

УДК 532.59

## ДИСПЕРСИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ И БЛОКИРОВКА ПОТОКА ПРИ ОБТЕКАНИИ ПОРОГА

В. Ю. Ляпидевский, К. Н. Гаврилова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск  
E-mails: liapid@hydro.nsc.ru, kirgvr@ngs.ru

В длинноволновом приближении рассматривается задача обтекания локального препятствия потоком однородной тяжелой жидкости. Для описания стационарных и нестационарных волн в окрестности препятствия используются модели второго приближения теории мелкой воды, а также их гиперболические аппроксимации. Исследованы течения в окрестности передней и задней кромок плохообтекаемого тела (порог, ступенька), построено решение задачи о заблокированной зоне перед ступенькой.

**Ключевые слова:** однородная жидкость, уравнения теории мелкой воды, дисперсионные эффекты, течение над порогом.

### ВВЕДЕНИЕ

Второе приближение теории мелкой воды используется для моделирования взаимодействия нелинейных волн. Существуют различные варианты уравнений, учитывающих в длинноволновом приближении влияние дисперсионных эффектов на структуру нелинейных поверхностных и внутренних волн [1–5]. В последнее время для описания этих эффектов в течениях однородной жидкости со свободной границей предлагаются альтернативные формулировки моделей, описывающих эволюцию нелинейных дисперсионных волн в рамках гиперболических систем уравнений теории мелкой воды [4]. В этих моделях влияние негидростатичности распределения давления учитывается введением в уравнения дополнительных “внутренних” переменных. Предварительный анализ показывает, что наряду с более распространенными негиперболическими моделями, соответствующими второму приближению уравнений теории мелкой воды, гиперболические дисперсионные модели могут быть использованы для описания эволюции поверхностных волн над неровным дном. Основным преимуществом дисперсионных гиперболических уравнений теории мелкой воды является существенное упрощение алгоритмов численного расчета многомерных нестационарных течений, а также постановки граничных условий, в частности в окрестности береговой линии.

Другой класс проблем, для которых дисперсионные гиперболические уравнения допускают более ясную постановку задачи по сравнению с моделями второго приближения, связан с формулировкой условий контроля течения вверх по потоку путем введения в канал локального препятствия. В гидравлике открытых русел условия такого типа определены для классических уравнений теории мелкой воды. Локальное препятствие контролирует поток, если в его окрестности реализуется стационарное транскритическое течение. При этом для течений в плоском канале условие критичности течения над гребнем определяет соотношение между расходом и глубиной потока непосредственно перед препятствием

и не зависит от его формы. Для второго приближения условия критичности потока заменяются более сложными условиями существования регулярного стационарного течения в окрестности локального сужения канала и не допускают соответствующего обобщения при анализе нестационарных задач. Поэтому гиперболический аналог уравнений второго приближения теории мелкой воды может быть эффективно использован для формулировки граничных условий в задаче о течении жидкости в канале конечной длины.

В данной работе изучены стационарная и нестационарная задачи плоскопараллельного обтекания локального препятствия потоком однородной тяжелой жидкости. Модели Грина — Нагди [2, 3], Серр [6] и их гиперболические аппроксимации применены для анализа волновой структуры в окрестности препятствия. Исследованы течения в окрестности передней и задней кромок плохообтекаемого тела (порог, ступенька), построено решение задачи о заблокированной зоне перед ступенькой.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

**1.1. Гиперболические дисперсионные модели.** Для описания нелинейных диспергирующих волн в сплошных средах используется следующая система уравнений [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + P)}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\rho$  — плотность среды;  $u$  — средняя скорость.

В отличие от уравнений газовой динамики, описывающих баротропные течения, предполагается, что давление  $P$  зависит не только от плотности, но и от ее материальных производных:

$$P = P\left(\rho, \frac{d\rho}{dt}, \frac{d^2\rho}{dt^2}\right), \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2)$$

К рассматриваемому классу относятся уравнения пузырьковых жидкостей, уравнения теории мелкой воды и др. [1–3]. Эти уравнения используются для описания сред с “внутренней инерцией” — неоднородных сред, в которых часть полной энергии переходит в энергию мелкомасштабных движений, что оказывает существенное влияние на волновую структуру течений. При численной реализации одномерных моделей, а тем более многомерных аналогов (1), (2), возникают проблемы постановки граничных условий (например, в задаче о накате волн на берег), обусловленные негиперболическостью рассматриваемой системы.

Данные проблемы частично решаются при построении гиперболической аппроксимации (1). В [4] для второго приближения теории мелкой воды получены системы неоднородных гиперболических уравнений, занимающие промежуточное положение между первым и вторым приближениями. Гиперболическая модель получается дополнительным осреднением уравнений второго приближения и введением новых “внутренних” переменных. Масштаб осреднения считается достаточно малым, что позволяет заменить в уравнениях значения переменных  $\rho$  и  $u$  на их средние значения, но при вычислении полного давления используются производные от “мгновенных” значений плотности  $\tilde{\rho}$  и скорости  $\tilde{u}$ . Применительно к (1) это означает, что давление зависит от осредненной плотности  $\rho$  и материальных производных  $\tilde{\rho}$ :

$$P = P\left(\rho, \frac{d\tilde{\rho}}{dt}, \frac{d^2\tilde{\rho}}{dt^2}\right), \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}.$$

Связь между осредненными и “внутренними” переменными находится из разложения по формуле Тейлора функции  $\tilde{\rho}(s, \xi) = \tilde{\rho}(s)$  вдоль траектории  $x = x(s, \xi)$  ( $\xi$  — фиксированная лагранжева координата частицы):

$$\tilde{\rho}(s) = \tilde{\rho}(t) + \tilde{\rho}'(t)(s - t) + \tilde{\rho}''(t)(s - t)^2/2 + o(\tau^2), \quad s \in (t - \tau, t + \tau). \quad (3)$$

В силу (3) среднее значение  $\rho(t)$  связано с мгновенным значением  $\tilde{\rho}(t)$  соотношением

$$\rho(t) = \frac{1}{2\tau} \int_{t-\tau}^{t+\tau} \tilde{\rho}(s) ds = \tilde{\rho}(t) + \frac{1}{6} \tilde{\rho}''(t)\tau^2 + o(\tau^2), \quad (4)$$

которое можно представить в виде

$$\tilde{\rho}''(t) = \alpha(\rho(t) - \tilde{\rho}(t)) + O(\tau), \quad \alpha = 6/\tau^2. \quad (5)$$

Используя главную часть в представлении (4) или (5), получаем осредненные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + \bar{P})}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} &= v, & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} &= \alpha(\rho - \tilde{\rho}). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\bar{P}(\rho, \tilde{\rho}, v) = P(\rho, v, \alpha(\rho - \tilde{\rho}))$ .

