участок $\bar{A}A_1$ ударной адиабаты v_s .

При $h_l > h_l^*$ адиабата v_r пересекает линию A_1B_2C на участке B_2C , что приводит к формированию картины течения, показанной на рис. 1,б. При этом волне понижения R соответствует участок $\tilde{D}\tilde{C}$ волновой адиабаты v_r (\tilde{C} — точка с координатами h_1, v_1), разрыву L — ударный переход $\tilde{C}\tilde{E}$ по формуле (2.6) (\tilde{E} — точка с координатами h_0, v_0), волне понижения R_1 , примыкающей справа к разрыву L , — участок $\tilde{E}\tilde{A}$ волновой r -адиабаты, описываемой уравнением

$$v = \tilde{v}_r(h, h_0, v_0) = 2(\sqrt{gh_0} - \sqrt{gh}) + v_0, \quad h < h_0$$

(\tilde{A} — точка с координатами h_2, v_2), и прерывной волне S — участок $\tilde{A}A_1$ ударной адиабаты v_s . При этом параметры течения при $x > 0$ получаются в результате решения классической задачи о распаде разрыва с начальными данными, соответствующими координатам точек A_1 и \tilde{E} на рис. 2.

4. Задача о разрушении плотины на скачке ширины канала при $h_l < h_r$.

Рассмотрим задачу о разрушении плотины (1.1)–(1.4) при $h_l < h_r$ и $b_l > b_r$, т. е. в случае, когда в верхнем бьефе ширина русла меньше, чем в нижнем. В данном случае верхний бьеф расположен в интервале $x > 0$, а нижний — в интервале $x < 0$. Поскольку при $h_l < h_r$ после распада разрыва (1.3), (1.4) жидкость течет в отрицательном направлении ($v < 0$), при $x > 0$ по фону глубиной h_r будет распространяться волна понижения R , а при $x < 0$ по фону глубиной h_l будет распространяться прерывная волна S . Сначала изучим разрешимость этой задачи в рамках условий (1.7), (1.8) на разрыве (1.4), означающих, что на скачке ширины канала сохраняется полная энергия набегающего потока.

4.1. *Подтопленные режимы течения на скачке ширины канала.* Предположим, что слева от волны понижения R , распространяющейся по фону глубиной h_r , и справа от прерывной волны S , распространяющейся по фону глубиной h_l , возникают постоянные докритические течения h_0, v_0 и h_1, v_1 , которые продолжаются до скачка (1.4), формируя на нем устойчивый разрыв L (линия 1 на рис. 3), удовлетворяющий первому условию (2.3). Так как в этом случае параметры потока h_1, v_1 слева от разрыва L влияют на параметры течения h_0, v_0 справа от него и при переходе через этот разрыв глубина потока возрастает, то получаемые при этом решения, следуя [9], будем называть решениями с подтопленным режимом течения на скачке (1.4).

Поскольку параметры постоянного течения h_0, v_0 удовлетворяют уравнению волновой s -адиабаты

$$v = \bar{v}_s(h, h_r) = 2(\sqrt{gh} - \sqrt{gh_r}), \quad h < h_r, \tag{4.1}$$

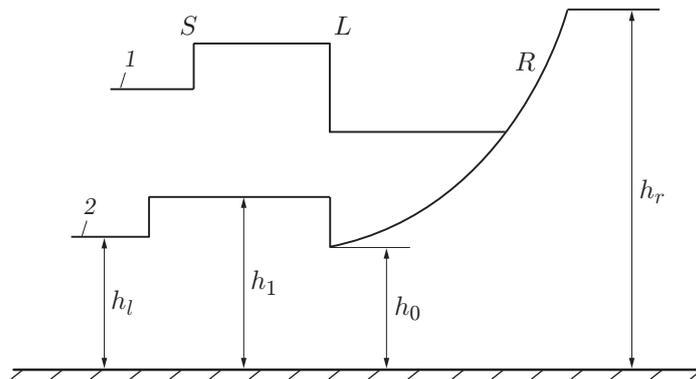


Рис. 3. Характерные профили волн, получаемые при начальных глубинах $h_l < h_r$:
 1 — $h_l \in [\bar{h}_l, h_r)$; 2 — $h_l \in (h_l', \bar{h}_l)$

а h_1, v_1 — уравнению ударной r -адиабаты

$$v = \bar{v}_r(h, h_l) = \sqrt{\frac{g(h + h_l)}{2hh_l}} (h_l - h), \quad h > h_l, \quad (4.2)$$

для получения этих параметров обобщенным методом адиабат, так же как и в п. 3, рассмотрим однопараметрическое семейство устойчивых разрывных течений с глубинами и скоростями $h, v(h)$ справа от разрыва L и $H(h), V(h)$ слева от него.