Для широкого класса сплошных сред уравнения (6) представляют собой неоднородную гиперболическую систему с двумя “звуковыми” и двумя контактными характеристиками. При увеличении параметра  $\alpha$  (уменьшении интервала осреднения  $\tau$ ) решения (6) аппроксимируют решения исходной системы (1). Более подробно свойства гиперболических дисперсионных систем изучаются далее на примере второго приближения уравнений теории мелкой воды.

**1.2. Гиперболическая аппроксимация уравнений Грина — Нагди.** Для описания эволюции длинных диспергирующих волн над неровным дном используются различные варианты второго приближения теории мелкой воды. В данной работе рассматриваются уравнения Грина — Нагди [1, 2], наиболее подходящие для расчета транскритических течений однородной тяжелой жидкости в окрестности локального двумерного препятствия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x} \left( hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 + \frac{1}{3}h^2 \frac{d^2h}{dt^2} + \frac{1}{2}h^2 \frac{d^2z}{dt^2} \right) + \left( \frac{1}{2} \frac{d^2h}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2} + g \right) h z_x &= 0, \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $h$  — глубина;  $u$  — скорость потока;  $z = z(x)$  — форма дна;  $g$  — ускорение свободного падения. Для течений над горизонтальным дном ( $z \equiv 0$ ) дифференциальным следствием (7) является закон сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( h \left( \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}gh + \frac{1}{6} \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( hu \left( \frac{1}{2}u^2 + gh + \frac{1}{6} \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 + \frac{1}{3}h \frac{d^2h}{dt^2} \right) \right) = 0. \quad (8)$$

Гиперболическая аппроксимация (7), (8) состоит в замене производных  $dh/dt$  и  $d^2h/dt^2$  на соответствующие значения для мгновенной глубины  $\eta$  и  $d\eta/dt = v$  (см. подп. 1.1).

Система уравнений для осредненных переменных  $h$ ,  $u$  и “внутренних” переменных  $\eta$ ,  $v$  может быть записана в виде законов сохранения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 + \frac{1}{3}\alpha h^2(h-\eta)\right) &= 0; & (9) \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(h\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}gh + \frac{1}{6}\alpha(h-\eta)^2 + \frac{1}{6}v^2\right)\right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x}\left(hu\left(\frac{1}{2}u^2 + gh + \frac{1}{6}\alpha(h-\eta)^2 + \frac{1}{6}v^2 + \frac{1}{3}\alpha h(h-\eta)\right)\right) &= 0, & (10) \\ \frac{\partial}{\partial t}(h\eta) + \frac{\partial}{\partial x}(hu\eta) &= hv. \end{aligned}$$

Заметим, что в силу (9) уравнения (10) могут быть заменены следующей недивергентной системой уравнений:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha(h - \eta). \quad (11)$$

Так как системы (9), (10) и (9), (11) эквивалентны на гладких решениях, то при  $\alpha \rightarrow \infty$  уравнения (9), (10) аппроксимируют исходную систему (7).

Характеристики системы (9), (10) (или (9), (11)) представляются следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda^\pm = u \pm \sqrt{\left(g + \alpha\left(h - \frac{2}{3}\eta\right)\right)h}, \quad \frac{dx}{dt} = \lambda_0 = u$$

( $\lambda_0$  — кратная характеристика).

Заметим, что для аппроксимации (7) должно выполняться условие

$$|h - \eta| \ll h. \quad (12)$$

Поэтому в окрестности равновесного течения ( $h \equiv \eta$ ) уравнения (9), (10) являются уравнениями гиперболического типа. Кроме того, необходимо отметить следующее: как и для второго приближения теории мелкой воды, приближенная система записывается неоднозначно, так как в силу (12) в коэффициентах перед старшими производными и их аппроксимацией средняя глубина  $h$  может быть заменена мгновенной глубиной  $\eta$ . Такая замена сохраняет длинноволновую асимптотику решений в окрестности равновесного течения, но приводит к изменению дисперсионных свойств системы. Это обстоятельство используется ниже для упрощения уравнений в задаче об обтекании локального препятствия потоком однородной жидкости.

Для течений над неровным дном требуется аппроксимировать также производную  $d^2z/dt^2$ , которая для неподвижного дна  $z = z(x)$  представляется в виде

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{du}{dt} z' + u^2 z''. \quad (13)$$

Если в (13) по аналогии с представлением  $d^2h/dt^2$  через мгновенные значения  $\eta$  и  $v$  заменить скорость  $u$  и ее производную  $du/dt$  мгновенными значениями  $w$  и  $\theta$  соответственно, то система будет замыкаться уравнениями (11). Тогда

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} = \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} = \alpha(u - w). \quad (14)$$

Полученная система является гиперболической при выполнении условий

$$|h - \eta| \ll h, \quad |\theta z' + w^2 z''| \ll g. \quad (15)$$

Как отмечено выше, первое условие представляет собой условие аппроксимации решений исходной системы (7). Второе ограничение в (15) гарантирует малость вертикального ускорения слоя жидкости, вызванного обтеканием локального препятствия, поэтому также является естественным для уравнений второго приближения теории мелкой воды. Тем не менее при расчетах обтекания плохообтекаемых тел условия гиперболичности (15), как правило, нарушаются, что сужает область применимости построенной модели.

Область гиперболичности приближенной системы (7) можно расширить путем замены средней глубины  $h$  на мгновенную глубину  $\eta$  в коэффициентах системы (7) перед вторыми производными  $d^2h/dt^2$  и  $d^2z/dt^2$ . При этом в силу (12) сохраняется порядок аппроксимации исходной системы уравнений.