Следующая теорема аналогична теореме 3 в работе [9].

Теорема 2. Если функция $v(h)$ удовлетворяет неравенствам $0 > v > -c, \gamma_2 > v_h > \gamma_1 > 0$, где

$$\gamma_1 = -\frac{v(C^2 - c^2)}{h(C^2 - v^2)}, \quad \gamma_2 = -\frac{W(gW - bVv)}{v(W^2 - w^2)}, \quad (4.3)$$

то соответствующие ей функции $H(h), V(h)$ удовлетворяют неравенствам $0 > V > -C, H_h > 0, V_h > 0$, в силу которых $0 > \tilde{V} > -C, \tilde{V}_H > 0$, где $\tilde{V}(H) = V(h(H))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Производные H_h, V_h , задаваемые формулами (3.3), (3.4), представим в виде

$$H_h = \frac{a_1 v_h + b_1}{\alpha_1 W^2}, \quad V_h = \frac{B(c_1 v_h + d_1)}{\alpha_1 W^2}, \quad (4.4)$$

где коэффициенты a_1, b_1, c_1, d_1 при выполнении условия (2.4) удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} a_1 &= v(W^2 - w^2) < 0, & b_1 &= W(gW - bVv) > 0, \\ c_1 &= w(C^2 - v^2) > 0, & d_1 &= bv(C^2 - c^2) < 0. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (4.3) следует, что $\gamma_2 = -b_1/a_1 > \gamma_1 = -d_1/c_1 > 0$, в силу чего при условии $v_h \in (\gamma_1, \gamma_2)$ для производных (4.4) выполняются неравенства

$$H_h = \frac{\gamma_2 - v_h}{\alpha_1 |a_1| W^2} > 0, \quad V_h = \frac{B(v_h - \gamma_1)}{\alpha_1 c_1 W^2} > 0.$$

Теорема доказана.

Условия теоремы 2 накладывают существенные ограничения на значение производной функции $v(h)$, которая остается монотонно возрастающей при переходе через разрыв L . Однако несложно показать, что в области докритических течений, т. е. при $\bar{v}_s \in (-c, 0)$, волновая адиабата (4.1) удовлетворяет условиям теоремы 2. Это означает, что та ее часть, которой на рис. 4 соответствует отрезок $[A_1, A_2]$, расположенный выше линии критических течений

$$v = \bar{v}_c(h) = -\sqrt{gh}, \quad (4.5)$$

переводится соотношением (3.1) через разрыв L в строго монотонно возрастающую функцию, график которой $v = \bar{V}_s(h)$ представляет собой отрезок $[A_1, B_2]$, лежащий в области докритических течений.

Обозначим через \bar{h}_l точку на оси h , из которой выходит ударная r -адиабата (4.2), проходящая через точку B_2 на рис. 4. Тогда при $h_l \in [\bar{h}_l, h_r)$ однозначная разрешимость задачи (1.3), (1.4), приводящая к формированию течения, показанного линией 1 на рис. 3, обусловлена строго монотонным возрастанием и убыванием функций $\bar{V}_s(h)$ и $\bar{v}_r(h, h_l)$ соответственно. При этом на рис. 4 прерывной волне S соответствует участок $\bar{D}\bar{B}$ ударной адиабаты \bar{v}_r (\bar{B} — точка с координатами h_1, v_1), разрыву L — ударный переход $\bar{B}\bar{A}$ по формуле (2.6) (\bar{A} — точка с координатами h_0, v_0), волне понижения R — участок $\bar{A}\bar{A}_1$ волновой адиабаты \bar{v}_s .

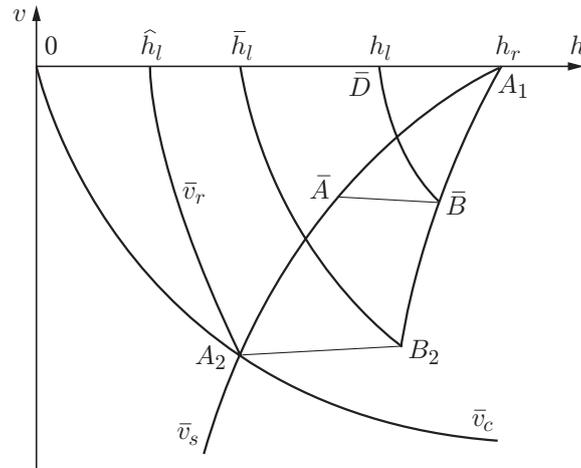


Рис. 4. Диаграмма адиабат для построения решений при начальных глубинах $h_l < h_r$, удовлетворяющих условию $h_l \in [\bar{h}_l, h_r)$