Уравнения сохранения массы и импульса принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 + \frac{1}{3}\alpha\eta^2(h-\eta) + \frac{1}{2}\eta^2(\theta z' + w^2 z'') \right) + \\ &+ \left( \frac{1}{2}\alpha(h-\eta) + \theta z' + w^2 z'' + g \right) h z' = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Замкнутая система уравнений (11), (14), (16) является гиперболической на произвольном решении. Характеристики этой системы можно представить следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda^\pm = u \pm \sqrt{g \left( h + \frac{\beta}{3} \frac{\eta^2}{h_0} \right)}, \quad \frac{dx}{dt} = u. \quad (17)$$

Здесь  $\beta = \alpha h_0/g$  — безразмерный параметр ( $\beta \gg 1$ ). Параметр  $\beta$  и характерная глубина  $h_0$  зависят от выбранного масштаба осреднения  $\tau = \sqrt{6h_0/(\beta g)}$  при  $\alpha = 6/\tau^2$ . Таким образом, в отличие от первого и второго приближений теории мелкой воды гиперболическая система (11), (14), (16) содержит дополнительный параметр  $\beta$ , зависящий от выбранного масштаба осреднения исходной модели. При  $\beta \rightarrow \infty$  решения уравнений (11), (14), (16) аппроксимируют решения уравнений Грина — Нагди, а при  $\beta \rightarrow 0$  в пределе дают решения уравнений мелкой воды.

Следует отметить, что при изменении параметра  $\beta$  от бесконечности до нуля с помощью системы (11), (14), (16) осуществляется переход от гладких волновых фронтов, характерных для второго приближения теории мелкой воды, к прерывным волнам, возникающим в классической теории мелкой воды. В частности, эта система содержит гладкие солитонобразные решения, описывающие распространение локализованных возмущений жидкости с сохранением формы свободной поверхности в горизонтальном канале. Так как равновесной моделью для построенной гиперболической дисперсионной модели является первое приближение теории мелкой воды, гладкие солитоны существуют для скоростей их распространения, заключенных между “равновесной” скоростью распространения длинных волн  $\lambda_e^\pm = u \pm \sqrt{gh}$  и “замороженной” скоростью  $\lambda^\pm$ , задаваемой уравнением (17) [5, гл. 10]. Поэтому при достаточно больших значениях параметра  $\beta$  структура нелинейных волновых фронтов является гладкой. В п. 2 свойства решений для гиперболической аппроксимации уравнений Грина — Нагди рассматриваются более подробно на примере задачи об обтекании потоком локального препятствия.

## 2. СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Рассматриваются стационарные возмущения равномерного потока ( $h = h_0, u = u_0 > 0$ ) при обтекании локального симметричного препятствия:  $z(x - x_0) = z(x_0 - x)$ ,

$z(x) = 0$  при  $|x - x_0| > l$ . Предполагается, что на достаточно большом расстоянии от препятствия вверх по потоку ( $x \rightarrow -\infty$ ) течение не возмущено. В зависимости от начального числа Фруда  $Fr = u_0/\sqrt{gh_0}$  (значения  $Fr > 1$  соответствуют сверхкритическому течению,  $Fr < 1$  — докритическому течению) в окрестности препятствия реализуются различные волновые конфигурации. Классические уравнения теории мелкой воды позволяют только определить режим обтекания (сверхкритическое, докритическое, транскритическое течения) в зависимости от максимальной высоты препятствия  $z_{\max} = z(x_0)$ . При этом режим течения не зависит от формы препятствия. Учет дисперсии делает волновую картину более многообразной.

**2.1. Сверхкритическое обтекание препятствия.** Уравнения стационарного течения для модели Грина — Нагди и ее гиперболической аппроксимации могут быть частично проинтегрированы. В силу (8) стационарные решения (7) определяются следующими интегралами:

$$\begin{aligned} hu &= Q = \text{const}, \\ (1/2)u^2 + g(h + z) + (1/6)u^2(2hh'' - (h')^2) + 3k((z')^2 + hz'') &= J = \text{const}. \end{aligned} \quad (18)$$

Значение параметра  $k = 1$  соответствует модели Грина — Нагди (7), значение  $k = 0$  — интегралам движения для модели [6]. Вне препятствия ( $z \equiv 0$ ) система уравнений (18) сводится к одному уравнению первого порядка [7]

$$(h')^2 = \frac{3}{Fr^2 h_0^3} (h - h_0)^2 (Fr^2 h_0 - h), \quad |x - x_0| > l, \quad (19)$$

которое может быть проинтегрировано в квадратурах. При  $Fr < 1$  и  $x < x_0 - l$  не существует отличного от равномерного ( $h \equiv h_0$ ) течения с указанной выше асимптотикой при  $x \rightarrow -\infty$ . При  $Fr > 1$  возмущение стационарного решения представляет собой солитон, форма которого задается следующей зависимостью:

$$x = x_m \pm \int_{h_m}^h \frac{Fr h_0^{3/2} dh}{(h - h_0)\sqrt{3(Fr^2 h_0 - h)}}, \quad h_m = Fr^2 h_0. \quad (20)$$

При  $Fr = 1$  уравнение (19) принимает вид

$$(h')^2 = 3(h_0 - h)^3/h_0^3. \quad (21)$$

Допустимое решение (20), (21) ( $h \leq h_0$ ) является монотонным. Это решение используется ниже в задаче о течении критического потока с уступа.

При сверхкритическом обтекании ( $Fr > 1$ ) локального препятствия могут реализоваться течения двух типов, полученные возмущением равномерного течения и уединенной волны. Так как вне препятствия течение либо является равномерным ( $h \equiv h_0$ ), либо представляет собой часть солитона, при  $|x - x_0| > l$  функция  $h(x)$  удовлетворяет (19). В силу симметрии препятствия ищется симметричное возмущенное течение, которое на интервале  $x_0 - l < x < x_0$  определяется решением (18) со следующими краевыми условиями:

$$h'(x_0) = 0, \quad h'(x_0 - l) = \left( \frac{3(Fr^2 h_0 - h)}{Fr^2 h_0^3} \right)^{1/2} (h - h_0). \quad (22)$$

Решение задачи (18), (22) может быть найдено численно при заданной форме препятствия. На интервале  $x_0 < x < x_0 + l$  полученное решение симметрично относительно центра препятствия  $x = x_0$ . На рис. 1 показаны решения задачи о сверхкритическом обтекании препятствия ( $Fr = 1,5$ ,  $z = (1/2)z_{\max}[1 + (3/8)((\varepsilon - |x|)/\varepsilon)^5 - (5/4)((\varepsilon - |x|)/\varepsilon)^3 + (15/8)(\varepsilon - |x|)/\varepsilon]$ ,  $|x| < l$ ,  $\varepsilon = l/2$ ,  $z_{\max} = 0,26h_0$ ,  $l = 2,62h_0$ ).

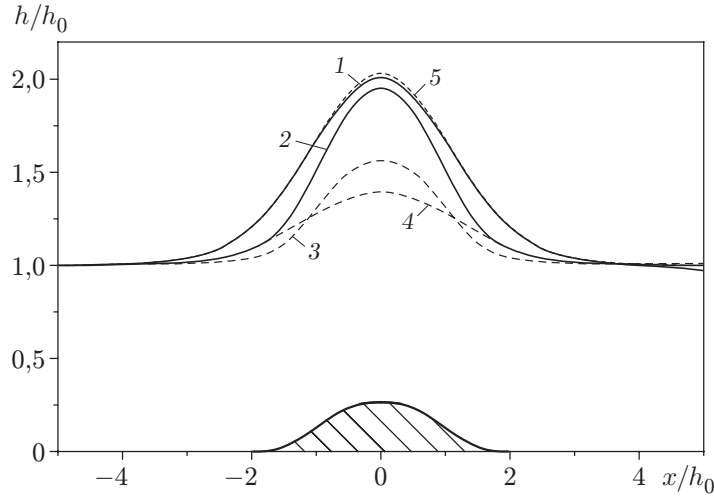


Рис. 1. Сверхкритическое обтекание препятствия ( $Fr = 1,5$ ,  $z_{\max}/h_0 = 0,26$ ):  
 1, 2 — солитон (уравнения (18)) ( $1 - k = 1$ ;  $2 - k = 0$ ); 3, 4 — возмущения равномерного потока (уравнения (18)); (3 —  $k = 1$ ; 4 —  $k = 0$ ); 5 — солитон (гиперболическая модель (23))

Следует отметить, что для относительно короткого препятствия, показанного на рис. 1, решения (18) при  $k = 0, 1$  существенно различаются. При увеличении длины препятствия (с сохранением его формы) кривые сближаются, т. е. для моделирования обтекания достаточно плавного возвышения дна может применяться упрощенная модель (18) при  $k = 0$  [6].

Стационарные симметричные решения гиперболической модели удовлетворяют следующим уравнениям, вытекающим из (11), (14), (16):

$$\eta' = \frac{v}{u}, \quad v' = \frac{\alpha(h - \eta)}{u}, \quad w' = \frac{\theta}{u}, \quad \theta' = \frac{\alpha(u - w)}{u},$$

$$h' = \frac{1}{\Delta} \left( \left( \frac{2\alpha}{3} \eta(h - \eta) - \frac{\alpha}{3} \eta^2 + \eta(\theta z' + w^2 z'') \right) \eta' + \frac{1}{2} \eta^2 \theta' z' + \eta^2 w z'' w' + \right. \quad (23)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \eta^2 \theta z'' + \frac{1}{2} \eta^2 w^2 z''' + h z' \left( \frac{1}{2} \alpha(h - \eta) + \theta z' + w^2 z'' + g \right) \right),$$

$$hu = Q, \quad \Delta = u^2 - gh - (1/3)\alpha\eta^2.$$

Для течений над ровным дном ( $z \equiv 0$ ) уравнения (23) существенно упрощаются. Единственным безразмерным параметром, определяющим течение с заданной асимптотикой ( $h \rightarrow h_0$ ,  $u \rightarrow u_0$  при  $x \rightarrow -\infty$ ), является число Фруда  $Fr = u_0/\sqrt{gh_0}$ . С учетом этой асимптотики стационарные решения (16) удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$hu = h_0 u_0 = Q, \quad hu^2 + gh^2/2 + \alpha\eta^2(h - \eta)/3 = h_0 u_0^2 + gh_0^2/2 = M, \quad u(u\eta')' = \alpha(h - \eta). \quad (24)$$

Из первых двух уравнений (24) находятся зависимости  $u = u(h)$  и  $\eta = \eta(h)$ . Заметим, что

$$\frac{d\eta}{dh} = a(h) = \frac{gh + \alpha\eta^2/3 - Q^2/h^2}{\alpha\eta(\eta - 2h/3)} > 0$$

при  $u^2 = Q^2/h^2 < gh + \alpha\eta^2/3$ ,  $h - \eta < \eta/2$ . Первое из этих условий, являющееся условием докритичности стационарного течения, выполняется при достаточно больших значениях

параметра  $\alpha$  (малых временах осреднения  $\tau$ ). Второе условие также согласуется с условием аппроксимации (12). Поэтому можно считать, что неявная зависимость  $\eta = \eta(h)$  взаимно однозначна.

Последнее уравнение в (24) с учетом зависимостей  $u = u(h)$  и  $\eta = \eta(h)$  может быть проинтегрировано:

$$\frac{1}{2} Q^2 \frac{a^2(h)}{h^2} (h')^2 = F(h) = \int_{h_0}^h \alpha(s - \eta(s)) a(s) ds. \quad (25)$$

Поведение функции  $F(h)$  в окрестности точки  $h_0$  определяет структуру стационарного решения (24). Так как из (24) следует, что  $\eta(h_0) = h_0$ , то

$$\frac{dF}{dh}(h_0) = 0, \quad \frac{d^2F}{dh^2}(h_0) = \alpha a(h_0)(1 - a(h_0)).$$

Таким образом, в окрестности  $h = h_0$  функция  $F(h)$  положительна тогда и только тогда, когда  $0 < a(h_0) < 1$  или

$$\sqrt{gh_0} < u_0 < \sqrt{gh_0 + \alpha h_0^2/3}. \quad (26)$$

Условие (26) является необходимым условием существования гладкого солитонообразного решения (24). При

$$u_0 > \sqrt{gh_0 + \alpha h_0^2/3}$$

гладкого решения, описывающего возмущение равномерного потока, не существует и реализуется конфигурация типа прыжок — волна, состоящая из решения задачи о гидравлическом прыжке и примыкающего к нему периодического решения [4, гл. 6]. В данной работе эта конфигурация не рассматривается, поэтому условия (26) предполагаются выполненными. Заметим, что для заданного сверхкритического потока ( $Fr > 1$ ) выполнение условий (26) обеспечивается выбором достаточно большого значения параметра  $\alpha$  при аппроксимации (7).