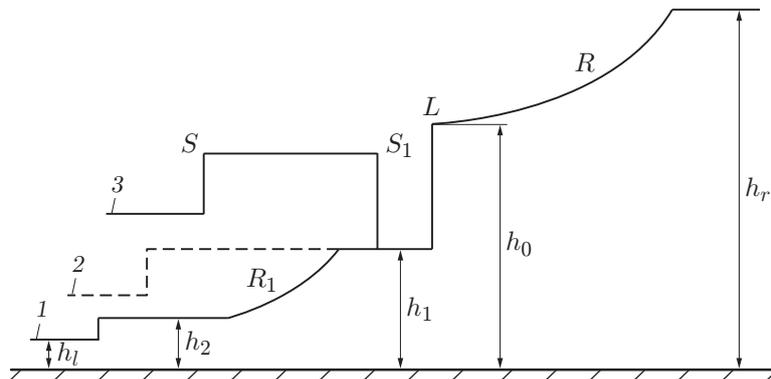


Рис. 5. Характерные профили волн, получаемые при начальных глубинах $h_l < h_r$:
 1 — $h_l \in (0, \hat{h}_l)$; 2 — $h_l = \hat{h}_l$; 3 — $h_l \in (\hat{h}_l, h_l^*)$

4.2. *Неподтопленные режимы течения на скачке ширины канала.* Предположим, что начальная глубина h_l слева от разрыва (1.4) удовлетворяет неравенству $h_l < \bar{h}_l$, в силу чего левая граница волны понижения R , распространяющейся по фону h_r (рис. 5), находится непосредственно на разрыве (1.4) в точке $x = 0+0$. Параметры этого критического течения

$$h_0 = 4h_r/9, \quad v_0 = -2\sqrt{gh_r}/3 \tag{4.6}$$

являются координатами точки A_2 на рис. 4, в которой пересекаются волновая s -адиабата (4.1), линия критических течений (4.5) и ударная адиабата (4.2), проходящая через точку \hat{h}_l на оси h . В этом случае справа на разрыв (1.4) приходят две характеристики системы (1.1), (1.2), создавая на нем неподтопленный режим течения, при котором параметры потока h_1, v_1 слева от разрыва (1.4) в точке $x = 0 - 0$ не оказывают влияния на течение справа от него.

Поскольку течение (4.6) справа от скачка (1.4) является критическим, для устойчивости возникающего на нем гидравлического разрыва L необходимо, чтобы течение h_1, v_1 слева от скачка (1.4) было сверхкритическим. С учетом соотношений (1.7), (1.8) параметры сверхкритического течения h_1, v_1 (точка C на рис. 6) однозначно определяются из уравнения (2.6). После этого построение решения слева от разрыва L при $x < 0$ сводится к решению для системы (1.1), (1.2) классической задачи о распаде разрыва над

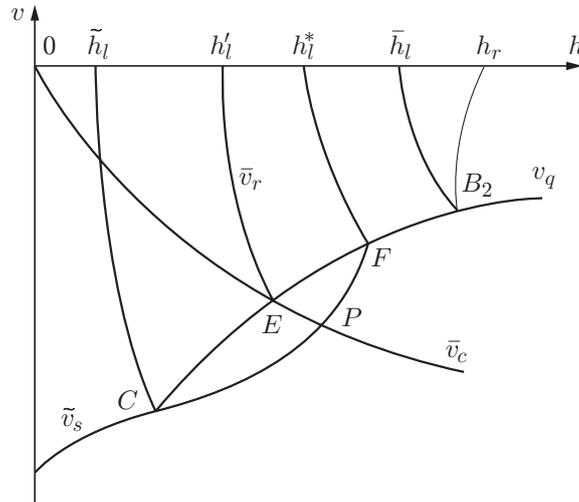


Рис. 6. Диаграмма адиабат для построения решений при начальных глубинах $h_l < h_r$, удовлетворяющих условию $h_l \in (0, \tilde{h}_l)$

горизонтальным дном [3] со следующими начальными данными:

$$h(x, 0) = \begin{cases} h_l, & x < 0, \\ h_1, & x \geq 0, \end{cases} \quad v(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ v_1, & x \geq 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Для решения задачи (4.7) необходимо найти точку (h_2, v_2) пересечения монотонно убывающей ударной r -адиабаты (4.2) и монотонно возрастающей s -адиабаты

$$v = \tilde{v}_s(h, h_1, v_1) = v_1 + \varphi(h, h_1), \quad \varphi(h, h_1) = \begin{cases} \bar{v}_s(h, h_1), & h \leq h_1, \\ -\bar{v}_r(h, h_1), & h \geq h_1, \end{cases} \quad (4.8)$$

проходящей через точку $C(h_1, v_1)$ (функции \bar{v}_s, \bar{v}_r определяются по формулам (4.1), (4.2)). Скорость прерывной волны S , распространяющейся по фону h_l , вычисляется по формуле

$$D = -\sqrt{gh_2(h_l + h_2)/(2h_l)}. \quad (4.9)$$

Предположим сначала, что $h_l \in (0, \tilde{h}_l)$, где \tilde{h}_l — координата точки на оси h , при которой ударная адиабата $\bar{v}_r(h, \tilde{h}_l)$ проходит через точку C . Тогда ударная r -адиабата (4.2) пересекает волновой участок s -адиабаты (4.8) (левее точки C на рис. 6), формируя при $x < 0$ сверхкритическое течение с прерывной волной S и волной понижения R_1 (линия 1 на рис. 5). При $h_l = \tilde{h}_l$ слева от разрыва L волна понижения R_1 вырождается и постоянное сверхкритическое течение h_1, v_1 продолжается непосредственно до фронта волны S (штриховая линия 2 на рис. 5). Предположим теперь, что $h_l \in (\tilde{h}_l, H_l)$, где H_l — координата точки, в которой s -адиабата (4.8) пересекает ось h . Тогда ударная r -адиабата (4.2) пересекает ударный участок s -адиабаты (4.8) (правее точки C на рис. 6), формируя при $x < 0$ течение с двумя прерывными волнами S и S_1 , первая из которых распространяется со скоростью D , определяемой по формуле (4.9), а вторая — со скоростью

$$D_1 = v_1 + \sqrt{gh_2(h_1 + h_2)/(2h_1)} > D. \quad (4.10)$$

Для общей задачи (1.1)–(1.4) построенное решение с двумя прерывными волнами при $x < 0$ (линия 3 на рис. 5) имеет смысл только в том случае, если прерывная волна S_1 имеет отрицательную скорость $D_1 < 0$, что эквивалентно условию $h_2 < h_2^*$, где h_2^* — корень уравнения (4.10) при $D_1 = 0$:

$$h_2^* = h_1(\sqrt{1 + 8v_1^2/(gh_1)} - 1)/2.$$

При глубине $h_2 = h_2^*$ прерывная волна S_1 сливается с разрывом L , при этом формируется стоячий скачок, скорость за которым равна $v_2^* = q/(b_l h_2^*)$, где q — расход на разрыве L , задаваемый формулой (2.7). Следовательно, точка $F(h_2^*, v_2^*)$ лежит на пересечении ударного участка s -адиабаты (4.8) (линия CPF на рис. 6) с участком гиперболы

$$v = v_q(h) = q/(b_l h), \quad q = b_r h_0 v_0, \quad (4.11)$$

расположенной в области докритических течений (линия EFB_2 на рис. 6). При этом точка F лежит на гиперболе (4.11) между точками E и B_2 (E — точка пересечения гиперболы v_q и линии критических течений \bar{v}_c), поскольку на гидравлическом прыжке S_1 полная энергия потока теряется, а на разрыве L сохраняется.

Таким образом, решения с двумя прерывными волнами при $x < 0$ существуют только при условиях $h_l \in (h_l, h_l^*)$, $h_l^* \in (h_l', \bar{h}_l)$, где h_l^* , h_l' — координаты точек на оси h , из которых выходят ударные r -адиабаты $\bar{v}_r(h, h_l^*)$ и $\bar{v}_r(h, h_l')$, проходящие соответственно через точки F и E на рис. 6. Таким образом, при выполнении условий (1.7), (1.8) неподтопленные режимы течения могут существовать только при начальной глубине $h_l < h_l^* < \bar{h}_l$. Это означает, что задача о разрушении плотины (1.1)–(1.4) при

$$h_l < h_r, \quad h_l \in [h_l^*, \bar{h}_l] \quad (4.12)$$

неразрешима в рамках предположения о сохранении полной энергии потока на скачке ширины канала (1.4).