При построении задачи о сверхкритическом обтекании локального симметричного препятствия в рамках модели (24), как и для уравнений (18), вне интервала  $(x_0 - l, x_0 + l)$  течение считается равномерным ( $h \equiv h_0$ ) или представляет собой часть солитона, задаваемого уравнением (25). Поэтому для построения течения над передним склоном препятствия  $(x_0 - l < x < x_0)$  используются граничные условия, аналогичные (22):

$$h'(x_0) = 0, \quad h'(x_0 - l) = h(2F(h))^{1/2}/(Qa(h)). \quad (27)$$

На интервале  $(x_0, x_0 + l)$  полученное решение отражается симметрично:  $h(x - x_0) = h(x_0 - x)$ .

Кривая 5 на рис. 1 представляет собой решение задачи (24), (27) при  $Fr = 1,5$ ,  $\beta = 24$ , соответствующее возмущению солитонообразного решения. При таком выборе масштаба осреднения ( $\tau = (1/2)\sqrt{h_0/g}$ ) решения по полной модели (18) и ее гиперболическая аппроксимация (24) практически совпадают.

**2.2. Транскритические течения над препятствием.** Как отмечено выше, из (19) следует, что стационарных докритических течений ( $Fr < 1$ ), отличных от постоянного и являющихся возмущением равномерного течения ( $h \rightarrow h_0$  при  $x \rightarrow -\infty$ ), не существует. Поэтому в рамках модели (7) и ее гиперболической аппроксимации (11), (14), (16) стационарное решение возмущено только непосредственно над локальным препятствием ( $h \equiv \text{const}$  при  $x \in (-\infty, x_0 - l)$ ). При этом одной из наиболее важных проблем гидравлики



открытых русел является определение дополнительных соотношений между параметрами набегающего потока  $h_0$  и  $u_0$  в зависимости от формы препятствия. В первом приближении теории мелкой воды выделяется только два режима стационарного обтекания: докритический и транскритический. В первом случае препятствие только локально возмущает равномерный поток, во втором течение переводится в сверхкритическое за препятствием. В транскритических течениях дополнительным условием, обеспечивающим контроль течения вверх по потоку с помощью препятствия, является условие критичности течения над гребнем препятствия (при  $z = z_{\max}$ ). Поэтому при заданном расходе  $Q = h_0 u_0$  критическая глубина  $h_{cr}$  над гребнем определяется следующим образом:

$$h_{cr} = (Q^2/g)^{1/3},$$

число Фруда набегающего потока находится из интеграла Бернулли как функция  $Q$  и  $z_{\max}$ . При этом форма препятствия не влияет на полученные соотношения. Однако в случае достаточно коротких препятствий дисперсионные эффекты могут оказать существенное влияние на волновую структуру в окрестности препятствия и как следствие на соотношения, описывающие параметры набегающего потока. Для второго приближения теории мелкой воды (например, для уравнений (7)) условия критичности потока не формулируются в явном виде. Поэтому отбор допустимого стационарного решения производится на основе анализа поведения решений [7, 8]. При этом на интервале  $(-\infty, x_0 - l)$  течение не возмущено и для уравнения (18) ставятся следующие начальные условия:

$$h(x_0 - l) = h_0, \quad h'(x_0 - l) = 0. \quad (28)$$

При заданном расходе  $Q$  и препятствии в виде сглаженной ступеньки, форма которой удовлетворяет соотношениям

$$z(x) = \begin{cases} 0, & x < x_0 - \varepsilon, \\ \frac{1}{2} z_{\max} \left( 1 + \frac{3}{8} \left( \frac{x - x_0}{\varepsilon} \right)^5 - \frac{5}{4} \left( \frac{x - x_0}{\varepsilon} \right)^3 + \frac{15}{8} \frac{x - x_0}{\varepsilon} \right), & x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon, \\ z_{\max}, & x_0 + \varepsilon < x < l, \end{cases}$$

в зависимости от параметра  $h_0$  могут реализовываться различные режимы обтекания. На рис. 2 показаны решения задачи (18), (28) для близких значений параметра  $h_0$  при  $z_{\max} = 0,6h_{cr}$ ,  $l = 7,4h_{cr}$ . Изменение значения параметра  $h_0$  на десятые доли процента меняет решение с подветренными волнами (кривая 1) на монотонное решение с неограниченными производными (кривая 3). Ясно, что решение, соответствующее кривой 3, не может быть реализовано, так как давление на дне канала  $p \rightarrow -\infty$  и в течении возникнет отрыв потока. Особое (неустойчивое) решение (кривая 4), определяющее монотонный профиль свободной поверхности при переходе от докритического течения к равномерному сверхкритическому, дает необходимые значения параметра  $h_0$  в зависимости от формы обтекаемого препятствия.

Гиперболическая модель (23) также может быть использована для анализа транскритического режима обтекания препятствия. На рис. 2 кривой 2 показано стационарное решение (23), аппроксимирующее решение задачи (18), (28) при  $\alpha = 100h_{cr}/g$  ( $\beta = 100$ ). Следует отметить, что малые изменения параметра  $h_0$  для гиперболической модели также приводят к “градиентной катастрофе” в решении, причем существует “особое” решение, разделяющее эти режимы течения.

**2.3. Блокировка потока при обтекании порога.** В подп. 2.2 предполагалось, что над локальным препятствием реализуется безотрывный режим течения. В реальных течениях перед препятствием и за ним могут формироваться застойные зоны, меняющие

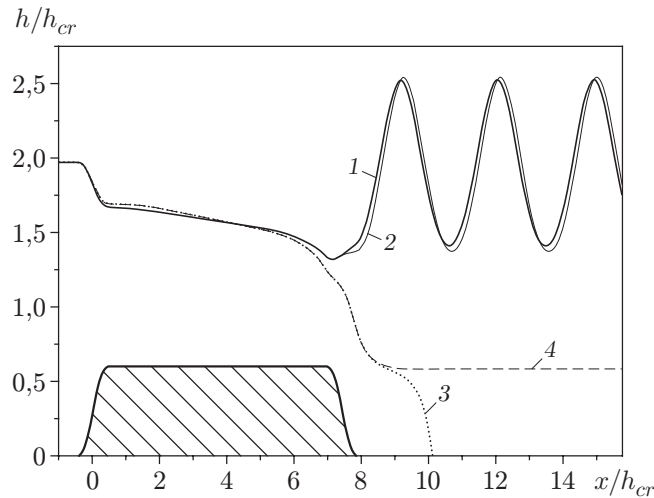


Рис. 2. Транскритическое течение над порогом:

1, 3 — решение задачи (18), (28) (1 — течение с подветренными волнами; 3 — решение с “градиентной катастрофой”); 2 — гиперболическая модель (23) при  $\beta = 100$ ; 4 — особое решение (18)

характер течения. В частности, за задней кромкой прямоугольного порога может образоваться каверна. В рамках модели (18) транскритическое течение над достаточно широким порогом ( $z = z_{\max}$ ) описывается уравнением (21), так как вдали от кромки равномерное течение должно быть критическим:

$$h = h_{cr} = (Q^2/g)^{1/3}.$$

Дополнительным условием, согласующимся с наличием каверны за препятствием, является равенство нулю давления на дне канала в окрестности задней кромки ( $x = x_1$ ):

$$p|_{x=x_1} = \left( gh + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{h^2} (hh'' - (h')^2) \right) \Big|_{x=x_1} = 0. \quad (29)$$

Так как над ровным дном ( $z \equiv z_{\max}$ ) уравнения (18) принимают вид

$$\frac{1}{2} \frac{Q^2}{h^2} + gh + \frac{1}{6} \frac{Q^2}{h^2} (2hh'' - h'^2) = \frac{3}{2} gh_{cr}, \quad (30)$$

то из (21) при  $h_0 = h_{cr}$ , а также из (29), (30) следует уравнение для  $y_1 = h_1/h_{cr}$  (производные  $h'(x_1)$  и  $h''(x_1)$  исключаются):

$$y_1^3/3 + 3y_1 - 2 = 0.$$

Единственное решение этого уравнения на интервале  $(0, 1)$  дает зависимость глубины потока над задней кромкой

$$h_1 \simeq 0,64Q^2/g.$$

В силу (21) форма свободной поверхности в окрестности кромки находится в квадратурах.

При обтекании однородной жидкостью порога перед препятствием образуется застойная зона, существенно влияющая на характер течения. В рамках второго приближения теории мелкой воды (18) границы блокированной зоны могут быть найдены вместе с формой свободной поверхности в окрестности препятствия в следующей постановке.

Стационарный поток с параметрами  $h_0, u_0$  при  $x \rightarrow -\infty$  обтекает локальное препятствие, форма которого задается функцией  $z = z_0(x)$ . Часть границы  $z = z_0(x)$  соответствует форме препятствия на участке безотрывного обтекания. Другая часть границы

$z = z(x)$  является свободной ( $z(x) \geq z_0(x)$ ) и описывает область блокированной жидкости. Требуется найти положение свободных границ  $h = h(x)$  и  $z = z(x)$  из (18) и условия непрерывности давления  $p$  на границе блокированной зоны:

$$p|_{y=z(x)} = gh + (1/2)u^2(hh'' - (h')^2) + ku^2(hz'' - h'z') = p_b - gz. \quad (31)$$

Здесь  $p_b \equiv \text{const}$  — давление на дне перед препятствием ( $z_0(x) = 0$ ). При этом предполагается, что в блокированной области жидкость покоится и давление распределено по гидростатическому закону.

Будем также считать, что неизвестная граница  $z = z(x)$  гладко сопрягается с заданной формой дна  $z = z_0(x)$ . При  $k = 0$  задача о построении блокированной зоны в указанной постановке решена в [9]. Для  $k = 1$  будем искать неограниченную область, занятую блокированной зоной:  $z(x) > 0$  при  $-\infty < x < x_0 - l$ ,  $z(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ . Из условия равномерности набегающего потока следует, что  $p_b = p_{-\infty} = gh_0$ , и в силу (18), (31) система уравнений для определения неизвестных границ  $h = h(x)$  и  $z = z(x)$ , обезразмеренных условиями  $Q = 1$ ,  $g = 1$ , принимает вид

$$\begin{aligned} h'' &= 12Jh - 6h^2 - 6zh - 6/h - 6h_0h - ((h')^2 + 6(z')^2 + 6h'z')/h, \\ z'' &= ((h')^2 + 4h'z' + 3(z')^2 + 3)/h + 4h_0h - 6Jh + 2h^2 + 2hz, \\ J &= 1/(2h_0^2) + h_0. \end{aligned} \quad (32)$$

Линеаризуя (32) на равномерном течении  $h \equiv h_0$ ,  $z \equiv 0$ , получаем систему для возмущений  $\tilde{h}$ ,  $\tilde{z}$  основного потока:

$$\tilde{h}'' = 6(2/h_0^2 - h_0)\tilde{h} - 6h_0\tilde{z}, \quad \tilde{z}'' = (-6/h_0^2 + 2h_0)\tilde{h} + 2h_0\tilde{z},$$

из которой находится асимптотическое решение (32) при  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\begin{aligned} h &= h_0 + \tilde{h}, \quad z = \tilde{z}, \quad \tilde{h} = \hat{h}e^{\lambda x}, \quad \tilde{z} = \hat{z}e^{\lambda x} \quad (\hat{z} > 0), \\ \lambda &= (6/h_0^2 - 2h_0 + \sqrt{(6/h_0^2 - 2h_0)^2 + 12/h_0})^{1/2}. \end{aligned}$$

Далее с использованием найденной асимптотики численно строится решение (32) при  $z(x) \geq 0$ . Таким образом, форма блокированной зоны определяется с точностью до произвольного сдвига по оси  $x$  относительно заданного локального препятствия  $z = z_0(x)$ . Поэтому для гладкого сопряжения блокированной зоны и препятствия достаточно найти значение  $x_*$ :  $z(x_*) = z_0(x_*)$  и  $z'(x_*) = z'_0(x_*)$ . При  $x > x_*$  глубина потока  $h(x)$  находится из решения системы (18) при  $z(x) \equiv z_0(x)$ .