4.3. Течения, в которых полная энергия потока теряется на скачке ширины канала. Поскольку при условии (4.12) задача о разрушении плотины (1.1)–(1.4) неразрешима в рамках соотношений (1.7), (1.8), рассмотрим ее решения, в которых полная энергия потока теряется на разрыве L , возникающем на скачке (1.4). Для построения таких решений будем предполагать, что на разрыв L приходят три характеристики системы (1.1), (1.2), а уходит с него только одна характеристика. В этом случае для замыкания условий на разрыве L достаточно потребовать выполнения условия непрерывности расхода (1.7).

Для того чтобы при решении задачи (1.1)–(1.4) одна характеристика уходила с разрыва L , левая граница волны понижения R , распространяющейся по фону h_r , должна находиться в точке $x = 0 + 0$, формируя в ней критическое течение (4.6), а между прерывной волной S , распространяющейся по фону h_l , и разрывом L должно сформироваться постоянное докритическое или критическое течение (линия 2 на рис. 3). Параметры этого течения определяются как координаты точки $Q(h_1, v_1)$, в которой ударная r -адиабата (4.2) пересекает гиперболу (4.11).

Из энергетического критерия устойчивости прерывных волн [3] следует, что полная энергия потока не должна возрастать при переходе через разрыв L . Это означает, что точка Q должна лежать на гиперболе (4.11) между точками E и B_2 (см. рис. 6). Таким образом, течения, в которых полная энергия потока теряется на скачке площади сечения (1.4), существуют при начальной глубине нижнего бьефа $h_l \in (h_l', \bar{h}_l)$.

Следовательно, в случае, когда с разрыва L уходит одна характеристика, задача о разрушении плотины (1.1)–(1.4) разрешима при всех начальных глубинах $h_r > h_l > 0$. Однако разрешима она неоднозначно, поскольку при $h_l \in (h_l', h_l^*)$ наряду с решением, содержащим две прерывные волны в нижнем бьефе (линия 3 на рис. 5), в котором полная энергия на разрыве L сохраняется, существует решение с одной прерывной волной в нижнем бьефе (линия 2 на рис. 3), в котором полная энергия на разрыве L теряется. Какой из этих режимов течения реализуется, зависит от конкретных условий проведения лабораторных экспериментов.

Заключение. В работе показано, что задача о разрушении плотины (1.1)–(1.3) на скачке ширины канала (1.4) при $h_l > h_r$, $b_l > b_r$ (когда в верхнем бьефе ширина русла больше, чем в нижнем) имеет два качественно различных типа решений (см. рис. 1).

Та же задача при $h_l < h_r$, $b_l > b_r$ (когда в верхнем бьефе ширина русла меньше, чем в нижнем) имеет пять качественно различных типов решений (см. рис. 3, 5). Для изучения точности этих решений необходимо провести сравнение с результатами лабораторных экспериментов и численного моделирования на основе плановых уравнений теории мелкой воды.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Стокер Дж. Дж.** Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
2. **Ляпидевский В. Ю.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
3. **Остапенко В. В.** Гиперболические системы законов сохранения и их приложение к теории мелкой воды. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2004.
4. **Дулов В. Г.** Распад произвольного разрыва параметров газа на скачке площади сечения // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. математики, механики и астрономии. 1958. № 19, вып. 4. С. 76–99.
5. **Яушев И. К.** Распад произвольного разрыва в канале со скачком площади сечения // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1967. № 8, вып. 2. С. 109–120.
6. **Рождественский Б. Л.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. М.: Наука, 1978.
7. **Кэхейн А., Уоррен В., Гриффит В. Г., Марино А.** Теоретическое и экспериментальное изучение распространения волн конечной амплитуды в каналах переменного сечения // Механика. 1955. Вып. 4. С. 12–38.
8. **Остапенко В. В.** Течения, возникающие при разрушении плотины над ступенькой дна // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 4. С. 51–63.
9. **Остапенко В. В.** Течения, возникающие при разрушении плотины над уступом дна // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 6. С. 107–122.
10. **Букреев В. И., Гусев А. В., Остапенко В. В.** Распад разрыва свободной поверхности жидкости над уступом дна канала // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 6. С. 72–83.
11. **Букреев В. И., Гусев А. В., Остапенко В. В.** Волны в открытом канале, образующиеся при удалении щита перед неровным дном типа шельфа // Вод. ресурсы. 2004. Т. 31, № 5. С. 1–6.

*Поступила в редакцию 15/VII 2011 г.,
в окончательном варианте — 18/I 2012 г.*