На рис. 3 представлены результаты расчета блокированной зоны по модели (32) (кривая 1), а также соответствующих режимов безотрывного обтекания сглаженного порога по модели Грина — Нагди (кривая 2) и по ее гиперболической аппроксимации (23) (кривая 3).

Заметим, что в блокированной области жидкость неподвижна, поэтому на участке  $(-\infty, x_*)$  форма препятствия  $z_0(x)$  может быть любой, удовлетворяющей неравенству  $z_0(x) \leq z(x)$ . Таким образом, решение задачи (32) о блокированной зоне с указанной выше асимптотикой может быть использовано для эффективного сглаживания плохообтекаемых тел с помощью второго приближения уравнений теории мелкой воды. На рис. 3 видно, что стационарные решения задачи о безотрывном обтекании сглаженного порога (кривые 2, 3) и задачи (32) о блокированной зоне достаточно близки.

Следует отметить, что все три кривые получены с использованием дополнительно условия (29) на задней кромке порога. Корректность использования этого условия для отбора стационарных решений и определения условий вверх по потоку в зависимости от формы обтекаемого тела может быть обоснована переходом к нестационарной проблеме.

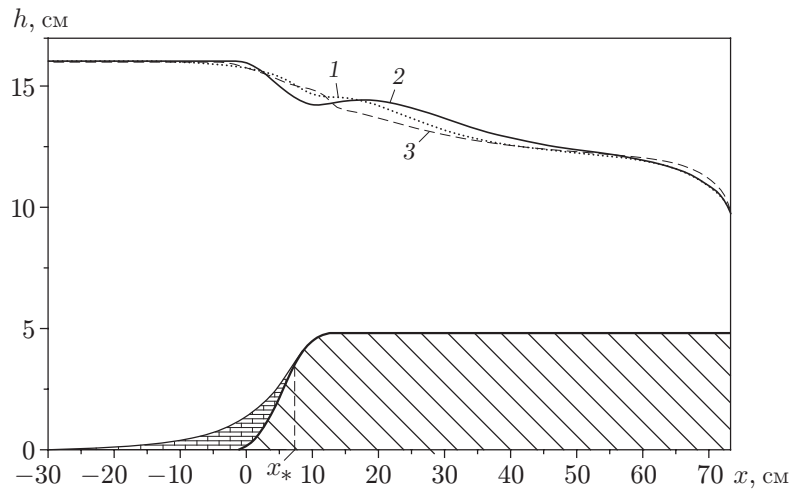


Рис. 3. Обтекание порога с блокированной зоной ( $\beta = 25$ ,  $h_0 = 16$  см,  $z_{\max} = 4,85$  см):  
 1 — стационарный расчет по модели (32) с блокированной зоной; 2, 3 — стационарные расчеты  
 в отсутствие блокированной зоны (2 — модель (18); 3 — дисперсионная модель (23))

Наиболее просто задача о нестационарном обтекании локального препятствия с соответствующими граничными условиями может быть проанализирована в рамках гиперболической модели (11), (14), (16). Для определения транскритического режима обтекания на левой границе расчетной области ( $u > 0$ ) достаточно задать постоянный расход и условия равномерного потока:

$$h = \eta, \quad w = u, \quad v = 0, \quad \theta = 0.$$

Ниже по течению от локального препятствия реализуется сверхкритический режим течения, и на правой границе области течения никаких условий не задается. Численное решение задачи об обтекании локального препятствия в рамках неоднородной гиперболической системы (11), (14), (16) может быть получено с использованием стандартных алгоритмов. В данной работе для решения задачи об установлении течения над порогом использована схема Годунова. При произвольных начальных данных, обеспечивающих транскритический режим над препятствием, течение устанавливается и приближается к стационарному течению (23) с дополнительным условием (24).

На рис. 4 представлены результаты численного решения задачи об установлении потока (кривая 1), соответствующие решения стационарной задачи с условиями (24), полученные по модели Грина — Нагди (кривая 2), и гиперболическая аппроксимация (9), (10) (кривая 3).

Результаты численных расчетов по нестационарной модели обтекания порога при различных начальных расходах приведены на рис. 5, а. Значение расхода определяется критической глубиной  $h_{cr}$ . В нестационарном расчете граничные условия те же, что и для расчетов, результаты которых представлены на рис. 4. Течение выходит на стационарный режим при  $t > 20$  с. На рис. 5, б приведены результаты экспериментов из работы [10]. Сравнение рис. 5, а и рис. 5, б показывает, что результаты расчета по гиперболической модели качественно описывают характер течений.

Анализ представленных на рис. 3–5 результатов расчетов стационарных и нестационарных течений по модели Грина — Нагди и ее гиперболической аппроксимации показывает, что решение соответствующей неоднородной системы уравнений существенно зависит от гладкости препятствия. Разрывы второй производной в уравнении профиля препятствия при сглаживании порога в точках сопряжения гладкого участка с горизонтальной

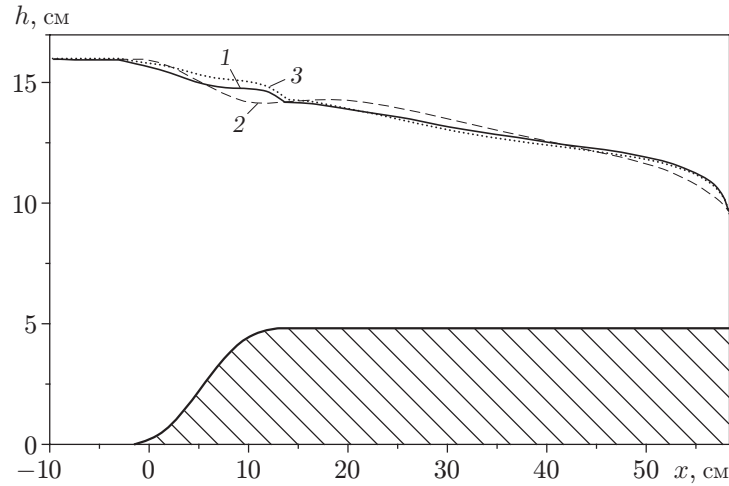


Рис. 4. Обтекание порога ( $\beta = 25$ ,  $h_0 = 16$  см,  $z_{\max} = 4,85$  см):  
 1 — нестационарный расчет по гиперболической модели (11), (14), (16); 2 — стационарный расчет по модели Грина — Нагди (18); 3 — стационарный расчет по гиперболической модели (23)

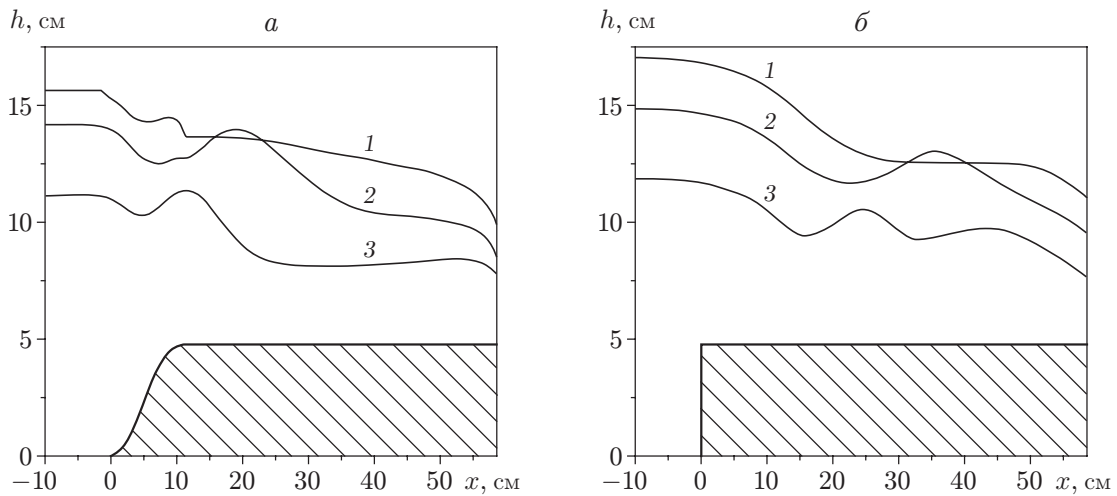


Рис. 5. Обтекание порога:  
 а — нестационарный расчет по модели (11), (14), (16); б — эксперимент [10]; 1 —  $h_{cr} = 8,1$  см,  $\beta = 25$ ; 2 —  $h_{cr} = 6,43$  см,  $\beta = 50$ ; 3 —  $h_{cr} = 4,28$  см,  $\beta = 25$

поверхностью обуславливают характерные изломы свободной поверхности над точками сопряжения (см. рис. 3, 4, 5, а).

Введение в схему течения блокированной зоны (кривая 1 на рис. 3), а также уменьшение кривизны препятствия при безотрывном обтекании устраняют этот дефект моделей. При транскритическом течении реальной жидкости над плохообтекаемым препятствием типа порога блокированная зона возникает не только перед препятствием, но и над его передней кромкой (см. рис. 3 в [10]). Это обстоятельство приводит к изменению эффективной формы обтекаемого препятствия и оказывает влияние на формирование параметров течения вверх по потоку, отличных от рассчитанных по представленным моделям. Наиболее четко этот эффект проявляется для относительно коротких препятствий (кривые 1 на рис. 5).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Гиперболические дисперсионные модели (9), (10), а также (11), (14), (16) являются аппроксимацией моделей, соответствующих второму приближению теории мелкой воды, и описывают нелинейные дисперсионные эффекты в течениях жидкости со свободной границей. При этом, в отличие от моделей первого и второго приближений теории мелкой воды, в модель в явном виде входит параметр  $\alpha$ , связанный с масштабом осреднения рассматриваемых течений. При  $\alpha \rightarrow \infty$  ( $\tau \rightarrow 0$ ) указанные уравнения переходят в уравнения Грина — Нагди [2, 3], а при  $\alpha \rightarrow 0$  ( $\tau \rightarrow \infty$ ) — в классические уравнения теории мелкой воды. Показано, что гиперболическая аппроксимация дисперсионных моделей весьма эффективна при описании стационарных нелинейных волн, генерируемых локальным препятствием в потоке. Кроме того, в рамках дисперсионной гиперболической модели упрощаются постановка и численная реализация нестационарных задач о генерации волн в каналах конечной длины.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Gavrilyuk S. L., Teshukov V. M.** Generalized vorticity for bubbly liquid and dispersive shallow water equations // *Continuum Mech. Thermodyn.* 2001. V. 13. P. 365–382.
2. **Green A. E., Naghdi P. M.** A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 78. P. 237–246.
3. **Ertekin R. C., Webster W. C., Wehausen J. V.** Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel of finite width // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 169. P. 275–292.
4. **Ляпидевский В. Ю.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
5. **Уизем Дж.** Нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
6. **Serre F.** Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux // *Houille Blanche.* 1953. V. 8, N 3. P. 374–388.
7. **Miles J. F.** Stationary transcritical channel flow // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 162. P. 489–499.
8. **Букреев В. И., Гусев А. В., Ляпидевский В. Ю.** Транскритическое течение над порогом в открытом канале // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2002. Т. 6. С. 55–61.
9. **Ляпидевский В. Ю.** Блокировка потока при обтекании порога // *Динамика сплошной среды / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики.* 2007. Вып. 124. С. 43–46.
10. **Букреев В. И., Гусев А. В.** Волны за ступенькой в открытом канале // *ПМТФ.* 2003. Т. 44, № 1. С. 62–70.

*Поступила в редакцию 23/III 2007 г.*